فصل اول

مقدمه‌ای بر استاتیک

۱-۱. زاویه‌ی بین بردار $\mathbf{V} = ۴۰\mathbf{i} - ۳۰\mathbf{j}$ با جهت مثبت محور x و y را تعیین کنید. بردار واحد $\mathbf{n}$ در جهت $\mathbf{V}$ را بنویسید.

حل:

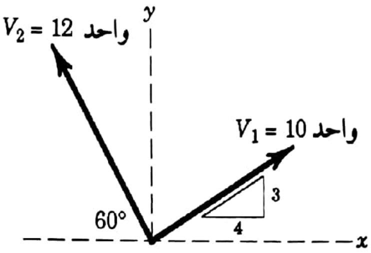
$$V = \sqrt{V_x^۲ + V_y^۲} = \sqrt{۴۰^۲ + ۳۰^۲} = ۵۰$$

$$\cos\theta_x = \frac{V_x}{V} = \frac{۴۰}{۵۰} \quad , \quad \theta_x = ۳۶/۹°$$

$$\cos\theta_y = \frac{V_y}{V} = \frac{-۳۰}{۵۰} \quad , \quad \theta_y = ۱۲۶/۹°$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{V} = \frac{۴۰\mathbf{i} - ۳۰\mathbf{j}}{۵۰} = ۰/۸\mathbf{i} - ۰/۶\mathbf{j}$$

۱-۲. اندازه‌ی بردار مجموع $\mathbf{V} = \mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲$ و زاویه‌ی θ_x که $\mathbf{V}$ با جهت مثبت محور x می‌سازد، را تعیین کنید. حل‌های تصویری و عددی را به صورت کامل انجام دهید.

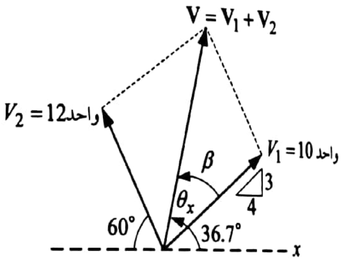


حل:

تصویری،

$V = ۱۶/۵$ واحد $\quad , \quad \theta_x = ۸۳°$

عددی،



$$V^۲ = ۱۰^۲ + ۱۲^۲ - ۲(۱۰)(۱۲)\cos ۹۶/۷° \Rightarrow V = ۱۶/۴۹ \text{ واحد}$$

$$\frac{\sin\beta}{۱۲} = \frac{\sin ۹۶/۷°}{۱۶/۴۹} \quad , \quad \beta = ۴۶/۲۸°$$

$$\theta_x = \beta + ۳۶/۷ = ۸۳°$$

۱-۳. برای بردارهای $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ داده شده در مساله ۱-۲، اندازه‌ی بردار تفاضل $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_۲ - \mathbf{V}_۱$ و زاویه‌ی θ_x که $\mathbf{V}'$ با جهت مثبت محور x می‌سازد، را تعیین کنید. حل‌های تصویری و عددی را به صورت کامل انجام دهید.

حل:

تصویری،

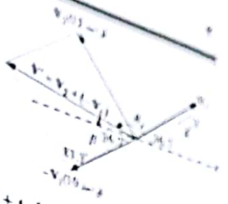
$V' = ۱۴/۶۷$ واحد $\quad , \quad \theta_x = ۱۶۲/۶°$

Scanned by CamScanner

$$V'^2 = 10^2 + 12^2 - 2(10)(12)\cos 83.3^\circ \Rightarrow V' = 12.67 \text{ واحد}$$

$$\frac{\sin\beta}{12} = \frac{\sin 83.3^\circ}{12.67} \quad , \quad \beta = 54.1^\circ$$

$$\theta_x + \beta = 216.7^\circ \quad , \quad \theta_x = 216.7 - 54.1 = 162.6^\circ$$



۱-۴. نیرویی توسط بردار $\mathbf{F} = 120\mathbf{i} - 160\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\ lb$ معرفی شده است. زوایای ایجاد شده بین $\mathbf{F}$ و جهات مثبت محورهای x، y و z را بیابید.

حل:

$$F = \sqrt{120^2 + 160^2 + 80^2} = 215\ lb$$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{160}{215} = 0.557 \quad , \quad \theta_x = 56.1^\circ$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-160}{215} = -0.743 \quad , \quad \theta_y = 138^\circ$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{80}{215} = 0.371 \quad , \quad \theta_z = 68.2^\circ$$

۱-۵. جرم یک ماشین با وزن $2000\ lb$ برحسب kg و $slugs$ چقدر است؟

$$m = \frac{W}{g} = \frac{3000}{32.2} = 93.2\ slugs \quad , \quad m = 93.2\ slugs\left(\frac{14.594\,kg}{slug}\right) = 1361\ kg$$

۱-۶. با استفاده از قانون گرانش، وزن W (نیروی گرانشی وارده از طرف زمین) یک مرد $90kg$ که در یک فضاپیما در مدار $250\ km$ از سطح زمین در حال حرکت است، را محاسبه کنید. W را برحسب هر دوی نیوتن و پوند بیان نمایید.

حل:

$$F = W = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

در آن $G = 6.373 \times 10^{-11}\ m^3/kg\,s^2$، $m_1 = 90\,kg$، $m_2 = 5.976 \times 10^{24}\ kg$ و $r = (6371 + 250) \times 10^3\ m$

با جایگذاری اعداد در رابطه‌ی بالا، به دست می‌آید

$$W = 819\,N$$

$$W = 819\,N\left(\frac{1\,lb}{4.4482\,N}\right) = 184.1\,lb$$

۱-۷. وزن یک زن که وزن وی $120lb$ است، را برحسب نیوتن تعیین کنید. همچنین، جرم وی برحسب $slugs$ و kg را بیابید. وزن خودتان را برحسب نیوتن تعیین نمایید.

حل:

$$W = (120\,lb)\left(\frac{4.4482\,N}{1\,lb}\right) = 578\,N$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{120}{32.2} = 4.04\ slugs \quad , \quad m = \frac{W}{g} = \frac{578}{9.81} = 58.9\,kg$$

Scanned by CamScanner

۸-۱ فرض کنید مقدار دقیق کمیت‌های بی‌بعد $A = ۶/۶۷$ و $B = ۱/۷۲۶$ باشد. با استفاده از قوانین موردمطالعه در این فصل، چهار کمیت $(A+B)$، $(A-B)$، (AB) و (A/B) را تعیین کنید.

حل:

$$A = ۶/۶۷ \quad , \quad B = ۱/۷۲۶$$

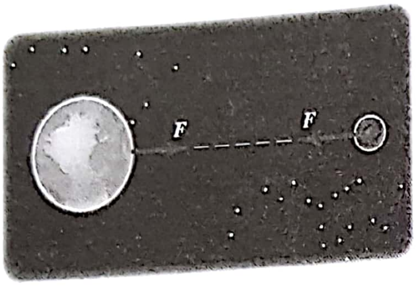
$$(A+B) = ۶/۶۷ + ۱/۷۲۶ = ۸/۴۰$$

$$(A-B) = ۶/۶۷ - ۱/۷۲۶ = ۴/۹۴$$

$$(AB) = (۶/۶۷)(۱/۷۲۶) = ۱۱/۵۱$$

$$(A/B) = \frac{۶/۶۷}{۱/۷۲۶} = ۳/۸۶$$

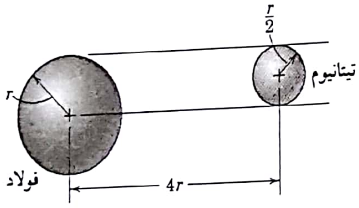
۹-۱. اندازه‌ی بردار **F**، که نیروی وارده از طرف زمین بر ماه می‌باشد، را محاسبه کنید. ابتدا محاسبات را برحسب نیوتن انجام داده، سپس جواب خود را به پوند تبدیل نمایید. برای داشتن کمیت‌های فیزیکی ضروری به جدول (۲-د) مراجعه کنید.



حل:

$$F = \frac{G.m_e.m_m}{d^۲} = \frac{(۶/۶۷۳\times۱۰^{-۱۱})(۰/۰۱۲۳)(۵/۹۷۶\times۱۰^{۲۴})^۲}{(۳۸۴۳۹۸\times۱۰^۳)^۲} = ۱/۹۸۴(۱۰^{۲۰})N = ۴/۴۶(۱۰^{۱۹})lb$$

۱۰-۱. کره‌های یکنواخت فولادی و تیتانیومی مطابق شکل قرار داده شده‌اند. اندازه‌ی نیروی گرانشی کوچک را بیابید اگر $r = ۵۰mm$.



حل:

$$m = \rho V$$

$$F = \frac{G.m_s.m_t}{d^۲} = \frac{G(\rho_s \forall_s)(\rho_t \forall_t)}{d^۲} = \frac{G(\rho_s.\frac{۴}{۳}\pi r^۳)(\rho_t.\frac{۴}{۳}\pi \frac{r^۳}{۸})}{۱۶r^۲}$$

از جدول د-۱ داریم: $\rho_s = ۷۸۳۰\frac{kg}{m^۳}$ و $\rho_t = ۳۰۸۰\frac{kg}{m^۳}$، بنابراین:

$$F = \frac{(۶/۶۷۳\times۱۰^{-۱۱})(۷۸۳۰\times\frac{۴}{۳}\pi\times۰/۰۵^۳)(۳۰۸۰\times\frac{۴}{۳}\pi\times\frac{۰/۰۵^۳}{۸})}{۱۶\times۰/۰۵^۲} = ۱/۳۵۸(۱۰^{-۹})N$$

۱۱-۱. درصد خطای n در جایگزینی سینوس و تانژانت یک زاویه با مقدار آن برحسب رادیان برای زاویه‌های ۵°، ۱۰° و ۲۰°، را تعیین کنید. اختلاف بین نتایج برای سینوس و تانژانت را توضیح دهید.

حل:

$$۵^\circ\left(\frac{\pi\, rad}{۱۸۰}\right) = ۰/۰۸۷۳\, rad$$

$$\sin ۵^\circ = ۰/۰۸۷۲ \quad , \quad n = \frac{۰/۰۸۷۲ - ۰/۰۸۷۳}{۰/۰۸۷۲}(۱۰۰) = ۰/۱\%$$

$$\tan ۵^\circ = ۰/۰۸۷۵ \quad , \quad n = \frac{۰/۰۸۷۵ - ۰/۰۸۷۳}{۰/۰۸۷۵}(۱۰۰) = ۰/۲۳\%$$

Scanned by CamScanner

$$۱۰^\circ\left(\frac{\pi\, rad}{۱۸۰}\right)=۰/۱۷۴۵\, rad$$

$\sin ۱۰^\circ=۰/۱۷۳۶$ ، $n=\dfrac{۰/۱۷۳۶-۰/۱۷۴۵}{۰/۱۷۳۶}(۱۰۰)=۰/۵۲\%$

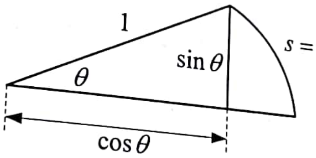
$\tan ۱۰^\circ=۰/۱۷۳۶$ ، $n=\dfrac{۰/۱۷۶۳-۰/۱۷۴۵}{۰/۱۷۶۳}(۱۰۰)=۱/۰۲\%$

$$۲۰^\circ\left(\frac{\pi\, rad}{۱۸۰}\right)=۰/۳۴۹۱\, rad$$

$\sin ۲۰^\circ=۰/۳۴۲۰$ ، $n=\dfrac{۰/۳۴۲۰-۰/۳۴۹۱}{۰/۳۴۲۰}(۱۰۰)=۲/۰۶\%$

$\sin ۲۰^\circ=۰/۳۶۴۰$ ، $n=\dfrac{۰/۳۶۴۰-۰/۳۴۹۱}{۰/۳۶۴۰}(۱۰۰)=۴/۰۹\%$

در تقریب $\sin\theta\approx\theta$، طول کمان $s=\theta$ برابر طول ضلع قائم مثلث فرض می‌شود.

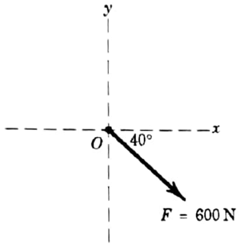


در تقریب $\tan\theta\approx\theta$، علاوه بر این، طول ضلع افقی مثلث برابر ۱ درنظر گرفته می‌شود.

Scanned by CamScanner

فصل دوم

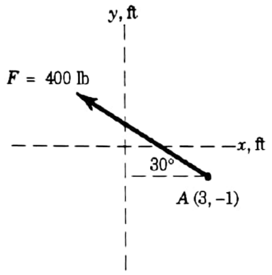
سیستم‌های نیرویی



۲-۱. نیروی F دارای اندازه‌ی $۶۰۰N$ می‌باشد. F را به صورت برداری برحسب بردارهای واحد i و j بیان کنید. مؤلفه‌های اسکالر F در جهات x و y را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases} F_x = ۶۰۰\cos ۴۰ = ۴۶۰N \\ F_y = -۶۰۰\sin ۴۰ = -۳۸۶N \end{cases} \quad , \quad \mathbf{F} = ۴۶۰\mathbf{i} - ۳۸۶\mathbf{j}$$



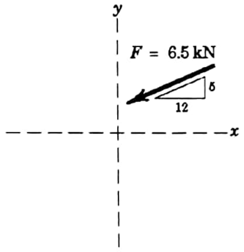
۲-۲. بزرگی نیروی F، $۴۰۰lb$ می‌باشد. F را به صورت برداری برحسب بردارهای واحد i و j بیان کنید. هر دوی مؤلفه‌های اسکالر و برداری F را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{F} = ۴۰۰(-\cos ۳۰°\ \mathbf{i} + \sin ۳۰°\ \mathbf{j}) = -۳۴۶\mathbf{i} + ۲۰۰\mathbf{j}\ lb$$

مؤلفه‌های اسکالر: $F_x = -۳۴۶lb$ ، $F_y = ۲۰۰lb$

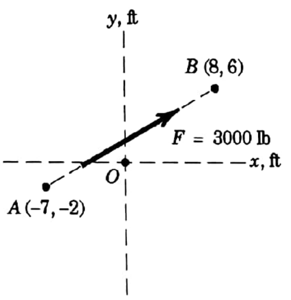
مؤلفه‌های برداری: $\mathbf{F}_x = -۳۴۶\ \mathbf{i}\ lb$ ، $\mathbf{F}_y = ۲۰۰\ \mathbf{j}\ lb$



۲-۳. شیب نیروی $۶/۵kN$ در شکل نشان داده شده است. F را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

حل:

$$\mathbf{F} = ۶/۵\left(-\frac{۱۲}{۱۳}\mathbf{i} - \frac{۵}{۱۳}\mathbf{j}\right) = -۶\mathbf{i} - ۲/۵\,\mathbf{j}\ kN$$



۲-۴. خط اثر نیروی $۳۰۰۰lb$، مطابق شکل از دو نقطه‌ی A و B عبور می‌کند. مؤلفه‌های اسکالر F در جهات x و y را تعیین کنید.

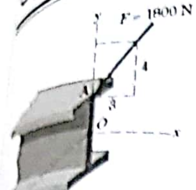
حل:

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{n}_{AB} = ۳۰۰۰\left[\frac{۱۵\mathbf{i} + ۸\mathbf{j}}{\sqrt{۱۵^۲ + ۸^۲}}\right] = ۲۶۵۰\mathbf{i} + ۱۴۱۲\mathbf{j}\ lb$$

مؤلفه‌های اسکالر: $F_x = ۲۶۵۰\ lb$ ، $F_y = ۱۴۱۲\ lb$

Scanned by CamScanner

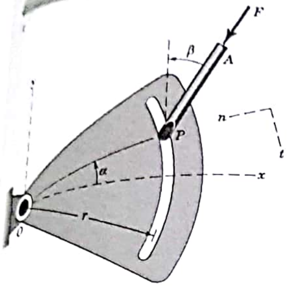
۲-۵. نیروی ۱۸۰۰ نیوتنی F به انتهای یک تیر I شکل اعمال شده است. بردار F را برحسب بردارهای واحد i و j بیان کنید.



حل:

$$\mathbf{F}=۱۸۰۰\left(-\frac{۳}{۵}\mathbf{i}-\frac{۴}{۵}\mathbf{j}\right)=-۱۰۸۰\mathbf{i}-۱۴۴۰\mathbf{j}$$

۲-۶. میله‌ی کنترل AP یک نیروی F روی قطاع مطابق شکل اعمال می‌کند. مؤلفه‌های نیرو در هر دو مختصات $x-y$ و $n-t$ را تعیین کنید.



حل:

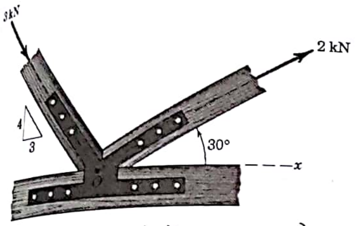
$$\mathbf{F}=F(-\sin\beta\,\mathbf{i}-\cos\beta\,\mathbf{j})=-F\sin\beta\,\mathbf{i}-F\cos\beta\,\mathbf{j}\quad,\quad \begin{cases}F_x=-F\sin\beta\\ F_y=-F\cos\beta\end{cases}$$

مختصات $x-y$:

مختصات $n-t$:

$$F=F(\sin(\alpha+\beta)\mathbf{e}_n+\cos(\alpha+\beta)\mathbf{e}_t)\quad,\quad\begin{cases}F_n=F\sin(\alpha+\beta)\\ F_t=F\cos(\alpha+\beta)\end{cases}$$

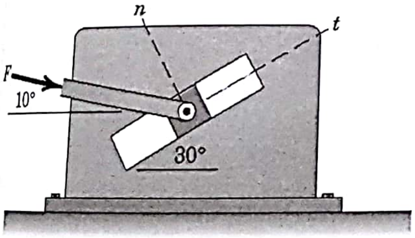
۲-۷. دو عضو سازه‌ای، یکی تحت کشش و دیگری تحت فشار، نیروهای نشان داده شده را به اتصال O وارد می‌کنند. اندازه‌ی نیروی برآیند R این نیروها و زاویه‌ی θ که R با جهت مثبت محور x می‌سازد، را تعیین کنید.



حل:

$$\left.\begin{aligned}R_x&=۲\cos۳۰^\circ+۳\left(\frac{۳}{۵}\right)=۳/۵۳\,kN\\ R_y&=۲\sin۳۰^\circ-۳\left(\frac{۴}{۵}\right)=-۱/۴\,kN\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}R=\sqrt{R_x^۲+R_y^۲}=۳/۸۰\,kN\\ \theta=\tan^{-۱}\dfrac{-۱/۴}{۳/۵۳}=۳۳۸^\circ\ (-۲۱/۶^\circ)\end{cases}$$

۲-۸. مؤلفه‌ی نیروی F در جهت t معلوم و برابر $۷۵N$ می‌باشد. مؤلفه‌ی آن در جهت n و اندازه‌ی F را تعیین کنید.

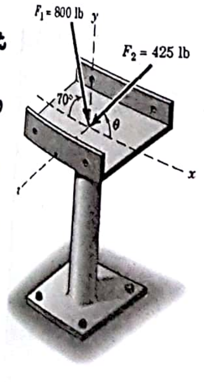


حل:

$$\mathbf{F}=F(\cos۴۰^\circ e_t-\sin۴۰^\circ e_n)$$

$$F\cos۴۰^\circ=۷۵\ \Rightarrow\ \begin{cases}F=۹۷/۹N\\ F_n=-F\sin۴۰^\circ=-۶۲/۹N\end{cases}$$

۲-۹. دو نیرو به ساختار یک ناودانی مطابق شکل اعمال شده‌اند. زاویه‌ی θ را به گونه‌ای تعیین کنید که برآیند نیروها عمودی باشد. اندازه‌ی نیروی برآیند R را تعیین کنید.



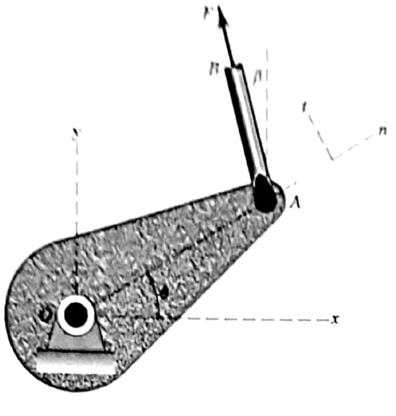
حل:

$$R_x=F_{۱,x}+F_{۲,x}\ \Rightarrow\ ۸۰۰\cos۷۰^\circ-۴۲۵\cos\theta=۰\ \Rightarrow\ \theta=۴۹/۹^\circ$$

$$R_y=F_{۱,y}+F_{۲,y}=-۸۰۰\sin۷۰^\circ-۴۲۵\sin۴۹/۹^\circ=۱۰۷۷\ lb$$

$$R=\sqrt{R_x^۲+R_y^۲}=۱۰۷۷\ lb$$

۲-۱۰. مؤلفه‌های نیروی F در جهات n و t که توسط میله‌ی AB به میل‌لنگ OA وارد می‌شود، را تعیین کنید. جواب کلی خود را برای $F=۱۰۰N$ و (الف) $\beta=۱۰^\circ$ و $\theta=۲۰^\circ$، (ب) $\beta=۲۵^\circ$ و $\theta=۱۵^\circ$ ارزیابی کنید.



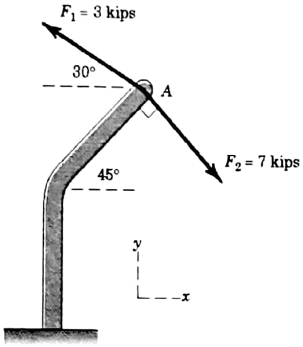
حل:

$$\mathbf{F}=F\left(+\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right)e_n+\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right)e_t\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_n=+F\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right) \\ F_t=F\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right) \end{cases}$$

الف) $F_n=۳۴/۲\,N \quad , \quad F_t=۹۴/۰\,N$

ب) $F_n=-۱۷/۳۶\,N \quad , \quad F_t=۹۸/۵\,N$



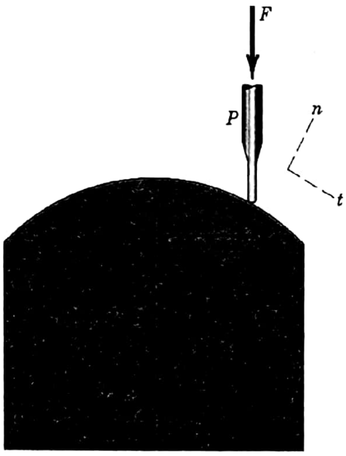
۲-۱۱. دو نیروی نشان داده شده در نقطه‌ی A به نوار خم شده وارد می‌شوند. نیروی برآیند $\mathbf{R}$ این دو نیرو را تعیین کنید.

حل:

$$R_x=F_{۱,x}+F_{۲,x}=-۳\cos ۳۰^\circ+۷\cos ۴۵^\circ=۲/۳۵\,kips$$

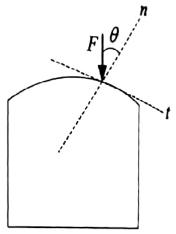
$$R_y=F_{۱,y}+F_{۲,y}=۳\sin ۳۰^\circ-۷\sin ۴۵^\circ=-۳/۴۵\,kips$$

$$\mathbf{R}=۲/۳۵\mathbf{i}-۳/۴۵\mathbf{j}\ kips$$



۲-۱۲. کاوشگر کوچک $\mathbf{P}$ به آرامی با یک نیروی عمودی $\mathbf{F}$ به سطح دایروی تحمیل شده است، مطابق شکل. مؤلفه‌های n و t این نیرو را به صورت تابعی از موقعیت افقی s بنویسید.

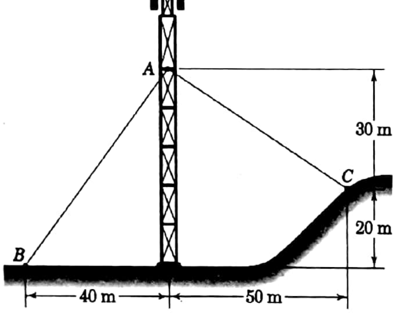
حل:



$$\mathbf{F}=F(-\cos\theta e_n+\sin\theta e_t) \quad , \quad \sin\theta=\frac{s}{r}$$

$$\cos\theta=\sqrt{۱-\frac{s^۲}{r^۲}}$$

$$\Rightarrow F_n=-\frac{F\sqrt{r^۲-s^۲}}{r} \quad , \quad F_t=\frac{Fs}{r}$$



۲-۱۳. کابل‌های نگهدارنده AB و AC به بالای یک برج انتقال متصل شده‌اند. کشش در کابل AB، $۸kN$ می‌باشد. کشش موردنیاز T در کابل AC را به گونه‌ای تعیین کنید که اثر خالص کشش دو کابل، یک نیروی رو به پایین در نقطه‌ی A باشد. اندازه‌ی این نیروی رو به پایین R را تعیین کنید.

حل:

$$R_x=۰ \Rightarrow -T_{AB}\sin\theta+T_{AC}\sin\beta=۰ \Rightarrow T_{AC}=\frac{T_{AB}\sin\theta}{\sin\beta}$$

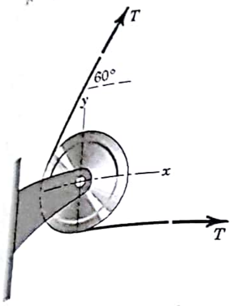
Scanned by CamScanner

$$T_{AC}=\frac{\frac{۸\times ۲۰}{\sqrt{۲۰^۲+۵۰^۲}}}{\frac{۵۰}{\sqrt{۵۰^۲+۲۰^۲}}}=۵/۸۳\,kN$$

$$R_y=-T_{AB}\cos\theta-T_{AC}\cos\beta=-\frac{۸\times ۵۰}{\sqrt{۵۰^۲+۴۰^۲}}-\frac{۵/۸۳\times ۲۰}{\sqrt{۵۰^۲+۲۰^۲}}=-۹/۲۵kN$$

$$R=\sqrt{R_x^۲+R_y^۲}=۹/۲۵\,kN$$

۲-۱۴. اگر کشش‌های مساوی در کابل قرقره $۴۰۰N$ باشد، فرم برداری نیروی **R** وارده بر قرقره توسط دو نیروی کششی را بنویسید. اندازه‌ی **R** را تعیین کنید.



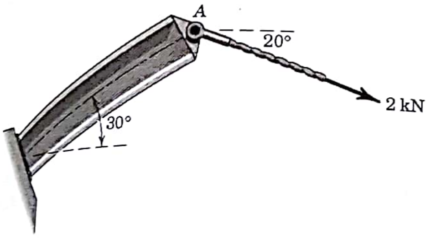
حل:

$$R_x=\sum F_x=T+T\cos ۶۰^\circ=۴۰۰\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)=۶۰۰N$$

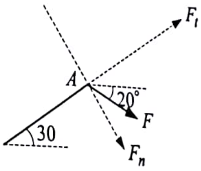
$$R_y=\sum F_y=T\sin ۶۰^\circ=۴۰۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳۴۶N$$

$$R=\sqrt{۶۰۰^۲+۳۴۶^۲}=۶۹۳N\quad,\quad \Rightarrow \mathbf{R}=۶۰۰\mathbf{i}+۳۴۶\mathbf{j}$$

۲-۱۵. جهت رعایت محدودیت‌های طراحی، تعیین اثر کشش $۲kN$ در کابل روی برش، کشش و خمش تیر I شکل ثابت ضروری است. بدین منظور، این نیرو را با دو نیروی F_t موازی و F_n عمود بر تیر در A جایگزین می‌شود. F_t و F_n را تعیین کنید.

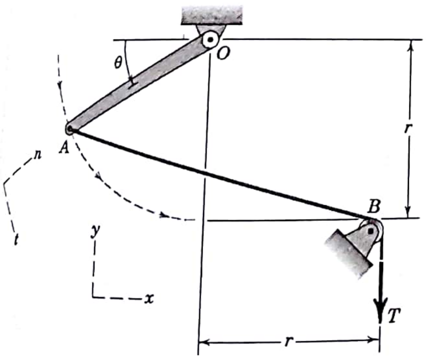


حل:

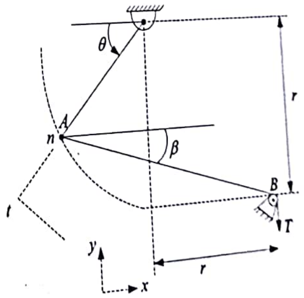


$$F_t=۲\cos ۵۰^\circ=۱/۲۸۶\,kN\quad,\quad F_n=۲\sin ۵۰^\circ=۱/۵۳۲\,kN$$

۲-۱۶. مؤلفه‌های x و y کشش T که بر نقطه‌ی A از میله‌ی OA اعمال شده است، را تعیین کنید. از اثرات قرقره‌ی کوچک در B صرف‌نظر کنید. فرض کنید r و θ معلوم باشند.



حل:



$$T_x=T\cos\beta=T.\frac{r(۱+\cos\theta)}{r(۱+\cos\theta)^۲+(۱-\sin\theta)^۲}=\frac{T(۱+\cos\theta)}{\sqrt{۳+۲\cos\theta-۲\sin\theta}}$$

$$T_y=-T\sin\beta=-T.\frac{r(۱-\sin\theta)}{r\sqrt{(۱+\cos\theta)^۲+(۱-\sin\theta)^۲}}=\frac{T(\sin\theta-۱)}{\sqrt{۳+۲\cos\theta-۲\sin\theta}}$$

Scanned by CamScanner

۲-۱۷. به مکانیزم مسئله‌ی قبلی مراجعه کنید. عبارت‌هایی کلی برای مؤلفه‌های در راستای n و t کشش T اعمالی در A به دست آورید. آنگاه عبارات خود را برای $T=100N$ و $\theta=35°$ ارزیابی نمایید.

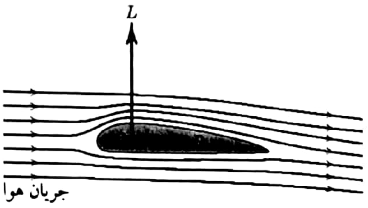
حل:

$$T_n = T_x\cos\theta + T_y\sin\theta = T.\frac{(1+\cos\theta)\cos\theta+(\sin\theta-1)\sin\theta}{\sqrt{3+2\cos\theta-2\sin\theta}} = T.\frac{1+\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{3+2\cos\theta-2\sin\theta}}$$

$$T_t = T_x\sin\theta + T_y\cos\theta = T.\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta-(\sin\theta-1)\cos\theta}{\sqrt{3+2\cos\theta-2\sin\theta}} = T.\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{3+2\cos\theta-2\sin\theta}}$$

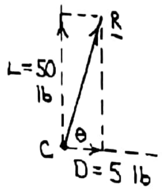
برای $T=100N$ و $\theta=35°$:

$$T_n = 66.7\ N \quad , \quad T_t = 74.5N$$



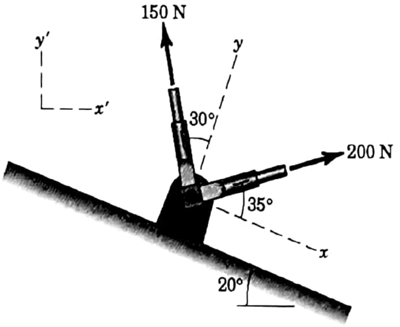
۲-۱۸. نسبت نیروی لیفت L به نیروی درگ D برای ایرفویل ساده، $L/D=10$ می‌باشد. اگر نیروی لیفت روی مقطع کوتاهی از ایرفویل $50lb$ باشد، اندازه‌ی نیروی برآیند **R** و زاویه‌ی θ که با محور افقی می‌سازد، را محاسبه کنید.

حل:



$$L = 50lb \quad , \quad \frac{L}{D}=10 \Rightarrow D=5lb$$

$$R=\sqrt{L^2+D^2}=\sqrt{50^2+5^2}=50.2lb \quad , \quad \theta=\tan^{-1}\frac{L}{D}=\tan^{-1}10=84.3°$$



۲-۱۹. برآیند **R** دو نیروی اعمالی بر بست را تعیین کنید. **R** را برحسب بردارهای واحد در راستای x و R نشان داده شده در شکل بنویسید.

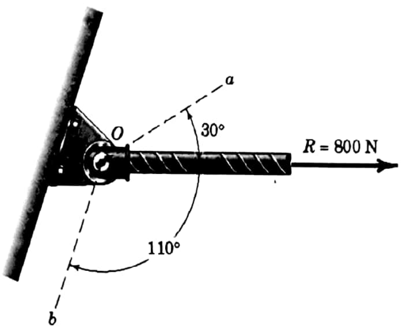
حل:

با استفاده از مختصات نشان داده شده در شکل:

$$R_x=\sum F_x = 200\cos35° - 150\sin30° = 88.8N$$

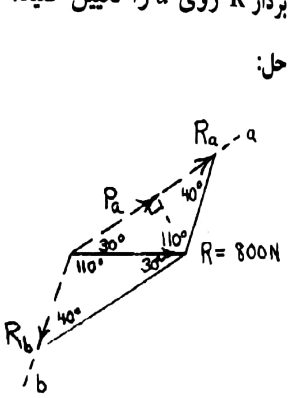
$$R_y=\sum F_y = 200\sin35° + 150\cos30° = 245N$$

$$\mathbf{R} = 88.8\mathbf{i}+245\mathbf{j} \quad N$$



۲-۲۰. مؤلفه‌های اسکالر R_a و R_b نیروی **R** در راستای محورهای غیرمستطیلی a و b را تعیین کنید. همچنین تصویر متعامد P_a بردار **R** روی a را تعیین کنید.

حل:



قانون سینوس‌ها:

$$\frac{800}{\sin40}=\frac{R_a}{\sin110°}=\frac{R_b}{\sin30°} \Rightarrow R_a=1170N \quad , \quad R_b=622N$$

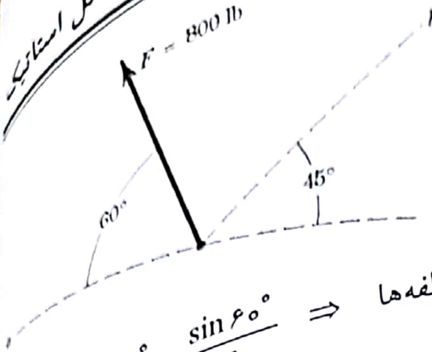
تصویر R روی a:

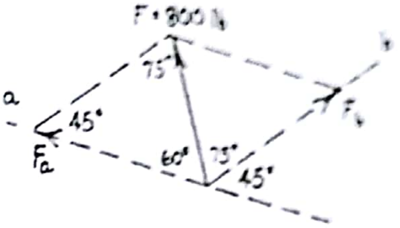
$$P_a = R\cos30° = 800\cos30° = 693N$$

Scanned by CamScanner

۲-۲۱. مؤلفه‌های نیروی 800lb روی محورهای مایل a و b را تعیین کنید. همچنین، تصاویر F روی محورهای a و b را تعیین نمایید.

حل:



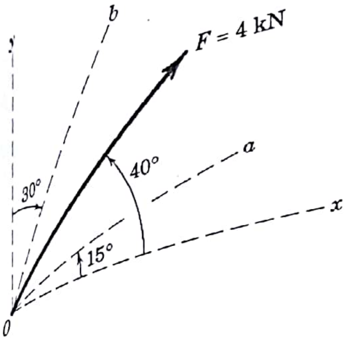


$$\frac{\sin ۴۵^\circ}{۸۰۰}=\frac{\sin ۷۵^\circ}{F_a}=\frac{\sin ۶۰^\circ}{F_b} \Rightarrow$$ مؤلفه‌ها : $\begin{cases}F_a=۱۰۹۲lb\\F_b=۹۸۰lb\end{cases}$

تصاویر : $\begin{cases}P_a=۸۰۰\cos ۶۰^\circ=۴۰۰lb\\P_b=۸۰۰\cos ۷۵^\circ=۲۰۷lb\end{cases}$

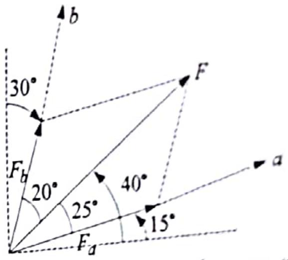
۲-۲۲. مؤلفه‌های F_a و F_b نیروی $۴kN$ در راستای محورهای مایل a و b را تعیین کنید. تصاویر P_a و P_b نیروی F روی محورهای a و b را تعیین نمایید.

حل:



$$\frac{۴}{\sin ۱۳۵^\circ}=\frac{F_b}{\sin ۲۵^\circ}=\frac{F_a}{\sin ۲۰^\circ} \Rightarrow F_a=۱/۹۳۵kN$$

$$F_b=۲/۳۹kN$$

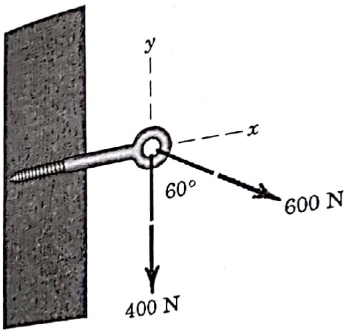


تصاویر F روی a و b به صورت:

$$P_b=F\cos ۲۰^\circ=۳/۷۶kN \quad , \quad P_a=F\cos ۲۵^\circ=۳/۶۳kN$$

۲-۲۳. برآیند **R** دو نیروی نشان داده شده را تعیین کنید با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع برداری، (ب) مجموع مؤلفه‌های اسکالر.

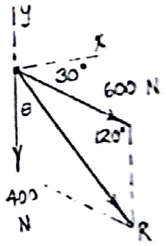
حل:



قانون کسینوس‌ها:

$$R^۲=۴۰۰^۲+۶۰۰^۲-۲(۴۰۰)(۶۰۰)\cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow R=۸۷۲N$$

قانون سینوس‌ها:

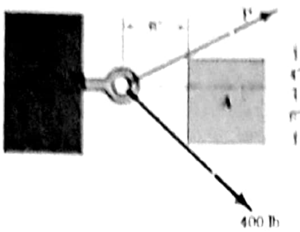


$$\frac{۶۰۰}{\sin\theta}=\frac{۸۷۲}{\sin ۱۲۰^\circ} \quad , \quad \theta=۳۶/۶^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}R_x=\Sigma F_x=۶۰۰\cos ۳۰^\circ=۵۲۰N\\R_y=\Sigma F_y=-۶۰۰\cos ۳۰^\circ-۴۰۰=-۷۰۰N\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{R}=۵۲۰\mathbf{i}-۷۰۰\mathbf{j}$$

۲-۲۴. برای خارج کردن یک میخ از داخل الوار، به‌کارگیری نیرویی در امتداد محور افقی میخ مطلوب می‌باشد. مانع A از دسترسی مستقیم ممانعت می‌کند، لذا دو نیرو، یکی $۴۰۰lb$ و دیگری P، توسط کابل‌های نشان داده شده به کار گرفته می‌شوند. اندازه‌ی نیروی P موردنیاز برای اطمینان از همراستایی نیروی برآیند T با میخ را

Scanned by CamScanner

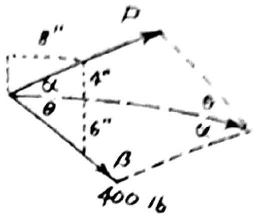


محاسبه کنید. همچنین T را بیابید.

حل:

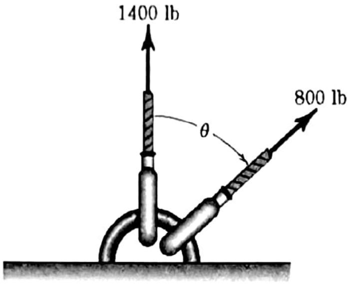
$\alpha = \tan^{-1}\frac{۴}{۸} = ۲۶/۵۷°$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{۶}{۸} = ۳۶/۸۷°$

$\beta = ۱۸۰ - (\alpha + \theta) = ۱۱۶/۵۷°$



$$\frac{P}{\sin ۳۶/۸۷°} = \frac{۴۰۰}{\sin ۲۶/۵۷°} \Rightarrow P = ۴۰۰\frac{۰/۶}{۰/۴۴۷۲} = ۵۳۷\, lb$$

$$\frac{T}{\sin ۱۱۶/۵۷°} = \frac{۴۰۰}{\sin ۲۶/۵۷°} \Rightarrow T = ۴۰۰\frac{۰/۸۹۴۴}{۰/۴۴۷۲} = ۸۰۰\, lb$$

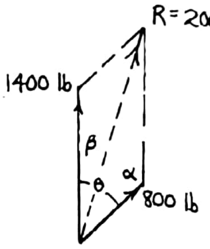


۲-۲۵. نیروی $۸۰۰lb$ در چه زاویه‌ی θ باید اعمال شود که برآیند R دو نیرو، اندازه‌ای برابر $۲۰۰۰lb$ داشته باشد؟ در این حالت، زاویه‌ی β بین R با امتداد قائم را تعیین کنید.

حل:

قانون کسینوس‌ها:

$$۲۰۰۰^۲ = ۱۴۰۰^۲ + ۸۰۰^۲ - ۲(۱۴۰۰)(۸۰۰)\cos\alpha$$

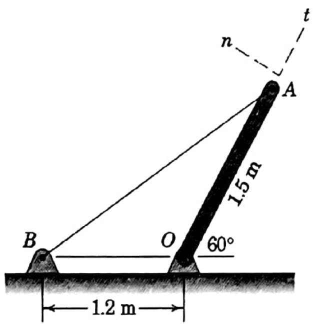


$\alpha = ۱۸۰ - \theta$, $\cos(۱۸۰ - \theta) = -\cos\theta$

$$۲۰۰۰^۲ = ۱۴۰۰^۲ + ۸۰۰^۲ + ۲(۱۴۰۰)(۸۰۰)\cos\theta \Rightarrow \theta = ۵۱/۳°$$

قانون سینوس‌ها:

$$\frac{۸۰۰}{\sin\beta} = \frac{۲۰۰۰}{\sin(۱۸۰° - ۵۱/۳°)} \Rightarrow \beta = ۱۸/۱۹°$$

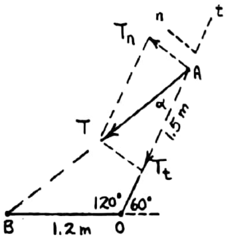


۲-۲۶. کابل AB از چرخش ساعتگرد میله‌ی OA حول نقطه‌ی O جلوگیری می‌کند. اگر کشش کابل $۷۵۰N$ باشد، مؤلفه‌های در راستای n و t این نیرو، اعمالی در نقطه‌ی A، را تعیین کنید.

حل:

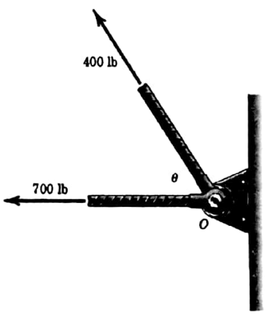
$$\overline{AB}^۲ = ۱/۲^۲ + ۱/۵^۲ - ۲(۱/۲)(۱/۵)\cos ۱۲۰° \Rightarrow \overline{AB} = ۲/۳۴\, m$$

$$\frac{\sin\alpha}{۱/۲} = \frac{\sin ۱۲۰}{۲/۳۴} \quad , \quad \alpha = ۲۶/۳°$$



$$T_n = T\sin\alpha = ۷۵۰\sin ۲۶/۳° = ۳۳۳\, N$$

$$T_t = T\cos\alpha = -۷۵۰\cos ۲۶/۳° = -۶۷۲\, N$$



۲-۲۷. نیروی $۴۰۰lb$ در چه زاویه‌ی θ باید اعمال شود تا برآیند R دو نیرو دارای اندازه‌ای برابر $۱۰۰۰lb$ باشد؟ در این حالت زاویه‌ی β بین R و امتداد افق چقدر خواهد بود؟

حل:

قانون کسینوس‌ها:

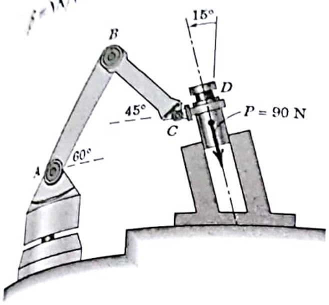
Scanned by CamScanner

$1000^۲ = ۲۰۰^۲ + ۷۰۰^۲ + ۲(۲۰۰)(۷۰۰)\cos\theta$

$\cos\theta = ۰/۶۲۵ \quad , \quad \theta = ۵۱/۳°$

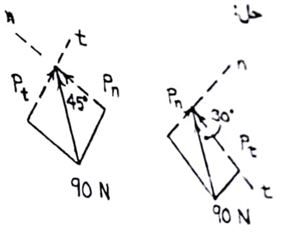
$$\frac{1000}{\sin(۱۸۰° - ۵۱/۳°)} = \frac{۳۰۰}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}۰/۷۸۰۶ = ۰/۳۱۲$$

$\beta = ۱۸/۱۹°$



۲-۲۸. در طراحی یک روبات برای داخل کردن یک قطعه استوانه‌ای کوچک در یک حفره‌ی دایروی کاملاً هم‌اندازه، بازوی روبات باید نیروی P به اندازه‌ی ۹۰N موازی محور حفره به قطعه وارد کند، مطابق شکل. مؤلفه‌های نیرویی که قطعه به روبات در راستای (الف) موازی و عمود بر بازوی AB و (ب) موازی و عمود بر بازوی BC وارد می‌کند، را تعیین کنید.

حل:



BC

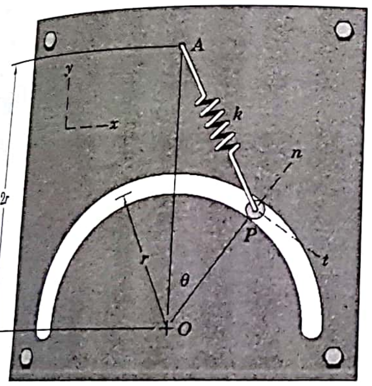
$P_t = -۹۰\cos ۳۰° = -۷۷/۹\,N$

$P_n = ۹۰\sin ۳۰° = ۴۵/۰\,N$

AB

$P_t = ۹۰\cos ۴۵° = ۶۳/۶\,N$

$P_n = ۹۰\cos ۴۵° = ۶۳/۶\,N$



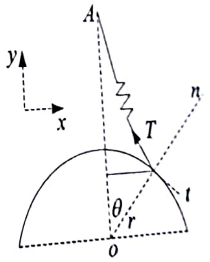
۲-۲۹. طول بدون کشیدگی فنر r می‌باشد. هنگامی که پین P در یک موقعیت دلخواه θ قرار داشته باشد، مؤلفه‌های در راستای x و y نیرویی که فنر به پین وارد می‌کند را تعیین کنید. عبارات کلی خود را برای $k = ۱/۴\,kN/m$ ، $r = ۴۰۰mm$ و $\theta = ۴۰°$ ارزیابی نمایید. (راهنمایی: نیرو در یک فنر با رابطه‌ی $F = k\delta$ داده می‌شود، که در آن δ میزان کشیدگی فنر می‌باشد.)

حل:

طول فنر در حالت دوم برابر است با $r + \delta$. لذا

$$(\delta + r)^۲ = (۲r - r\cos\theta)^۲ + (r\sin\theta)^۲ \Rightarrow \delta = -r \pm \sqrt{(۲r - r\cos\theta)^۲ + (r\sin\theta)^۲}$$

از آنجا که δ مثبت است بنابراین



$$\delta = r\{\sqrt{(۲ - \cos\theta)^۲ + (\sin\theta)^۲} - ۱\}$$

$$T = k\delta \quad , \quad T_x = -T \cdot \frac{r\sin\theta}{r + \delta} = -T \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{(۲ - \cos\theta)^۲ + (\sin\theta)^۲}}$$

$$T_y = T \cdot \frac{۲r - r\cos\theta}{r + \delta} = T \cdot \frac{۲ - \cos\theta}{\sqrt{(۲ - \cos\theta)^۲ + (\sin\theta)^۲}}$$

با جایگذاری $T = k\delta$، نتیجه می‌شود:

Scanned by CamScanner

$$T_x = -\frac{kr\sin\theta\{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}-۱\}}{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}} \quad ; \quad T_y = \frac{kr(۲-\cos\theta)\{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}-۱\}}{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}}$$

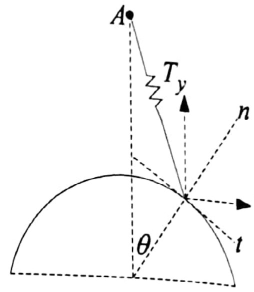
با قرار دادن $k = ۱/۴\,kN/m$، $\theta = ۴۰^\circ$ و $r = ۴۰۰mm$ به دست می‌آید:

$T_x = -۱۰۱/۲N \quad , \quad T_y = ۱۹۴/۴N$

۲-۳۰. به شکل و صورت مسئله‌ی (۲-۲۹) مراجعه نمایید. زمانی که پین P در موقعیت $\theta = ۲۰^\circ$ قرار داشته باشد، مؤلفه‌های در راستای n و t نیروی F که فنر با مدول $k = ۱/۴\,kN/m$ بر پین وارد می‌نماید، را تعیین کنید. فاصله $r = ۴۰۰mm$ می‌باشد.

حل:

از نتایج سؤال ۲۹ می‌توان استفاده نمود:



$$T_n = T_x\sin\theta + T_y\cos\theta$$

$$= +\frac{kr(-\sin^۲\theta+\cos\theta\{۲-\cos\theta\})\{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}-۱\}}{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}}$$

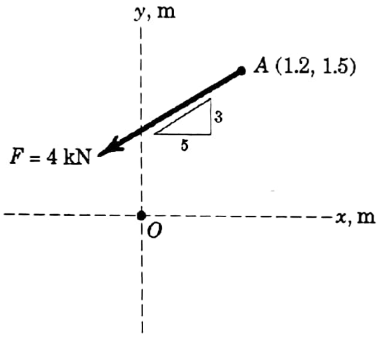
$$T_t = T_x\cos\theta - T_y\sin\theta$$

$$= \frac{kr\{-\sin\theta\cos\theta-\sin\theta(۲-\cos\theta)\{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}-۱\}}{\sqrt{(۲-\cos\theta)^۲+(\sin\theta)^۲}}$$

با قرار دادن $\theta = ۲۰^\circ$ به دست می‌آید:

$T_n = ۵۰/۴N \quad , \quad T_t = -۳۹/۲N$

۲-۳۱. نیروی F با اندازه‌ی $۴kN$ در نقطه‌ی A اعمال شده است. گشتاور نیروی F حول A را محاسبه نموده، آن را هم به صورت یک کمیت اسکالر و هم به صورت یک کمیت برداری بیان نمایید. مختصات نقاطی که گشتاور نیروی F حول محورهای x و y صفر است، را تعیین کنید.



حل:

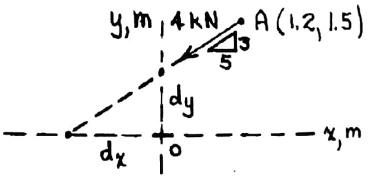
$$\circlearrowright + \; M_o = ۴\left[\frac{۵}{\sqrt{۳۴}}(۱/۵) - \frac{۳}{\sqrt{۳۴}}(۱/۲)\right] = ۲/۶۸\;kN.m$$

به عنوان یک بردار

$\mathbf{M_o} = ۲/۶۸\mathbf{k}\;\;kN/m$

$$\frac{۱/۵}{d_x+۱/۲} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow d_x = ۱/۳m \quad , \quad \frac{d_y}{۱/۳} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow d_y = ۰/۷۸m$$

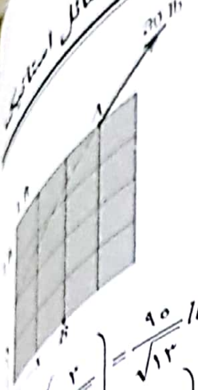
مختصات نقاط تقاطع (برحسب m):



$(-۱/۳,۰)$, $(۰,۰/۷۸)$

۲-۳۲. صفحه‌ی مربع شکلی از مربع‌هایی به ضلع $۱ft$ تشکیل شده است. نیرویی $۳۰lb$ در نقطه‌ی A مطابق شکل اعمال شده است. گشتاور M_B نیرو حول نقطه‌ی B را با استفاده از حداقل دو روش متفاوت محاسبه کنید.

Scanned by CamScanner



حل:

روش اول: حاصل ضرب برداری

$M_B = r \times F = (\mathbf{i}+۴\mathbf{j}) \times ۳۰\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\mathbf{i} + \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\mathbf{j}\right) \Rightarrow M_B = $ [illegible]

$\Rightarrow M_B = ۸۳/۲\, lb-ft$ ساعتگرد

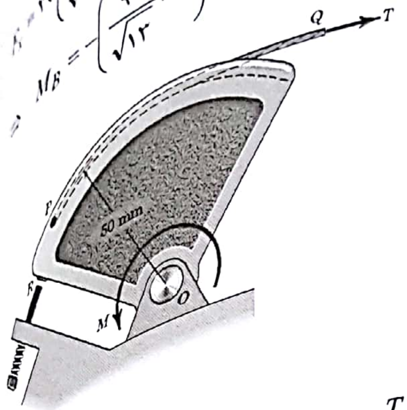
روش دوم: تجزیه نیرو به دو مؤلفه در راستای x و y:

$F_y = ۳۰\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right) = \frac{۶۰}{\sqrt{۱۳}} lb$

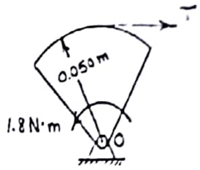
$F_x = ۳۰\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\right) = \frac{۹۰}{\sqrt{۱۳}} lb$

$M_B = -\left(\frac{۹۰}{\sqrt{۱۳}} \times ۴\right) + \left(\frac{۶۰}{\sqrt{۱۳}} \times ۱\right) = -\frac{۳۰۰}{\sqrt{۱۳}} lb-ft \Rightarrow M_B = ۸۳/۲\, lb-ft$ ساعتگرد

۲-۳۳. قطاع کنترل گلویی به صورت آزادانه حول O لولا شده است. اگر در موقعیت نشان داده شده، یک فنر پیچشی داخلی گشتاور برگرداننده‌ی $۱۸۰ N.m$ را بر قطاع وارد کند، کشش موردنیاز T در کابل گلویی را به گونه‌ای تعیین کنید که گشتاور برآیند حول نقطه‌ی O صفر شود. یادآور می‌شود هنگامی که T صفر است، قطاع نسبت به پیچ تنظیم در R ساکن می‌باشد.

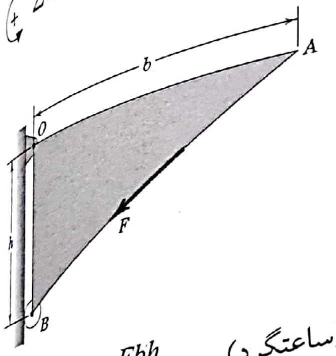


حل:



$\circlearrowleft + \sum M_O = ۱/۸ - T(۰/۰۵۰) = ۰ \Rightarrow T = ۳۶ N$

۲-۳۴. نیرویی به بزرگی F در راستای لبه‌ی صفحه‌ای مستطیلی اعمال شده است. گشتاور F حول نقطه‌ی O را تعیین کنید.



حل:

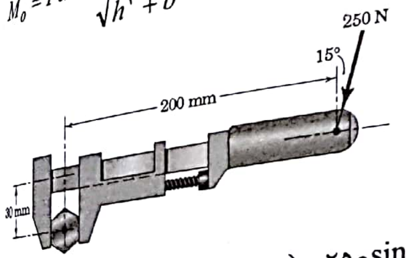
فاصله‌ی عمودی نیروی F از نقطه‌ی O به صورت زیر می‌باشد:

$$d = \frac{bh}{\sqrt{h^۲ + b^۲}}$$

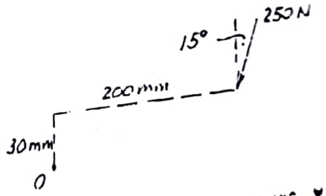
لذا:

$$M_O = Fd = \frac{Fbh}{\sqrt{h^۲ + b^۲}} \quad \text{(ساعتگرد)}$$

۲-۳۵. گشتاور نیروی $۲۵۰ N$ وارده بر دسته آچار فرانسه را حول مرکز پیچ محاسبه نمایید.



حل:



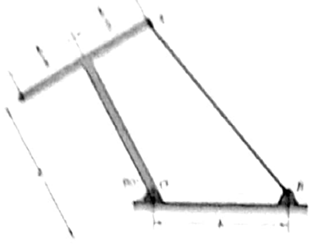
$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۲۵۰\cos ۱۵^\circ(۰/۲۰۰) - ۲۵۰\sin ۱۵^\circ(۰/۰۳۰)$$

$$= ۴۸/۳۰ - ۱/۹۴۱ = ۴۶/۴\, N.m$$

۲-۳۶. کشش در کابل AB برابر $۱۰۰ N$ می‌باشد. گشتاور این نیرو که بر نقطه‌ی A از میله‌ی T شکل وارد شده

Scanned by CamScanner

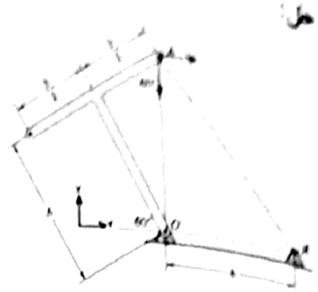
است، را حول نقطه‌ی O تعیین کنید. اندازه‌ی d، ۶۰۰mm است.



حل:

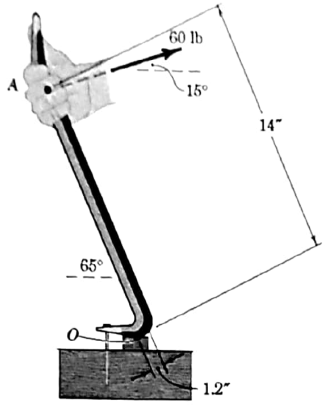
$$T_x = T\cos ۶۰^\circ = ۱۰۰\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۵۰N$$

$$\Rightarrow \circlearrowleft \sum M_O = T_x d = ۵۰\left\{b^۲ + \frac{b^۲}{۴}\right\}^{\frac{۱}{۲}} = ۵۰b\sqrt{\frac{۵}{۴}}$$

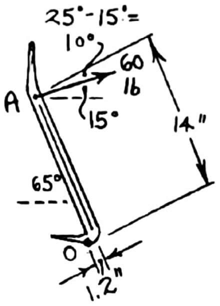


$$= ۵۰\sqrt{\frac{۵}{۴}}(۰/۶) = ۳۳/۴\,N.m$$ (ساعتگرد)

۲-۳۷. برای بیرون کشیدن یک میخ از دیلمی مطابق شکل استفاده شده است. گشتاور نیروی $۶۰lb$ را حول نقطه‌ی O، محل تماس دیلم و بلوک کوچک، تعیین کنید.

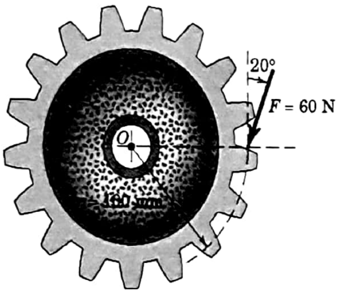


حل:

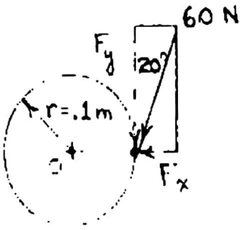


$$\circlearrowright + \sum M_O = (۶۰\cos ۱۰^\circ)(۱۴) + (۶۰\sin ۱۰^\circ)(۱/۲) = ۸۴۰\,lb-in = ۷۰/۰\,lb-ft$$ (ساعتگرد)

۲-۳۸. نیرویی با بزرگی $۶۰N$ به چرخدنده‌ای وارد شده است. گشتاور F حول نقطه‌ی O را تعیین کنید.

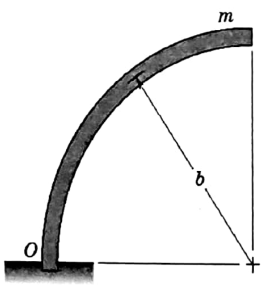


حل:



$$\circlearrowright + \sum M_O = rF_y = (۰/۱)(۶۰\cos ۲۰^\circ) = ۵/۶۴\,N.m$$

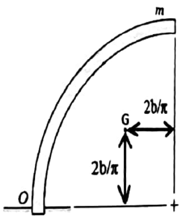
۲-۳۹. عضوی باریک و نیم دایروی به جرم m در تکیه‌گاه خود O کار گذاشته شده است. گشتاور وزن عضو حول نقطه‌ی O را تعیین کنید. برای یافتن اطلاعات موردنیاز برای موقعیت مرکز جرم از جدول د-۳ استفاده کنید.



حل:

با توجه به جدول د-۳، فاصله‌ی مرکز جرم از مرکز قطاع $\frac{۲r}{\pi}$ می‌باشد.

بنابراین



$$\sum M_O = mgb\left(۱ - \frac{۲}{\pi}\right)$$ ساعتگرد

۲-۴۰. نیروی P با اندازه‌ی $۳۰N$ عمود بر قسمت BC میله‌ی خمیده وارد شده است. گشتاور P حول نقطه‌ی B

Scanned by CamScanner

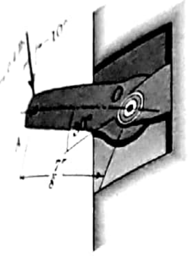
$\curvearrowright + \sum M_B = ۲۰(۱/۴) = ۲۸\,N.m$ (ساعتگرد)

$\curvearrowright + \sum M_A = ۲۰\cos ۴۵^\circ(۱/۴ + ۱/۴\sin ۴۵^\circ) + ۲۰\sin ۴۵^\circ(۱/۴\cos ۴۵^\circ)$

$= ۸۱/۹\,N.m$ (ساعتگرد)

۴۱-۲. گشتاور نیروی $۰/۴lb$ را حول لولای O واقع روی دیوار تعیین کنید.

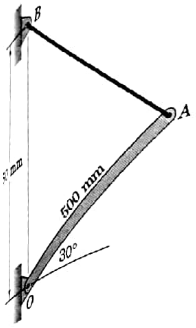
حل:

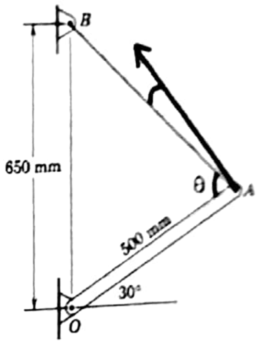


$$\curvearrowleft + \sum M_O = Fd = ۰/۴\left(\frac{۷}{۸}\sin ۵۰^\circ\right) = ۰/۲۶۸\,lb - in$$ پادساعتگرد

۴۲-۲. کابل AB دارای کشش $۴۰۰N$ می‌باشد. گشتاور این نیرو را که بر نقطه‌ی A میله‌ی باریک اعمال شده است، حول O به دست آورید.

حل:





$$AB = \sqrt{\overline{OB}^۲ + \overline{OA}^۲ - (\overline{OB})(\overline{OA})\cos ۶۰^\circ}$$

$$= \sqrt{۶۵۰^۲ + ۵۰۰^۲ - ۲(۶۵۰)(۵۰۰)\cos ۶۰^\circ} = ۵۸۹/۵\,mm$$

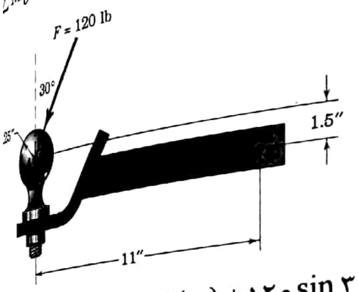
$$\frac{۶۵۰}{\sin\theta} = \frac{۵۸۹/۵}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow \theta = ۷۲/۷^\circ$$

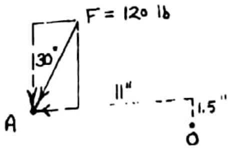
بنابراین

$$\sum M_O = T\cos(۹۰^\circ - ۷۲/۷^\circ) \times ۰/۵ = ۴۰۰ \times ۰/۵ \times \cos(۱۸/۳^\circ) = ۱۸۹/۸۸\,N.m$$

۴۳-۲. تریلری با نیروی $۱۲۰lb$ اعمال شده بر توپی اتصال، مطابق شکل، به سمت جلو کشیده می‌شود. گشتاور این نیرو حول نقطه‌ی O را تعیین کنید.

حل:

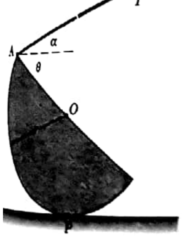




$$\curvearrowleft + \sum M_O = ۱۲۰\cos ۳۰^\circ(۱۱) + ۱۲۰\sin ۳۰^\circ(۱/۵) = ۱۲۳۳\,lb - in = ۱۰۲/۸\,lb - ft$$ (پادساعتگرد)

۴۴-۲. گشتاور نیروی کششی T حول نقاط P و O را تعیین کنید.

حل:



$$\curvearrowright + \sum M_O = T\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha - \theta\right)r = Tr\sin(\theta + \alpha)$$ ساعتگرد

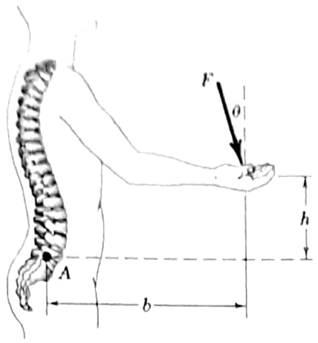
Scanned by CamScanner

$$\begin{cases}\mathbf{T} = T_1\mathbf{i} + T_1\mathbf{j} \\ \mathbf{d} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r(1+\sin\theta)\,\mathbf{j}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad +\curvearrowleft M_P = \mathbf{T}\times\mathbf{d} = T(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j})\times r(\cos\theta\,\mathbf{i} + (1+\sin\theta)\,\mathbf{j})$$

$$= Tr(\cos\alpha + \cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta)\mathbf{k} = Tr[\cos\alpha + \sin(\alpha+\theta)]\mathbf{k}$$

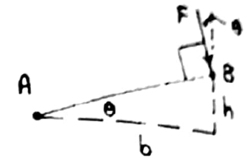
۲-۴۵. قسمت پایینی ستون فقرات در A نسبت به خمش بیش از حد ناشی از گشتاور نیروی F حول A بسیار حساس می‌باشد. به ازای مقادیر معلوم F، b و h زاویه‌ی θ را به گونه‌ای تعیین کنید که در آن کرنش خمشی حداکثر باشد.



حل:

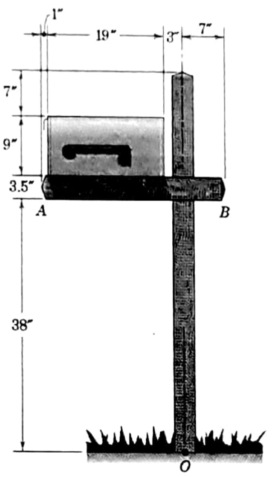
M_A زمانی حداکثر است که F عمود بر AB باشد.

بنابراین

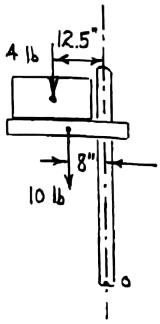


$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{b}\right)$$

۲-۴۶. گشتاور ترکیبی ناشی از وزن صندوق پست و عضو عرضی AB حول O را تعیین کنید. وزن صندوق $4lb$ و وزن عضو عرضی یکنواخت $10lb$ می‌باشد. وزن هر دو مورد بر مرکز هندسی آنها وارد می‌شود.

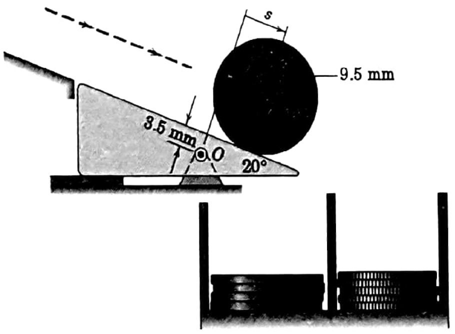


حل:

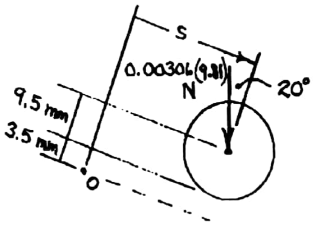


$$+\curvearrowright M_O = ۴(۱۲/۵) + ۱۰(۸) = ۱۳۰\,lb-in$$

۲-۴۷. قسمتی از یک دستگاه مرتب‌کننده سکه‌ها به صورت زیر عمل می‌کند: پنی‌ها (شاهی) و دایم‌ها (سکه ده‌سنتی) روی سطح شیبدار ۲۰° پایین غلتیده و قسمت مثلثی انتهایی آزادانه حول محور افقی گذرنده از O دوران می‌کند. دایم‌ها به اندازه‌ی کافی سبک می‌باشند (هر کدام ۲/۲۸ گرم) به گونه‌ای که قسمت مثلثی ساکن مانده و دایم‌ها به ستون سمت راست می‌ریزند. از طرف دیگر پنی‌ها به اندازه‌ی کافی سنگین‌اند (هر کدام ۳/۰۶ گرم) به گونه‌ای که قسمت مثلثی به صورت ساعتگرد چرخیده و پنی‌ها داخل ستون سمت چپ قرار می‌گیرند. گشتاور وزن پنی حول O را برحسب فاصله‌ی s برحسب mm تعیین کنید.



حل:

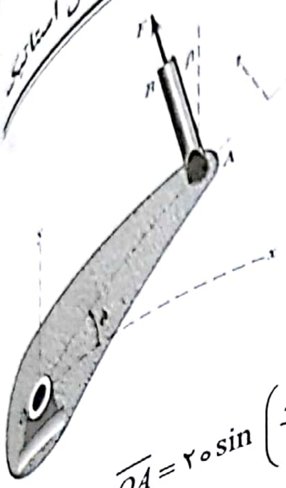


$$+\curvearrowright M_O = ۰/۰۰۳۰۶(۹/۸۱)[s\cos ۲۰° + (۹/۵ + ۳/۵)\sin ۲۰°]$$

$$= ۰/۱۳۳۵ + ۰/۰۲۸۲s \quad N.mm$$

Scanned by CamScanner

۴۸-۲ موزلنگ مسئله‌ی (۲-۱۰) در اینجا مجدداً آورده شده است. اگر $\overline{OA}=50\,mm$، $\theta=25^\circ$ و $\beta=55^\circ$ باشد، گشتاور نیروی F با اندازه‌ی $F=20\,N$ حول نقطه‌ی O را تعیین کنید.



حل:

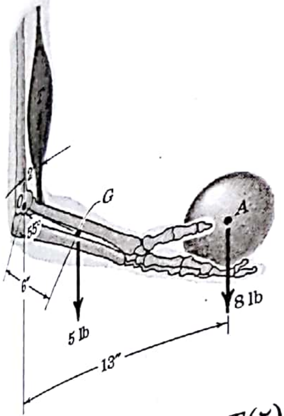
با توجه به جواب مسئله‌ی (۲-۱۰)،

$$F_t = F\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right) \quad , \quad F_n = F\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta+\beta\right)$$

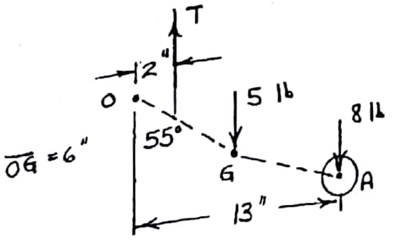
لذا

$$\circlearrowleft + M_O = F_t\cdot\overline{OA} = ۲۰\sin\left(\frac{\pi}{۲}-۲۵^\circ+۵۵^\circ\right)\times ۰/۰۵ = \sin ۶۰^\circ = ۰/۸۶۶\,N.m$$

۴۹-۲. اجزای بازویی در شکل نشان داده شده است. وزن ساعد $۵lb$ و مرکز جرم آن در G واقع می‌باشد. گشتاور ترکیبی حول مفصل آرنج O مربوط به وزن ساعد و کره را تعیین کنید. نیروی کشش در عضله‌ی دو سر چقدر باید باشد تا گشتاور کلی حول O صفر شود؟



حل:

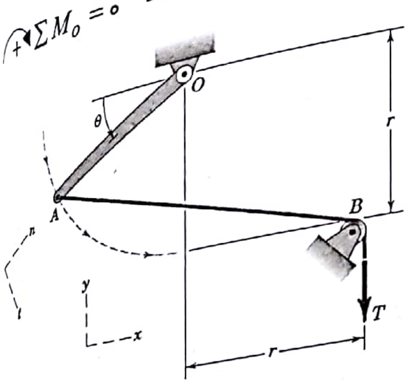


گشتاور ترکیبی وزن‌های $۵lb$ و $۸lb$ به صورت زیر می‌باشد:

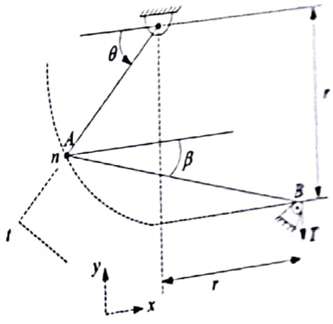
$$\circlearrowleft + M_O = ۵(۶\sin ۵۵^\circ)+۸(۱۳) = ۱۲۸/۶\,lb-in \quad (\text{ساعتگرد})$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = ۰ \Rightarrow -T(۲)+۱۲۸/۶=۰ \Rightarrow T=۶۴/۳\,lb$$

۵۰-۲. مکانیزم مسئله‌ی (۲-۱۶) در اینجا مجدداً آورده شده است. برای شرایط $\theta=۴۰^\circ$، $T=۱۵۰N$ و $r=۲۰۰mm$، گشتاور نیروی T وارده بر نقطه‌ی A توسط کابل AB حول O را تعیین کنید.



حل:



از جواب مسئله‌ی (۲-۱۶)،

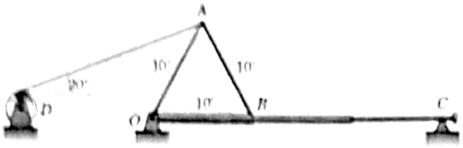
$$T_x=\frac{T(۱+\cos\theta)}{\sqrt{۳+۲\cos\theta-۲\sin\theta}} \quad , \quad T_y=\frac{T(\sin\theta-۱)}{\sqrt{۳+۲\cos\theta-۲\sin\theta}}$$

با جایگذاری مقادیر عددی،

$$T_x=\frac{۱۵۰(۱+\cos ۴۰^\circ)}{\sqrt{۳+۲\cos ۴۰^\circ-۲\sin ۴۰^\circ}}=۱۴۷/۰۲N \quad , \quad T_y=\frac{۱۵۰(\sin ۴۰^\circ-۱)}{\sqrt{۳+۲\cos ۴۰^\circ-۲\sin ۴۰^\circ}}=-۲۹/۷۴N$$

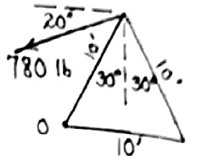
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = +(۱۴۷/۰۲)(۰/۲\sin ۴۰^\circ)+(۲۹/۷۴)(۰/۲\cos ۴۰^\circ)=۲۳/۵\,N.m$$

Scanned by CamScanner

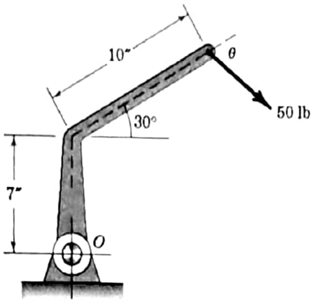


۲-۵۱. برای بالا بردن میله‌ی پرچم OC، قاب سبک OAB متصل به پرچم با استفاده از نیروی کشش $۷۸۰lb$ کابل بسته شده به قرقره‌ی محرک D بالا برده می‌شود. گشتاور M_o این نیروی کششی حول لولای O را محاسبه کنید.

حل:



$$+M_o = ۷۸۰\cos ۲۰^\circ (۱۰\cos ۳۰^\circ) \;:\; -۷۸۰\sin ۲۰^\circ (۵) = ۵۰۱۰lb-ft$$

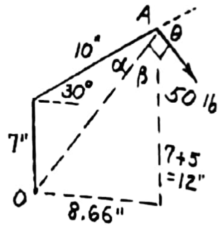


۲-۵۲. زاویه‌ی θ را به گونه‌ای تعیین کنید که گشتاور M_o نیروی $۵۰lb$ حول محور شفت در O حداکثر شود. همچنین M_o را محاسبه کنید.

حل:

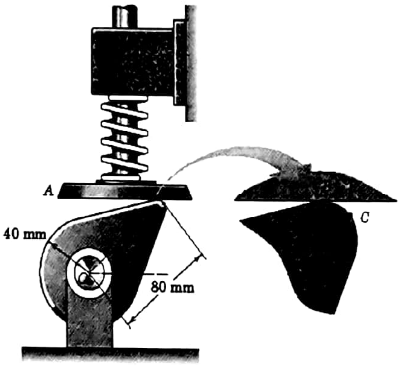
$$\overline{AO} = \sqrt{\overline{۱۲}^۲ + \overline{۸/۶۶}^۲} = ۱۴/۸۰\, in \;,\; \frac{۷}{\sin\alpha} = \frac{۱۴/۸۰}{\sin ۱۲۰^\circ}$$

$$\sin\alpha = \frac{۷}{۱۴/۸۰}(۰/۸۶۶) = ۰/۴۱ \Rightarrow \alpha = ۲۴/۱۸^\circ$$



$$\theta = ۱۸۰ - (۲۴/۱۸ + ۹۰) = ۶۵/۸^\circ$$

$$+M_o = ۵۰(۱۴/۸۰) = ۷۴۰lb-in$$ ساعتگرد



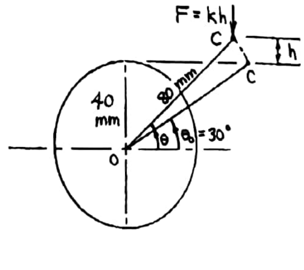
۲-۵۳. پیرو بارگذاری شده با فنر A به قسمت دایروی بادامک تکیه دارد تا اینکه برجستگی بادامک پیستون را بالا می‌برد. نیروی موردنیاز برای بالا بردن پیستون متناسب با جابه‌جایی عمودی h از پایین‌ترین موقعیت آن می‌باشد. برای اهداف طراحی، زاویه‌ی θ را به گونه‌ای تعیین کنید که گشتاور نیروی تماسی وارد بر بادامک حول یاتاقان O حداکثر شود. در نمای بزرگ شده، از فاصله‌ی کوچک بین نقطه‌ی تماس واقعی B و انتهای C برجستگی صرف‌نظر کنید.

حل:

$$M_o = F(۸۰\cos\theta) = kh(۸۰\cos\theta) = k(۸۰\sin\theta - ۴۰)(۸۰\cos\theta)$$

$$= ۳۲۰۰k(۲\sin\theta\cos\theta - \cos\theta) = ۳۲۰۰k(\sin ۲\theta - \cos\theta)$$

برای حداکثر شدن M_o، $\frac{dM_o}{d\theta} = ۰$:



$$۳۲۰۰k(۲\cos\theta + \sin\theta) = ۰ \;\Rightarrow\; ۲(۱ - ۲\sin^۲\theta) + \sin\theta = ۰$$

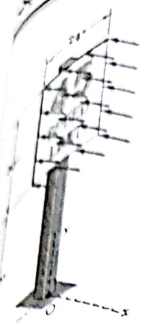
$$۴\sin^۲\theta - \sin\theta - ۲ = ۰$$

$$\sin\theta = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۳۲}}{۸} = \begin{cases} ۰/۸۴۳ \;\Rightarrow\; \theta = ۵۷/۵^\circ \\ -۰/۵۹۳ \;\Rightarrow\; \theta = -۳۶/۴^\circ \end{cases}$$

۲-۵۴. حاصل وزش بادی عمودی بر تابلوی راهنمای مستطیل شکل، ایجاد فشار یکنواخت $۳/۵lb/ft^۲$ در

Scanned by CamScanner

... گشتاور نیروی حاصله حول نقطه‌ی O را ... با استفاده از مشخصات نشان داده شده به صورت برداری ...

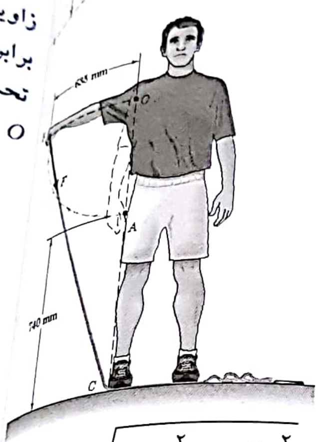


حل:

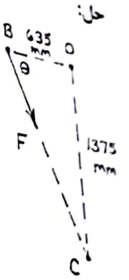
$$F = pA = ۲/۵\frac{(۳۰)(۲۲)}{۱۴۴} = ۱۷/۵\ lb$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \frac{۵۵}{۱۲}\mathbf{j}\times(-۱۷/۵\mathbf{i}) = ۸۰/۲\mathbf{k}\ lb-ft$$

۲-۵۵. ورزشکاری درحالتی که بازویش در حالت قائم OA قرار دارد و باند کششی بدون کشیدگی می‌باشد، شروع به نرمش می‌کند. وی سپس بازوی خود را تا موقعیت افقی OB می‌چرخاند. مدول الاستیک باند $k = ۶۰\ N/m$ می‌باشد، به عبارتی برای کشش باند به ازای هر متر اضافی، نیروی $۶۰\ N$ موردنیاز می‌باشد. گشتاور نیروی وارده از باند بر دست در B را تعیین کنید.



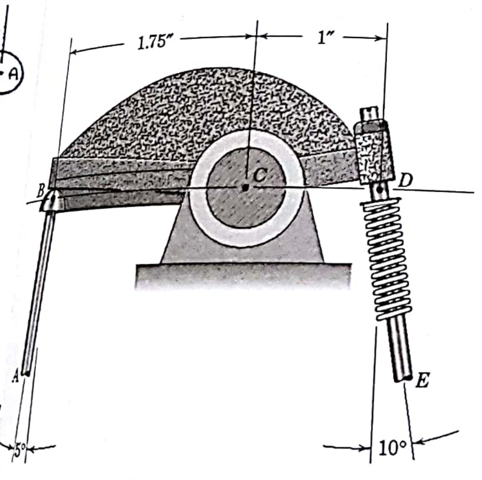
حل:



$$F = kx = ۶۰\left(\sqrt{۰/۶۳۵^۲ + ۱/۳۷۵^۲} - ۰/۷۴۰\right) = ۴۶/۵\ N$$

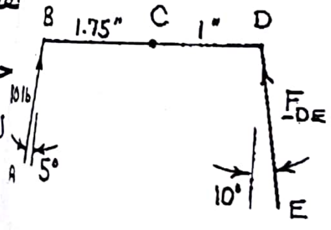
$$\theta = \tan^{-1}\frac{۱/۳۷۵}{۰/۶۳۵} = ۶۵/۲^\circ$$

$$\curvearrowleft + M_O = ۴۶/۵\sin ۶۵/۲^\circ(۰/۶۳۵) = ۲۶/۸\ N.m$$ (پادساعتگرد)



۲-۵۶. در موتور اتومبیلی، اسبک BD روی محور بدون چرخش در C سوار شده است. اگر مقدار طراحی نیروی وارده از طرف میل بادامک AB بر اسبک $۸۰\ lb$ باشد، نیروی اعمالی توسط میل سوپاپ DE در D چقدر باید باشد تا مجموع گشتاورها حول نقطه‌ی C صفر باشد. برآیند دو نیروی وارده بر اسبک را محاسبه کنید. یادآور می‌شود نقاط B، C و D روی یک خط افقی قرار دارند و نیروهای وارده از طرف میل بادامک و میل سوپاپ در امتداد محورهایشان می‌باشد.

حل:



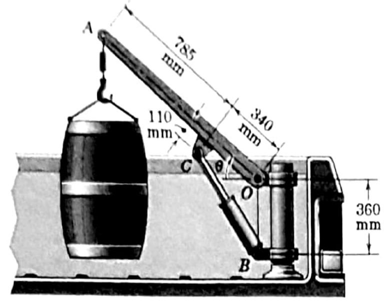
$$\curvearrowleft + \sum M_C = -(۸۰\cos ۵^\circ)(۱/۷۵) + (F_{DE}\cos ۱۰^\circ)(۱) = ۰ \Rightarrow F_{DE} = ۱۴۱/۶\ lb\ (\uparrow)$$

قانون کسینوس‌ها:

$$R^۲ = ۸۰^۲ + ۱۲۱/۶^۲ - ۲(۸۰)(۱۲۱/۶)\cos ۱۴۵^\circ \Rightarrow R = ۲۲۰ lb$$

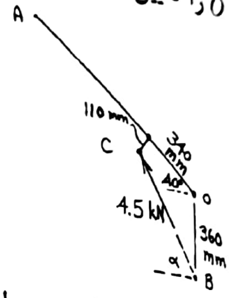
قانون سینوس‌ها:

$$\frac{\sin\alpha}{۱۲۱/۶} = \frac{\sin ۱۴۵^\circ}{۲۱۹/۹} \Rightarrow \alpha = ۹/۶۰^\circ \quad , \quad \theta = ۸۵^\circ + \alpha = ۹۴/۶^\circ$$



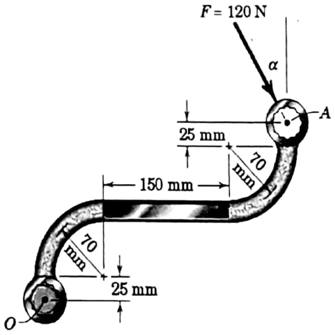
۲-۵۷ جرثقیل کوچکی روی دیواره‌ی جانبی یک وانت نصب شده است و برای بلند کردن بارهای سنگین به کار می‌رود. هنگامی که زاویه‌ی میله‌ی بالابر $\theta = ۴۰^\circ$ است، نیرو در استوانه‌ی هیدرولیکی BC برابر $۴/۵kN$ بوده و در نقطه‌ی C در جهت B به C می‌باشد (استوانه تحت فشار می‌باشد). گشتاور این نیروی $۴/۵kN$ حول نقطه‌ی لولای O را تعیین کنید.

حل:



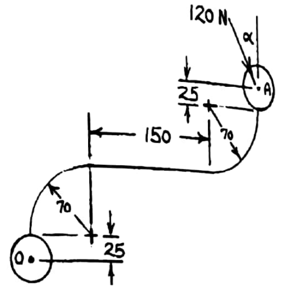
$$\alpha = \tan^{-۱}\left[\frac{۳۶۰ + ۳۴۰\sin ۴۰^\circ - ۱۱۰\sin ۵۰^\circ}{۳۴۰\cos ۴۰^\circ + ۱۱۰\cos ۵۰^\circ}\right] = ۵۶/۲^\circ$$

$$+ M_O = ۴/۵(۰/۳۶۰\cos ۵۶/۲^\circ) = ۰/۹۰۲ kN.m \quad \text{(ساعتگرد)}$$



۲-۵۸ نیروی $۱۲۰N$، مطابق شکل بر انتهای یک آچار خمیده اعمال شده است. اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد، گشتاور نیروی F حول مرکز پیچ O را محاسبه کنید. مقدار α را به گونه‌ای تعیین کنید که گشتاور حول O حداکثر شود؛ مقدار این گشتاور حداکثر را بیان کنید.

حل:



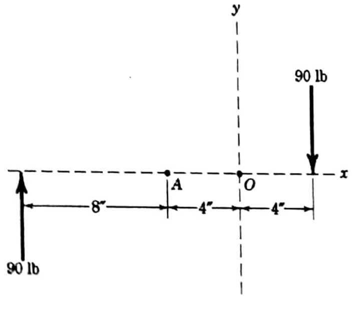
$$\alpha = ۳۰^\circ : + M_O = ۱۲۰\cos ۳۰^\circ[۷۰ + ۱۵۰ + ۷۰] + ۱۲۰\sin ۳۰^\circ[۲۵ + ۷۰ + ۷۰ + ۲۵]$$

$$= ۴۱۵۰۰ N.mm = ۴۱/۵ N.m \quad \text{(ساعتگرد)}$$

برای داشتن حداکثر M_O:

$$\alpha = \tan^{-۱}\left[\frac{۲۵ + ۷۰ + ۲۵ + ۷۰}{۷۰ + ۱۵۰ + ۷۰}\right] = ۳۳/۲^\circ$$

$$(M_O)_{max} = ۱۲۰\sqrt{(۲۵ + ۷۰ + ۲۵ + ۷۰)^۲ + (۷۰ + ۱۵۰ + ۷۰)^۲} = ۴۱۶۰۰ N.mm = ۴۱/۶ N.m \quad \text{(ساعتگرد)}$$



۲-۵۹ گشتاور ترکیبی دو نیروی $۹۰lb$ را حول: (الف) نقطه‌ی O و (ب) نقطه‌ی A محاسبه کنید.

حل:

الف)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (۴\mathbf{i} \times -۹۰\mathbf{j}) + (-۱۲\mathbf{i} \times ۹۰\mathbf{j}) = -۳۶۰ - ۱۰۸۰ = -۱۴۴۰ lb-in$$

Scanned by CamScanner

$M = 1220\, lb-in$ ساعتگرد

$M = Fd = 90 \times 8 = 720\, lb-in$ ساعتگرد

[illegible] سیستم گشتاور- نیرو در:

[illegible] وارد شده در نقطه‌ی A را با یک سیستم [illegible] (الف) نقطه‌ی O (ب) نقطه‌ی B جایگزین کنید.

حل:

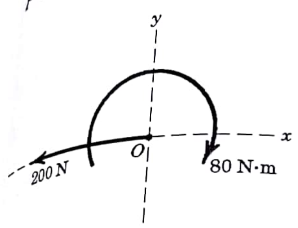
الف) جایگزین در نقطه‌ی O:

$F = 12kN\ (\angle 30^\circ)$, $M_o = (12kN \sin 30^\circ)(4) = 24\, kN.m$ (ساعتگرد)

ب) جایگزین در نقطه‌ی B:

$F = 12kN\ (\angle 30^\circ)$, $M_o = (12kN)(\sqrt{5^2 + 4^2}) \approx 76\, kN.m$ (ساعتگرد)

۲-۶۱. سیستم گشتاور- نیرو در نقطه‌ی O را با یک نیرو جایگزین کنید. مختصات y_A نقطه‌ی روی محور yها که خط اثر نیروی برآیند از آن عبور می‌کند، را تعیین کنید.

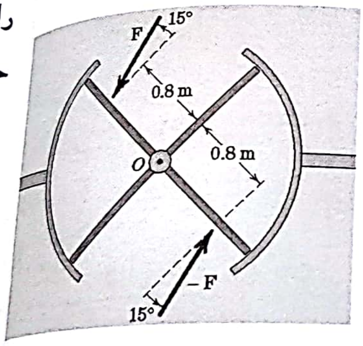


حل:

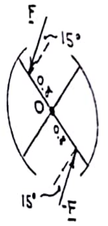
$M = Fr \quad : \quad 80 = 200r \Rightarrow r = 0/4\, m$

بنابراین $y_A = -0/4\, m$ می‌باشد.

۲-۶۲. نمای بالایی در ورودی چرخانی نشان داده شده است. دو فرد به صورت همزمان به در نزدیک شده و نیرویی با اندازه‌ی مساوی مطابق شکل به آن وارد می‌کنند. اگر گشتاور حاصله حول محور لولای در واقع در O برابر $25\, N.m$ باشد، اندازه‌ی نیروی F را تعیین کنید.

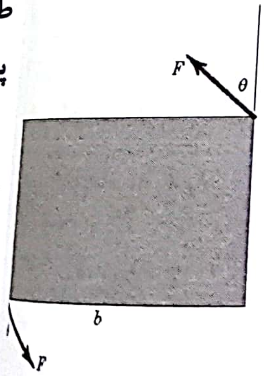


حل:



$\circlearrowright{+} M_o = \sum Fd \quad : \quad 25 = 2F(\cos 15^\circ)(0/8) \Rightarrow F = 16/18\, N$

۲-۶۳. گشتاور مربوط به زوج نیروی وارده بر صفحه‌ی مستطیلی را تعیین کنید. نتایج را برای حالات خاص $\theta = 0$، $b = 0$ و $h = 0$ به دست آورید.



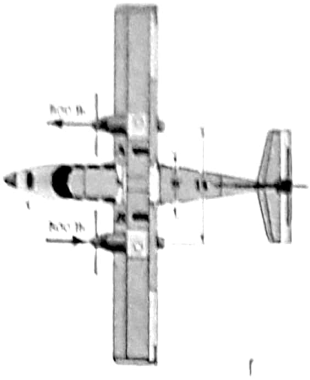
حل:

$M = (F \sin\theta)h + (F\cos\theta)b$ (پادساعتگرد)

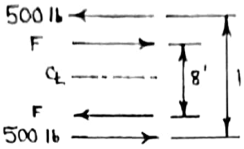
$\theta = 0 \quad : \circlearrowleft{+}\ M = Fb$, $b = 0 \ : \circlearrowleft{+}\ M = Fh\sin\theta$

$h = 0 \quad : \circlearrowleft{+}\ M = Fb\cos\theta$

Scanned by CamScanner

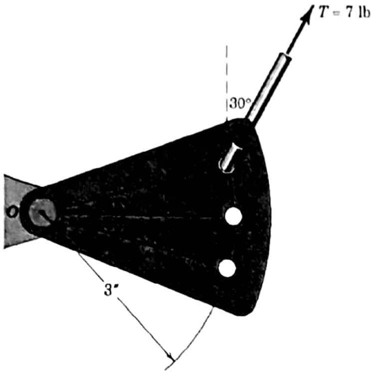


۲-۶۴. در بخشی از یک آزمایش، دو موتور هواپیمایی سرعت داده شده و زاویه‌ی پروانه‌ها به گونه‌ای تنظیم می‌شود که نیروهای پیشرانش و پسرانش مطابق شکل باشند. چه مقدار نیروی F از طرف زمین بر هر یک از چرخ‌های ترمز گرفته شده در A و B باید وارد شود تا در مقابل اثر چرخشی رانش دو پروانه ایستادگی کند؟ از هر گونه اثر چرخ دماغه در C که ۱۰° چرخانده شده و ترمز گرفته شده است، صرف‌نظر کنید.



حل:

$$\curvearrowright + \sum M = ۵۰۰(۱۴) - F(۸) = ۰ \Rightarrow F = ۸۷۵ lb$$



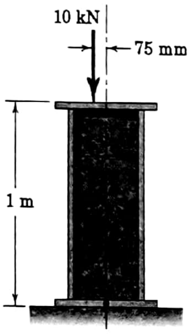
۲-۶۵. نیرویی $۷lb$ توسط یک میله‌ی کنترل بر قطاع وارد شده است، مطابق شکل. سیستم گشتاور- نیروی معادل در O را تعیین کنید.

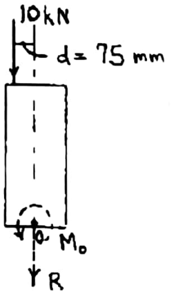
حل:

$$\curvearrowright + M = (۷\cos ۳۰°)\left(\frac{۳}{۱۲}\cos ۱۵°\right) - (۷\sin ۳۰°)\left(\frac{۳}{۱۲}\sin ۱۵°\right)$$

$$= ۱/۲۴ lb - ft = ۱۴/۸۵ lb - in \quad (\text{پادساعتگرد})$$

$$R = ۷ lb$$

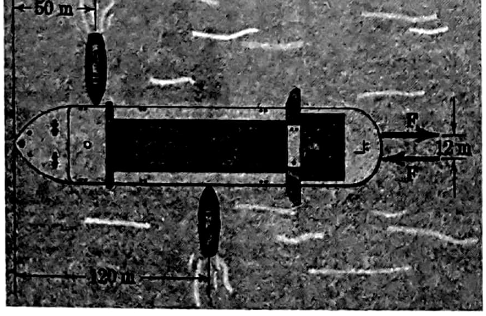




۲-۶۶. نیروی $۱۰kN$ وارده بر ستون فولادی را با سیستم گشتاور- نیروی معادلی در نقطه‌ی O جایگزین کنید. این جایگزینی معمولاً در طراحی سازه‌ها رایج می‌باشد.

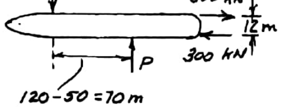
حل:

$$\begin{cases} R = ۱۰ kN (\downarrow) \\ M_o = Fd = (۱۰)(۰/۰۷۵) = ۰/۷۵ kN.m \ (\curvearrowright) \end{cases}$$



۲-۶۷. هر یک از زوج پروانه‌های یک کشتی، نیروی پیشران دور کامل $۳۰۰kN$ تولید می‌کنند. در یک مانور کشتی، یک پروانه با سرعت کامل رو به جلو و یک پروانه با سرعت کامل رو به عقب چرخانده می‌شود. نیروی رانش P وارده از طرف هر قایق یدک‌کش چقدر باشد تا کشتی در مقابل اثر پروانه‌های کشتی مقاومت کند.

حل:

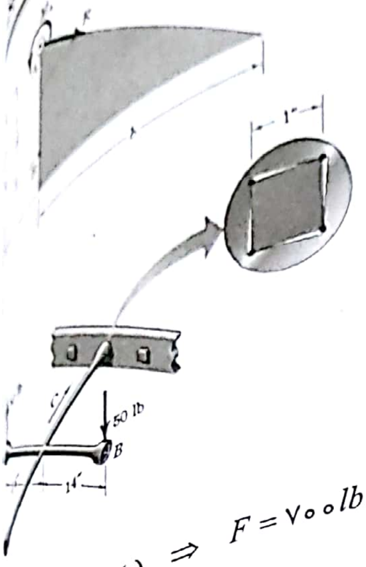


$$۷۰P = ۳۰۰(۱۲) \Rightarrow P = ۵۱/۴ kN$$

۲-۶۸. سیستم گشتاور- نیرو در A باید با یک نیروی معادل در نقطه‌ی B واقع روی لبه‌ی عمودی (یا امتداد آن) صفحه‌ی مثلثی شکل جایگزین شود. فاصله‌ی d بین A و B را تعیین کنید.

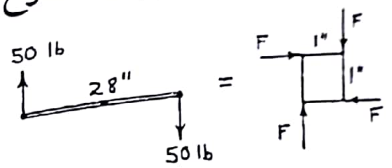
(بازوی نقطه‌ی A)

$$M_A = R\left(\frac{b}{\sqrt{h^2+b^2}}\right)d \Rightarrow d = \frac{M_A}{R}\cdot\frac{\sqrt{h^2+b^2}}{b}$$



۶۹-۲. آچاری صلیبی برای محکم کردن یک پیچ با سره‌ی مربعی شکل استفاده شده است. اگر نیروهای $۵۰lb$، مطابق شکل، به آچار وارد شوند، اندازه F نیروهای مساوی وارد بر چهار نقطه‌ی تماس بر سر پیچ 1in را تعیین کنید به صورتی که اثر خارجی آنها معادل دو نیروی $۵۰lb$ باشد. فرض کنید نیروهای وارده بر پیچ بر سطوح سره‌ی پیچ عمود باشند.

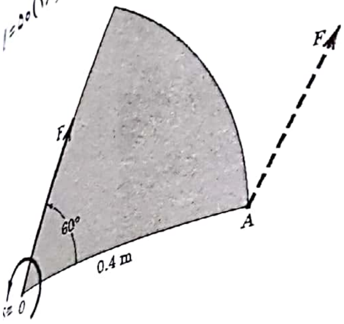
حل:



$$...=۵۰(۲۸)=۲F(۱) \Rightarrow F=۷۰۰lb$$

۷۰-۲. یک سیستم گشتاور- نیرو در نقطه‌ی O بر قطاعی °۶۰ وارد می‌شود. اندازه‌ی نیروی **F** را تعیین کنید اگر بتوان سیستم داده شده را با یک نیروی تنها در گوشه‌ی A قطاع جایگزین نمود.

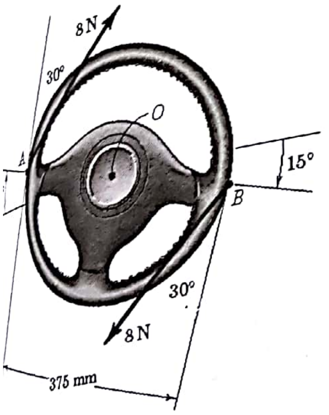
حل:

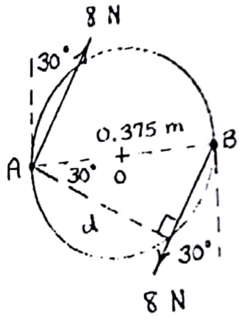


$$M=۸۰=(F\sin ۶۰^\circ)(۰/۴) \Rightarrow F=\frac{۸۰}{۰/۴\sin ۶۰^\circ}=۲۳۱N$$

۷۱-۲. در حین یک چرخش به راست ثابت فرد نیروهایی مطابق شکل به فرمان وارد می‌کند. توجه داشته باشید که نیرو شامل یک مؤلفه‌ی مماسی و یک مؤلفه‌ی شعاعی رو به داخل می‌باشد. گشتاور وارده حول ستون فرمان در O را تعیین کنید.

حل:

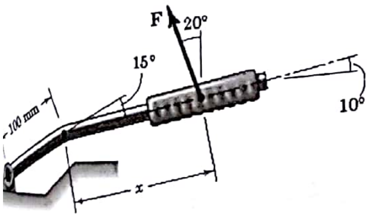




$$M=Fd=۸(۰/۳۷۵\cos ۳۰^\circ)=۲/۶۰\,N.m$$ (ساعتگرد)

۷۲-۲. نیروی **F** به اندازه‌ی $۵۰N$ بر ترمزدستی اتومبیلی در موقعیت $x=۲۵۰mm$ اعمال شده است. این نیرو را با یک سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی لولای O جایگزین کنید.

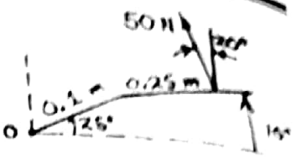
حل:



$$\Sigma M_o=۵۰\cos ۲۰^\circ[۰/۱\cos ۲۵^\circ+۰/۲۵\cos ۱۰^\circ]+۵۰\sin ۲۰^\circ[۰/۱\sin ۲۵^\circ+۰/۲۵\sin ۱۰^\circ]=۱۷/۲۹\,N.m$$

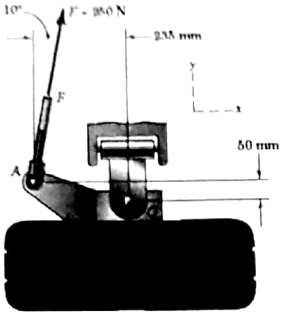
Scanned by CamScanner

سیستم گشتاور– نیرو در نقطه‌ی O به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases} R = ۵۰\,N & \nwarrow ۱۱۰^\circ \\ M_O = ۱۷/۲۹\,N.m \end{cases}$$

۲-۷۳. اکسل AB نیروی $۲۵۰\,N$ را بر راهنمای بندانگشتی AO وارد می‌کند، مطابق شکل. این نیرو را با یک سیستم گشتاور– نیرو در O جایگزین کنید.

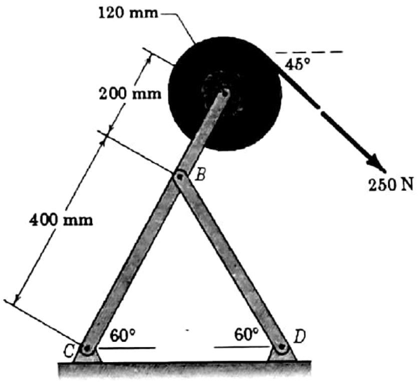


حل:

$$\mathbf{F} = ۲۵۰(\sin ۱۰^\circ\,\mathbf{i} + \cos ۱۰^\circ\,\mathbf{j}) = ۴۳/۴\,\mathbf{i} + ۲۴۶\,\mathbf{j} \quad N$$

$$\curvearrowleft\!+\; M_O = ۲۵۰[\cos ۱۰^\circ(۰/۲۳۵) + \sin ۱۰^\circ(۰/۰۵۰)] = ۶۰/۰\,N.m \quad \text{(ساعتگرد)}$$

۲-۷۴. نیروی کشش $۲۵۰\,N$ بر طنابی که به صورت محکم حول محیط دیسکی پیچیده شده است، وارد می‌شود. سیستم گشتاور– نیروی معادل در نقطه‌ی C را تعیین کنید. با یافتن سیستم گشتاور– نیروی معادل در A شروع کنید.



حل:

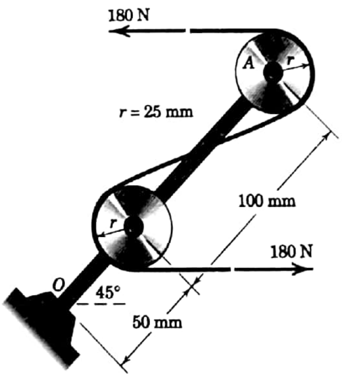
ابتدا سیستم گشتاور– نیروی معادل در A:

$$\begin{cases} T = ۲۵۰\,N & \searrow ۴۵^\circ \\ M_A = (۲۵۰)(۰/۱۲) = ۳۰\,N.m & \curvearrowright \end{cases}$$

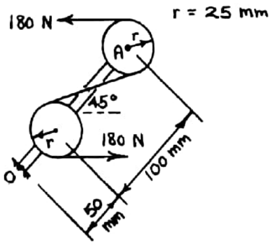
حال سیستم گشتاور– نیروی معادل در C:

$$\begin{cases} T = ۲۵۰\,N & \searrow ۴۵^\circ \\ M_C = (۲۵۰\cos ۱۵^\circ)(۰/۶) + ۳۰ = ۱۷۴/۹\,N.m & \text{(ساعتگرد)} \end{cases}$$

۲-۷۵. سیستمی متشکل از میله‌ی OA، دو قرقره‌ی یکسان و قسمتی از یک نوار نازک تحت دو نیروی کششی $۱۸۰N$، مطابق شکل، قرار گرفته است. سیستم گشتاور– نیروی معادل در نقطه‌ی O را تعیین کنید.



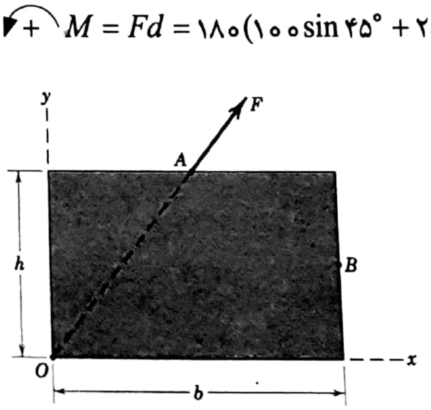
حل:



سیستم معادل در نقطه‌ی O، یک گشتاور می‌باشد.

$$\curvearrowleft\!+\; M = Fd = ۱۸۰(۱۰۰\sin ۴۵^\circ + ۲۵ + ۲۵) = ۲۱۷۰۰\,N.mm = ۲۱/۷\,N.m \quad \text{(پادساعتگرد)}$$

۲-۷۶. نقاط A و B، نقاط میانی اضلاع مستطیل می‌باشند. نیروی داده شده $\mathbf{F}$ وارده در A را با یک سیستم گشتاور– نیرو در B جایگزین کنید.



حل:

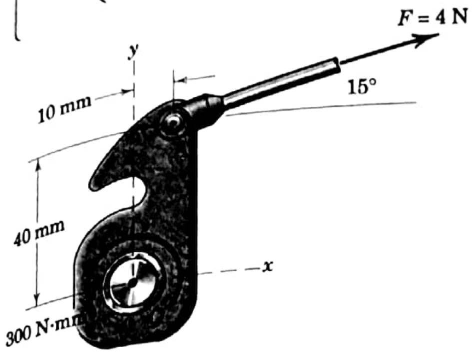
$$\mathbf{F} = F\left(\frac{\frac{b}{۲}}{\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ + h^۲}}\mathbf{i} + \frac{h}{\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ + h^۲}}\mathbf{j}\right) = F\left(\frac{\frac{b}{۲}\mathbf{i} + h\mathbf{j}}{\sqrt{\frac{b^۲}{۴} + h^۲}}\right)$$

Scanned by CamScanner

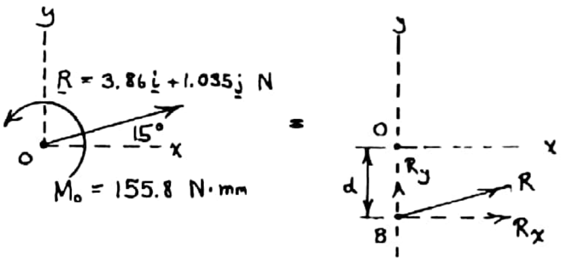
بنابراین سیستم گشتاور- نیروی معادل در B به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} F = F \\ M = -\left(\dfrac{\frac{b}{۲}F}{\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ + h^۲}}\right)\left(\dfrac{h}{۲}\right) + \left(\dfrac{hF}{\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ + h^۲}}\right) b = \dfrac{۲bhF}{۴\sqrt{\frac{b^۲}{۴} + h^۲}} \quad \text{(پادساعتگرد)} \end{cases}$$

۲-۷۷. دستگاه نشان داده شده، بخشی از مکانیزم آزادسازی پشتی صندلی اتومبیل می‌باشد. به این قسمت در A نیروی $۴N$ وارد شده و گشتاور بازگرداننده $۳۰۰ N.mm$ توسط یک فنر پیچشی پنهان بر آن وارد می‌شود. مؤلفه‌ی y خط اثر نیروی معادل مجموعه‌ی گشتاور- نیرو را تعیین کنید.



حل:



در نقطه‌ی O:

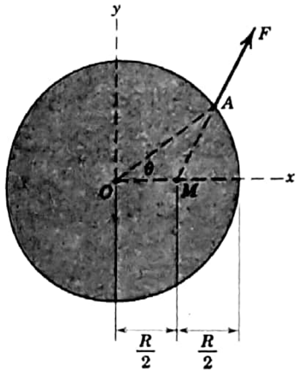
$$\mathbf{R} = ۴(\cos ۱۵^\circ \mathbf{i} + \sin ۱۵^\circ \mathbf{j}) = ۳/۸۶\mathbf{i} + ۱/۰۳۵\mathbf{j} \quad N$$

$$\curvearrowleft + \; M_o = ۳۰۰ - ۴\cos ۱۵^\circ (۴۰) + ۴\sin ۱۵^\circ (۱۰) = ۱۵۵/۸ \; N.mm \quad \text{(پادساعتگرد)}$$

شرط معادل بودن دو مجموعه، $R_x d = M_o$. بنابراین

$$۳/۸۶ d = ۱۵۵/۸ \quad , \quad d = ۴۰/۳ mm \quad \Rightarrow \quad y = -۴۰/۳ mm$$

۲-۷۸. نیروی F در امتداد خط MA عمل می‌کند، که در آن M نقطه‌ی میانی شعاع در امتداد محور x می‌باشد. سیستم گشتاور- نیروی معادل در O را تعیین کنید اگر $\theta = ۴۰^\circ$ باشد.



حل:

با به کارگیری قانون کسینوس‌ها در مثلث OMA،

$$\overline{MA}^۲ = \overline{OA}^۲ + \overline{OM}^۲ - ۲\overline{OA}\cdot\overline{OM}\cdot\cos\theta = R^۲ + \frac{R^۲}{۴} - R^۲\cos\theta = R^۲\left(\frac{۵}{۴} - \cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \overline{MA} = R\sqrt{\frac{۵}{۴} - \cos\theta} \quad , \quad \theta = ۴۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \overline{MA} = \sqrt{\frac{۵}{۴} - \cos ۴۰^\circ} = ۰/۶۹۶R$$

با به کارگیری قانون سینوس‌ها در مثلث OMA،

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\angle OMA} = \frac{\overline{MA}}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \angle OMA = \sin^{-۱}\left\{\frac{\overline{OM}\sin\theta}{\overline{MA}}\right\} = \sin^{-۱}\left\{\frac{\frac{R}{۲}\sin ۴۰^\circ}{۰/۶۹۶R}\right\} = ۲۷/۵^\circ$$

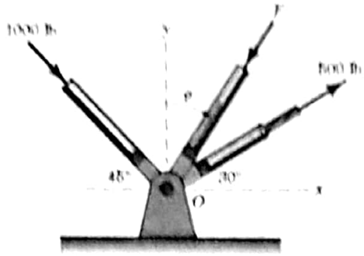
$$\mathbf{F} = F\{\cos(\theta + ۲۷/۵^\circ)\mathbf{i} + \sin(\theta + ۲۷/۵^\circ)\mathbf{j}\}$$

$$\mathbf{F} = F\{\cos ۶۷/۵^\circ \mathbf{i} + \sin ۶۷/۵^\circ \mathbf{j}\} = (۰/۳۸۳\mathbf{i} + ۰/۹۲۴\mathbf{j})F$$

بنابراین سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} R = F \quad \angle ۶۷/۵^\circ \\ M_o = -(۰/۳۸۳F)(R\sin ۴۰^\circ) + (۰/۹۲۴F)(R\cos ۴۰^\circ) = ۰/۴۶۲FR \quad \text{(پادساعتگرد)} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner



۷۹-۲ دو میله و یک کابل به تکیه‌گاهی در O متصل شده‌اند. اگر دو نیرو مطابق شکل داده شده باشند، اندازه‌ی F و جهت θ نیروی سوم را به گونه‌ای تعیین کنید که برآیند سه نیرو، در راستای قائم به سمت پایین با اندازه‌ی $۱۲۰۰\,lb$ باشد.

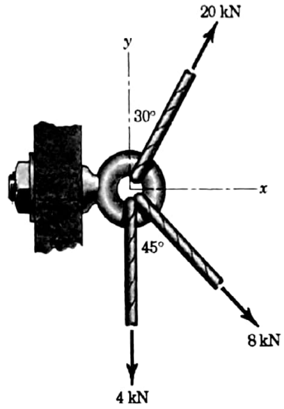
حل:

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۵۰۰\cos ۳۰^\circ + ۱۰۰۰\cos ۴۵^\circ - F\sin\theta = ۰ \;\Rightarrow\; F\sin\theta = ۱۱۴۰/۱۲\,lb$$

$$\sum F_y = -۱۲۰۰\,lb = ۵۰۰\sin ۳۰^\circ - ۱۰۰۰\sin ۴۵^\circ - F\cos\theta \;\Rightarrow\; F\cos\theta = ۷۴۲/۸۹\,lb$$

بنابراین

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۱۱۴۰/۱۲}{۷۴۲/۸۹} \;\Rightarrow\; \theta = ۵۶/۹۲^\circ \quad , \quad F = ۱۳۶۱\,lb$$

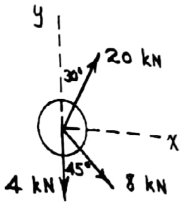


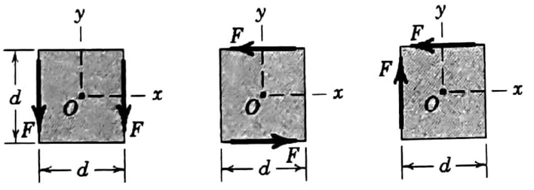
۸۰-۲ نیروی برآیند R سه نیروی کششی وارده بر پیچ سر سوراخ را تعیین کنید. اندازه‌ی R و زاویه‌ی θ_x که R با جهت مثبت محور x می‌سازد، را بیابید.

حل:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum F_x = ۲۰\sin ۳۰^\circ + ۸\sin ۴۵^\circ = ۱۵/۶۶\,kN \\ R_y &= \sum F_y = ۲۰\cos ۳۰^\circ - ۸\cos ۴۵^\circ - ۴ = ۷/۶۶\,kN \end{aligned}\right\} \quad R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} = ۱۷/۴۳\,kN$$

$$\theta_x = \tan^{-۱}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = ۲۶/۱^\circ$$





(a) (b) (c)

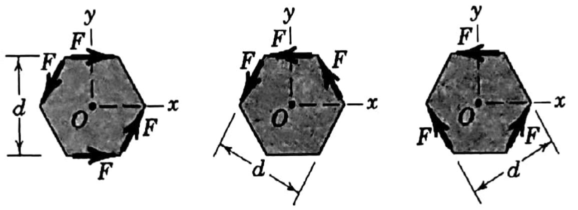
۸۱-۲ سیستم گشتاور- نیروی معادل در مرکز O را برای هر یک از سه مورد نیروهای اعمال شده در راستای لبه‌های یک صفحه‌ی مربعی به ضلع d تعیین کنید.

حل:

الف) $\mathbf{R} = -۲F\,\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{M}_o = ۰$

ب) $\mathbf{R} = ۰ \quad , \quad \mathbf{M}_o = Fd\,\mathbf{k}$ (جهت $+k$ به سمت بیرون)

ج) $\mathbf{R} = -F\,\mathbf{i} + F\,\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{M}_o = ۰$

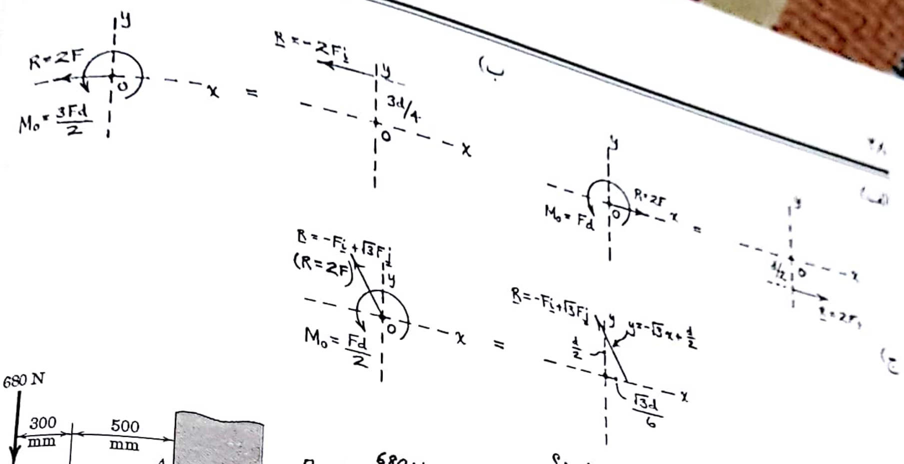


(a) (b) (c)

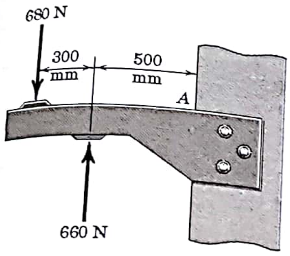
۸۲-۲ سیستم گشتاور- نیروی معادل در مرکز O را برای هر یک از سه مورد نیروهای اعمال شده در امتداد لبه‌های یک شش ضلعی منتظم با ضلع d تعیین کنید. اگر می‌توان نتیجه را بیشتر خلاصه نمود، سیستم گشتاور- نیرو را با یک نیروی تنها جایگزین کنید.

حل:

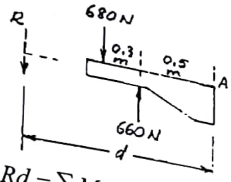
Scanned by CamScanner



۲-۸۳ نیروی برآیند دو نیرو بر کجا وارد می‌شود؟



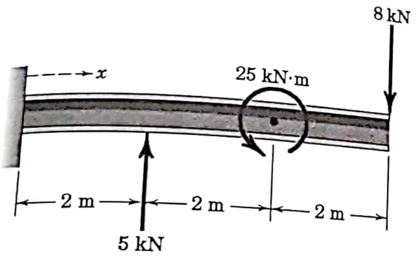
حل:



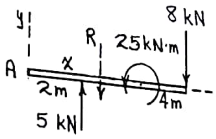
$$R=\sum F=۶۸۰-۶۶۰=۲۰N$$

$$Rd=\sum M_A \;:۲۰d=۶۸۰(۰/۸)-۶۶۰(۰/۵) \;\Rightarrow\; d=۱۰/۷۰m$$ در سمت چپ A

۲-۸۴ نیروی برآیند R دو نیرو و گشتاور وارده بر تیر I شکل را تعین و موقعیت آن را بیابید.



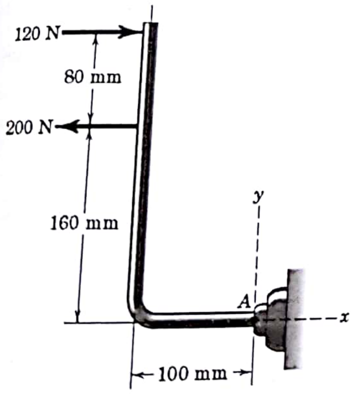
حل:



$$R=\sum F_y=۵-۸=-۳kN$$

$$|R|x=M_A \quad : \quad ۳x=-۵(۲)-۲۵+(۸)(۶) \;\Rightarrow\; x=۴/۳۳m$$

۲-۸۵ دو نیروی وارده بر لوله‌ی خمیده را با نیروی معادل تنهای R جایگزین کنید. فاصله‌ی y از نقطه‌ی A تا خط اثر R را مشخص کنید.



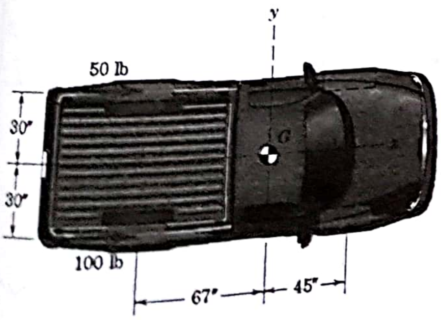
حل:

$$\mathbf{R}=-۲۰۰\mathbf{i}+۱۲۰\mathbf{i}=-۸۰\mathbf{i}\;\; N$$

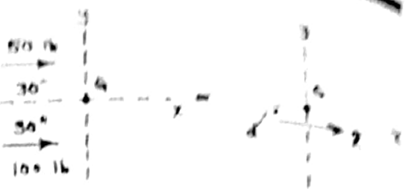
$$\sum M_A=۰ \;:-۱۲۰(۲۴۰)+۲۰۰(۱۶۰)+۸۰(y)=۰\Rightarrow y=-۴۰mm$$

بنابراین فاصله‌ی خط اثر نیروی معادل از A برابر $۴۰mm$ می‌باشد.

۲-۸۶ تحت شرایط جاده‌ی غیرمسطح و لغزنده، دو نیروی نشان داده شده به چرخ‌های عقب وانتی که مجهز به دیفرانسیل عقب لغزش محدود می‌باشد، وارد می‌شوند. محل تقاطع نیروی برآیند سیستم با محور y را تعیین کنید.



حل:

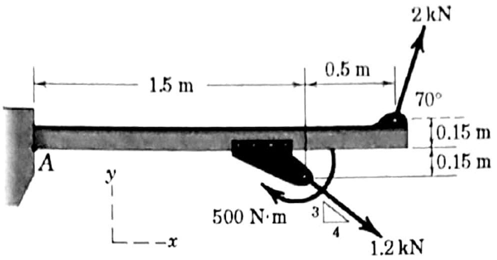


$\xrightarrow{+} R = \sum F = ۵۰ + ۱۰۰ = ۱۵۰ lb$ (به سمت راست)

$\curvearrowright + \sum M_G = ۱۰۰(۲۰) - ۵۰(۲۰) = ۱۵۰۰ lb - ft$ (ساعتگرد)

$\sum M_G = Rd = ۱۵۰d \Rightarrow d = ۱۰ in$

بنابراین محل تقاطع نیروی برآیند با محور yها در $y = -۱۰ in$ می‌باشد. در اثر این نیرو، وانت به سمت جلو حرکت کرده و به صورت پادساعتگرد حول G دوران می‌کند.



۲-۸۷ تیر فولادی یک سرگیرداری با قلابی پرچ شده به آن تحت تأثیر گشتاور و دو نیرو قرار گرفته است، مطابق شکل. اثر این گشتاور و نیروها باید در طراحی اتصال در A مدنظر قرار گیرد. این دو نیرو و گشتاور را با یک گشتاور M و نیروی برآیند $\mathbf{R}$ در A جایگزین کنید.

حل:

$$R_x = \sum F_x = ۲\cos ۷۰° + ۱/۲\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۱/۶۴۴\, kN$$

$$R_y = \sum F_y = ۲\sin ۷۰° - ۱/۲\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۱/۱۵۹\, kN$$

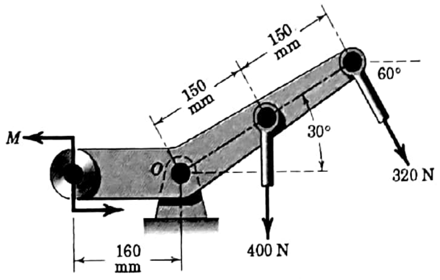
$$\curvearrowleft + M_A = -۲\cos ۷۰°(۰/۱۵) + ۲\sin ۷۰°(۱/۵ + ۰/۵) + ۱/۲\left(\frac{۴}{۵}\right)(۰/۱۵) - ۱/۲\left(\frac{۳}{۵}\right)(۱/۵) - ۰/۵$$

$$= ۲/۲۲ kN.m \quad \text{(پادساعتگرد)}$$

بنابراین سیستم گشتاور- نیرو در A به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = ۱/۶۴۴\mathbf{i} + ۱/۱۵۹\mathbf{j}\ kN \\ M_A = ۲/۲۲\ kN.m \quad \text{(پادساعتگرد)} \end{cases}$$

۲-۸۸ اگر نیروی برآیند دو نیرو و گشتاور M از نقطه‌ی O عبور کند، M را تعیین کنید.

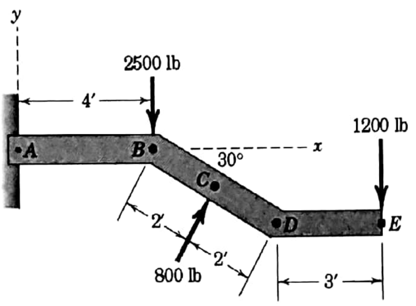


حل:

$$M_o = ۰ \Rightarrow N - ۴۰۰(۰/۱۵\cos ۳۰°) - ۳۲۰(۰/۳۰۰) = ۰$$

$$M = ۱۴۸/۰ N.m \quad \text{(پادساعتگرد)}$$

۲-۸۹ سه نیروی وارده بر میله‌ی خمیده را با یک سیستم گشتاور- نیرو در نقطه‌ی تکیه‌گاه A جایگزین کنید. محل تقاطع خط اثر نیروی برآیند $\mathbf{R}$ با محور x را تعیین کنید.



حل:

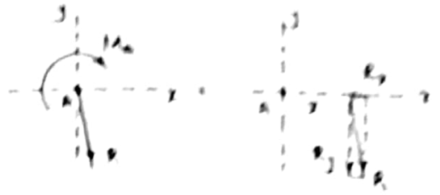
سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی A به صورت زیر می‌باشد

$$\mathbf{R} = -۲۵۰۰\mathbf{j} - ۱۲۰۰\mathbf{j} + ۸۰۰(\sin ۳۰°\,\mathbf{i} + \cos ۳۰°\,\mathbf{j}) = ۴۰۰\,\mathbf{i} - ۳۰۱۰\mathbf{j}\ lb$$

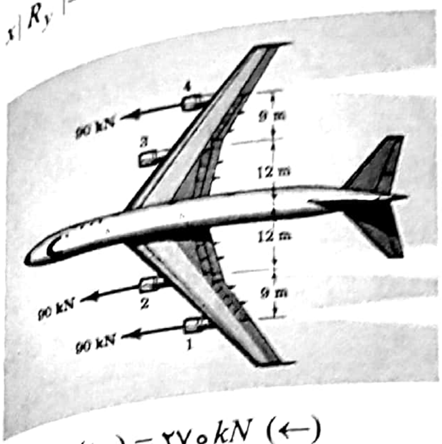
$$\curvearrowright + M_A = ۲۵۰۰(۴) + ۱۲۰۰(۴ + ۴\cos ۳۰° + ۳) - ۸۰۰\sin ۳۰°(۲\sin ۳۰°) - ۸۰۰\cos ۳۰°(۴ + ۲\cos ۳۰°)$$

$$= ۱۸۱۹۰ lb - ft \quad \text{(ساعتگرد)}$$

Scanned by CamScanner



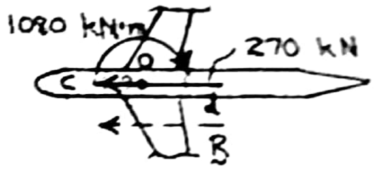
$x|R_y| = M_A \Rightarrow x = \frac{۱۸۱۹۰}{۳۰۱۰} = ۶٫۰۵\, ft$



۹۰-۲. یک هواپیمای مسافربری با چهار موتور جت، هر یک با تولید نیروی پیشرانش ۹۰kN، دارای حرکت پایدار می‌باشد تا اینکه موتور شماره ۳ به صورت ناگهانی از کار می‌افتد. برآیند سه بردار نیروی پیشرانش موتورهای باقیمانده را تعیین کرده و موقعیت آن را بیابید. مسئله را به صورت دوبعدی درنظر بگیرید.

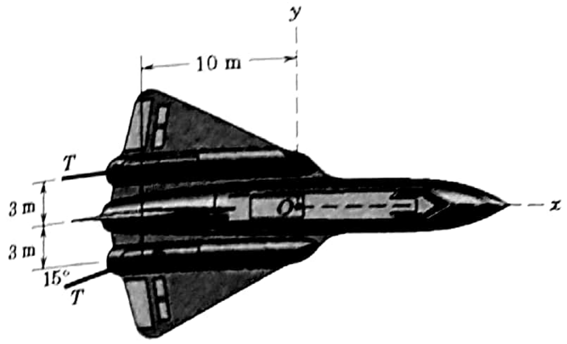
حل:

سیستم گشتاور- نیرو در نقطه‌ی O به صورت زیر می‌باشد

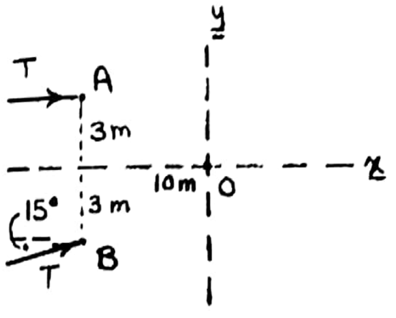


$$\begin{cases} R = ۳(۹۰) = ۲۷۰\, kN\ (\leftarrow) \\ \curvearrowleft + M_O = ۱۲(۹۰) = ۱۰۸۰\, kN.m \end{cases}$$

$$d = \frac{M_O}{R} = \frac{۱۰۸۰}{۲۷۰} = ۴\, m$$



۹۱-۲. جهت دو بردار نیروی پیشرانش یک هواپیمای جت آزمایشی را می‌توان به صورت مستقل از جهت رایج رو به جلو تا محدوده‌ای تغییر داد. برای آرایش نیروهای پیشرانش نشان داده شده، سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O را تعیین کنید. سپس این سیستم گشتاور- نیرو را با یک نیروی تنها جایگزین کرده و محل تقاطع خط اثر این نیروی برآیند با محور xها را مشخص نمایید. این نتایج برای ارزیابی کارآیی طراحی حیاتی می‌باشند.

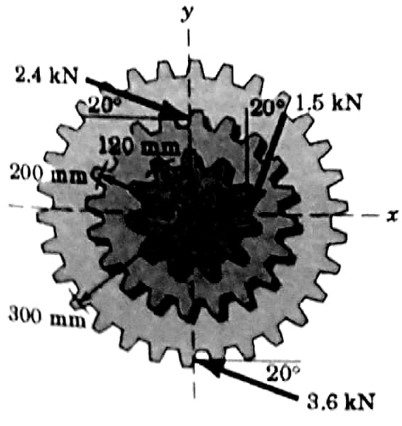


حل:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = T\,\mathbf{i} + T(\cos ۱۵^\circ\, \mathbf{i} + \sin ۱۵^\circ\, \mathbf{j}) = ۱٫۹۶۶T\,\mathbf{i} + ۰٫۲۵۹T\,\mathbf{j}$$

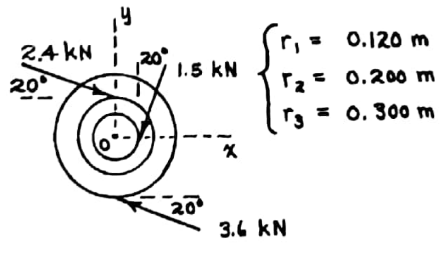
$$\curvearrowleft + M_O = ۳T - T\cos ۱۵^\circ(۳) + T\sin ۱۵^\circ(۱۰) = ۲٫۶۹T$$

$$-R_y x = M_O \ :\ -۰٫۲۵۹T(x) = ۲٫۶۹T \Rightarrow x = -۱۰٫۳۹m$$



۹۲-۲. محل تقاطع خط اثر نیروی برآیند مربوط به سه نیروی وارده بر چرخدنده‌ها با محورهای x و y را تعیین کنید.

حل:



Scanned by CamScanner

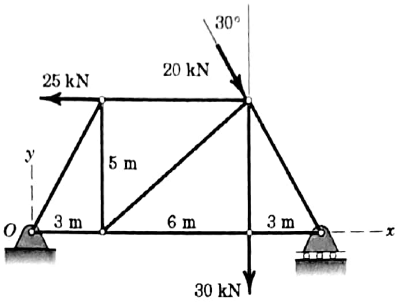
$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=۲/۲(\cos ۲۰^\circ\mathbf{i}-\sin ۲۰^\circ\mathbf{j})+۱/۵(-\sin ۲۰^\circ\mathbf{i}-\cos ۲۰^\circ\mathbf{j})+۲/۶(-\cos ۲۰^\circ\mathbf{i}+\sin ۲۰^\circ\mathbf{j})$$
$$=-۱/۶۲۱\mathbf{i}-۰/۹۹۹\mathbf{j}\ kN$$

$$\circlearrowleft+\ M_o=\{۲/۲(۰/۲)+۱/۵(۰/۱۲)+۲/۶(۰/۲)\}\cos ۲۰^\circ=۱/۶۲۵\,kN.m$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_o\ :\ (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(-۱/۶۲۱\mathbf{i}-۰/۹۹۹\mathbf{j})=-۱/۶۲۵\ \Rightarrow\ -۰/۹۹۹x+۱/۶۲۱y=-۱/۶۲۵$$

بنابراین محل تقاطع با محورهای x و y به صورت به دست می‌آید

$x=۱/۶۲۷\,m \quad , \quad y=-۰/۹۹۷\,m$



۲-۹۳. نیروی برآیند R سه نیروی وارده بر خرپای ساده را تعیین کنید. نقاطی روی محورهای x و y که R از آنها می‌گذرد، را مشخص کنید.

حل:

سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=(-۲۵+۲۰\sin ۳۰^\circ)\mathbf{i}+(-۳۰-۲۰\cos ۳۰^\circ)\mathbf{j}$$
$$=-۱۵\,\mathbf{i}-۴۷/۳\,\mathbf{j}\ kN$$

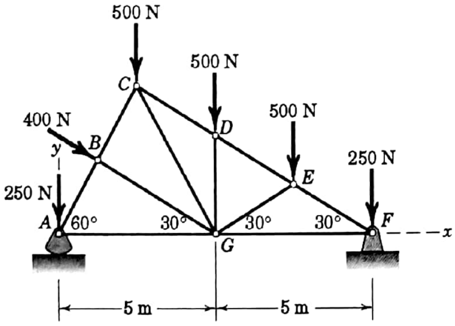
$$\circlearrowleft+\ M_o=۲۵(۵)-۳۰(۹)-(۲۰\cos ۳۰^\circ)(۹)-(۲۰\sin ۳۰^\circ)(۵)=-۳۵۱\,kN.m$$

به جهت یافتن موقعیت نهایی $\mathbf{R}$:

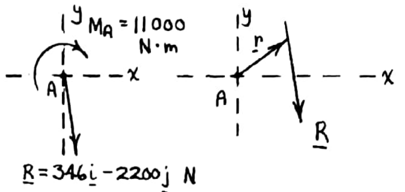
$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_o\ :\ (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(-۱۵\mathbf{i}-۹۷/۳\,\mathbf{j})=-۳۵۱\mathbf{k}\ \Rightarrow\ -۴۷/۳x+۱۵y=-۳۵۱$$

بنابراین محل تقاطع با محورها به صورت زیر خواهد بود:

$x=۷/۴۲\ m \quad , \quad y=-۲۳/۴\,m$



۲-۹۴. خرپای سقفی نامتقارنی برای برخورد تقریباً عمود نور خورشید بر صفحه‌ی جنوبی ABC استفاده شده است تا برای کاربری انرژی خورشیدی مناسب باشد. اثر وزن خرپا و مواد پوشاننده‌ی سقف، با پنج نیروی عمودی نشان داده شده است. بار $۴۰۰N$ نیز اثر باد را نشان می‌دهد. سیستم گشتاور- نیروی معادل در A را تعیین کنید. همچنین، محل تقاطع خط اثر سیستم برآیند توصیف شده توسط نیروی منفرد R با محور xها را محاسبه کنید.



حل:

سیستم گشتاور- نیروی معادل در A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=[-۲(۲۵۰)-۳(۵۰۰)]\,\mathbf{j}+۴۰۰[\cos ۳۰^\circ\,\mathbf{i}-\sin ۳۰^\circ\,\mathbf{j}]$$
$$=۳۴۶\mathbf{i}-۲۲۰۰\mathbf{j}\ N$$

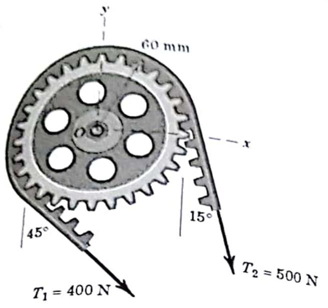
$$\circlearrowleft+\ M_A=۵۰۰[۲/۵+۵+۷/۵]+۲۵۰[۱۰]+۴۰۰[۲/۵]=۱۱۰۰۰\ N.m\quad (\text{ساعتگرد})$$

$$\mathbf{M}_A=\mathbf{r}\times\mathbf{R}\ :\ -۱۱۰۰۰\mathbf{k}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(۳۴۶\mathbf{i}-۲۲۰۰\mathbf{j})=(-۲۲۰۰x-۳۴۶y)\mathbf{k}$$

$y=۰\ \Rightarrow\ x=۵m$

۲-۹۵. به عنوان بخشی از آزمایش طراحی، چرخدنده‌ی محرک میل بادامک ثابت شده و سپس دو نیروی نشان داده شده در امتداد تسمه‌ی پیچیده شده دور چرخدنده اعمال می‌شوند. نیروی برآیند این دو نیرو را یافته و

Scanned by CamScanner



محل تلاقی خط اثر این نیرو با محورهای x و y را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{R}=\sum \mathbf{F}=۴۰۰(\cos۴۵^\circ\,\mathbf{i}-\sin۴۵^\circ\,\mathbf{j})+۵۰۰(\sin۱۵^\circ\,\mathbf{i}-\cos۱۵^\circ\,\mathbf{j})$$
$$=۴۱۲\mathbf{i}-۷۶۶\mathbf{j}\ N$$

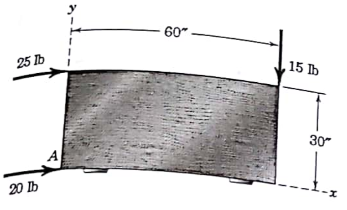
$$\overset{+}{\curvearrowleft} M_o=(۵۰۰-۴۰۰)(۰/۰۶۰)=۶\ N.m$$

برای یافتن محل تلاقی نیروی برآیند منفرد $\mathbf{R}$ با محورهای x و y

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_o\ :\ (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(۴۱۲\mathbf{i}-۷۶۶\mathbf{j})=-۶\ \Rightarrow\ -۷۶۶x-۴۱۲y=-۶$$

$$\begin{cases}x=۰ & : \quad y=۰/۰۱۴۵۵m=۱۴/۵۵mm\\ y=۰ & : \quad x=۰/۰۰۷۸۳m=۷/۸۳mm\end{cases}$$

۲-۹۶. میزی توسط سه دانش‌آموز با نیروهای نشان داده شده از نمای بالا، به سمت در راهرو هل داده می‌شود. سیستم گشتاور-نیروی معادل در نقطه‌ی A را تعیین کنید. سپس، معادله‌ی خط اثر نیروی برآیند را به دست آورید.



حل:

$$\mathbf{R}=۴۵\mathbf{i}-۱۵\,\mathbf{j}\ lb$$

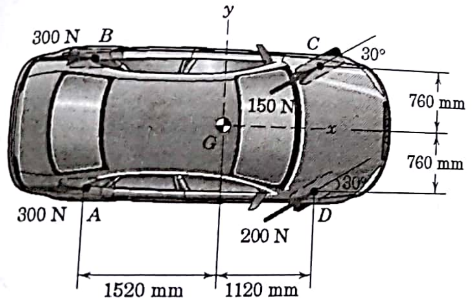
$$\overset{+}{\curvearrowleft} M_A=۲۵(۳۰)+۱۵(۶۰)=۱۶۵۰\,lb-in \quad \text{یا} \quad \mathbf{M}_A=-۱۶۵۰\mathbf{k}\ \ lb-in$$

برای یافتن خط اثر نیروی برآیند،

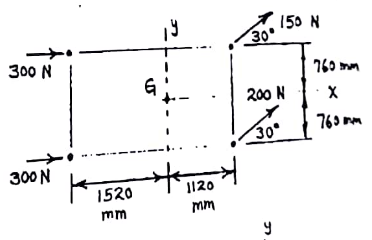
$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_A\ :\ (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(۴۵\mathbf{i}-۱۵\mathbf{j})=-۱۶۵۰\mathbf{k}\ \Rightarrow\ -۱۵x-۴۵y=-۱۶۵۰$$
$$y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۱۰}{۳}$$

(محل تلاقی با محورهای x و y به صورت $x=۱۱۰in$ و $y=\frac{۱۱۰}{۳}in$ می‌باشند).

۲-۹۷. تحت شرایط لغزندگی و غیریکنواختی جاده، چهار نیروی نشان داده شده به چهار چرخ محرک وسیله‌ی نقلیه وارد می‌شوند. نیروی برآیند این سیستم را تعیین کرده و محل تلاقی خط اثر نیروی برآیند با محورهای x و y را بیابید. یادآور می‌شود که فواصل $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ با هم برابرند.

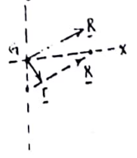


حل:



$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=۲(۳۰۰\mathbf{i})+۱۵۰(\cos۳۰^\circ\,\mathbf{i}+\sin۳۰^\circ\ \mathbf{j})$$
$$+۲۰۰(\cos۳۰^\circ\,\mathbf{i}+\sin۳۰^\circ\ \mathbf{j})=۹۰۳\mathbf{i}+۱۷۵\mathbf{j}\,N$$

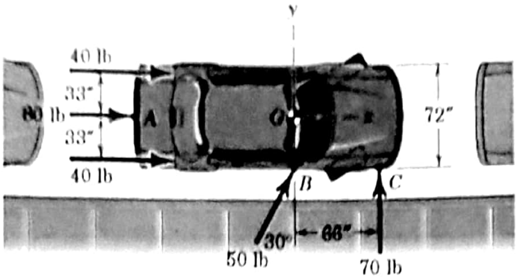
$$\overset{+}{\curvearrowleft} M_G=-۱۵۰\cos۳۰^\circ(۷۶۰)+۱۵۰\sin۳۰^\circ(۱۱۲۰)$$
$$+۲۰۰\cos۳۰^\circ(۷۶۰)+۲۰۰\sin۳۰^\circ(۱۱۲۰)$$
$$=۲۲۹۰۰۰\,N.mm=۲۲۹\,N.m \quad \text{(پادساعتگرد)}$$



$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_A\ :\ (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(۹۰۳\mathbf{i}+۱۷۵\mathbf{j})=۲۲۹\mathbf{k}\ \Rightarrow\ ۱۷۵x-۹۰۳y=۲۲۹$$

$$\begin{cases}y=۰ & : \quad x=۱/۳۰۸m\\ x=۰ & : \quad y=-۰/۲۵۳m\end{cases}$$

... شکل زیر، خودروی دیفرانسیل عقبی که در برف گیر کرده است، را نشان می‌دهد. درتلاش برای بیرون آوردن خودرو، سه دانشجو نیروهایی در نقاط A، B و C بر خودرو وارد می‌کنند، درحالی که عمل راننده باعث ایجاد نیروی پیشرانش $20lb$ به موازات صفحه‌ی چرخش هر یک از چرخ‌های عقب می‌شود. با درنظر گرفتن مسئله به صورت دوبعدی، سیستم گشتاور- نیروی معادل در مرکز جرم خودرو G را به دست آورده و موقعیت x محل تلاقی نیروی برآیند با محور گذرنده از خط مرکزی خودرو را تعیین کنید. از نیروهای نشان داده نشده، صرف‌نظر کنید.



حل:

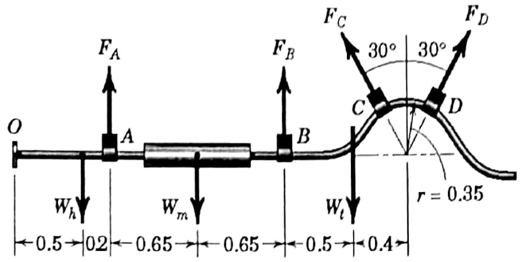
$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = (۸۰ + ۴۰ + ۴۰ + ۵۰ \sin ۳۰^\circ)\mathbf{i} + (۵۰ \cos ۳۰^\circ + ۷۰)\ \mathbf{j} = ۱۸۵\mathbf{i} + ۱۱۲/۳\mathbf{j}\ lb$$

$$M_G = ۷۰(۶۶) + ۵۰ \sin ۳۰^\circ (۳۶) = ۵۵۲۰ lb - in = ۴۶۰ lb - ft \quad \text{(پادساعتگرد)}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A \ : \ (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (۱۸۵\mathbf{i} + ۱۱۲/۳\mathbf{j}) = ۴۶۰\mathbf{k} \ \Rightarrow \ ۱۱۳/۳x - ۱۸۵y = ۴۶۰$$

هنگامی که $y = ۰$ باشد، $x = ۴/۰۶ \ ft$

۲-۹۹. سیستم اگزوز یک وانت بار در شکل نشان داده شده است. وزن لوله‌ی جلویی W_h برابر $۱۰N$، وزن خفه‌کن صدا W_m برابر $۱۰۰N$ و وزن لوله‌ی عقبی W_t برابر $۵۰N$ می‌باشد. این نیروها در نقاط نشان داده شده وارد می‌شوند. اگر بست آویز لوله‌ی اگزوز در نقطه‌ی A طوری تنظیم شود که نیروی کشش F_A آن برابر $۵۰N$ باشد، نیروهای مورد نیاز در بست‌های آویز در نقاط B و C و D را طوری به دست آورید که سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O برابر صفر باشد. دلیل مطلوب بودن سیستم گشتاور- نیروی صفر در O چیست؟



حل:

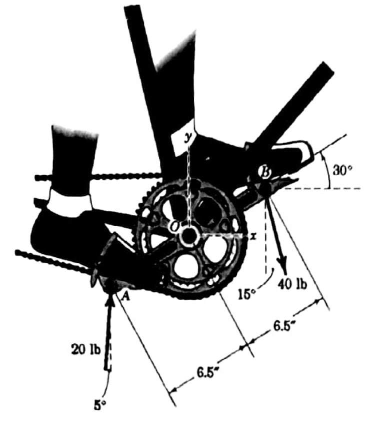
$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = (-F_C \sin ۳۰^\circ + F_D \cos ۳۰^\circ)\mathbf{i} + (۵۰ - ۱۰ - ۱۰۰ - ۵۰ + F_B + F_C \cos ۳۰^\circ + F_D \cos ۳۰^\circ)\ \mathbf{j} = ۰$$

$$\Rightarrow \quad F_C = F_D = F$$

$$\curvearrowleft + \ M_o = -۱۰(۰/۵) + ۵۰(۰/۷) - ۱۰۰(۱/۳۵) + F_B(۲) - ۵۰(۲/۵) + ۲F \cos ۳۰^\circ (۲/۹) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad F = F_C = F_D = ۶/۴۲N \quad , \quad F_B = ۹۸/۹N$$

۲-۱۰۰. سیستم پدال- چرخ زنجیر دوچرخه‌ای در شکل نشان داده شده است. پای چپ راننده نیروی $۴۰lb$ را اعمال می‌کند، درحالی که استفاده از پنجه پا، به پای راست اجازه‌ی اعمال نیرویی نزدیک $۲۰lb$ به سمت بالا را می‌دهد. سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O را تعیین کنید. همچنین، معادله‌ی خط اثر نیروی برآیند سیستم در حالت نیروی منفرد $\mathbf{R}$ را بیابید. مسئله را به صورت دوبعدی درنظر بگیرید.



حل:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = ۲۰(\sin ۵^\circ\ \mathbf{i} + \cos ۵^\circ\ \mathbf{j}) + ۴۰(\sin ۱۵^\circ \mathbf{i} - \cos ۱۵^\circ\ \mathbf{j}) = ۱۲/۱۰\mathbf{i} - ۱۸/۷۱\mathbf{j}\ lb$$

Scanned by CamScanner

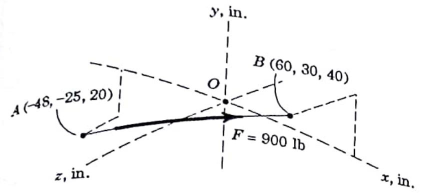
$$\mathbf{M}_O = ۶/۵(\cos ۳۰^\circ \mathbf{i} + \sin ۳۰^\circ \mathbf{j}) \times ۴۰(\sin ۱۵^\circ \mathbf{i} - \cos ۱۵^\circ \mathbf{j}) + ۶/۵(-\cos ۳۰^\circ \mathbf{i} - \sin ۳۰^\circ \mathbf{j}) \times ۲۰(\sin ۵۰^\circ \mathbf{i} + \cos ۵۰^\circ \mathbf{j})$$

$$= -۳۵۸\mathbf{k} \quad lb - in$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \quad : \quad (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (۱۲/۱۰\mathbf{i} - ۱۸/۷۱\mathbf{j}) = -۳۵۸\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow (-۱۸/۱۷x - ۱۲/۱۰y)\mathbf{k} = -۳۵۸\mathbf{k} \quad , \quad -۱۸/۷۱x - ۱۲/۱۰y = -۳۵۸$$

(به عبارتی، $y = -۱/۵۴۷x + ۲۹/۶\,in$)



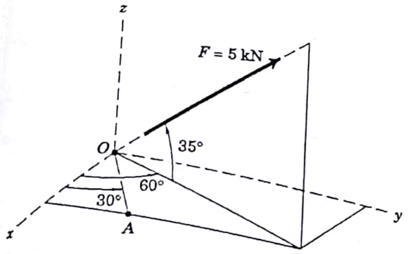
۲-۱۰۱. نیروی **F** با اندازه‌ی $۹۰۰lb$ را برحسب بردارهای یکه **i**، **j** و **k** بیان کنید. تصویر **F** روی محور y را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{F} = F \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} \quad ; \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (۶۰-(-۴۸))\mathbf{i} + (۳۰-(-۲۵))\mathbf{j} + (۴۰-۲۰)\mathbf{k} = ۱۰۸\mathbf{i} + ۵۵\mathbf{j} + ۲۰\mathbf{k} \\ |AB| = \sqrt{۱۰۸^۲ + ۵۵^۲ + ۲۰^۲} = ۱۲۲/۸۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = ۹۰۰\frac{۱۰۸\mathbf{i} + ۵۵\mathbf{j} + ۲۰\mathbf{k}}{۱۲۲/۸۴} = ۷۹۱\mathbf{i} + ۴۰۳\mathbf{j} + ۱۴۶/۵\mathbf{k} \quad lb$$

$$F_y = ۴۰۳\,lb$$



۲-۱۰۲. نیروی **F** با اندازه‌ی $۵kN$ را برحسب بردارهای یکه **i**، **j** و **k** بیان نمایید. تصویر **F** روی محور x ها و روی خط OA را به دست آورید.

حل:

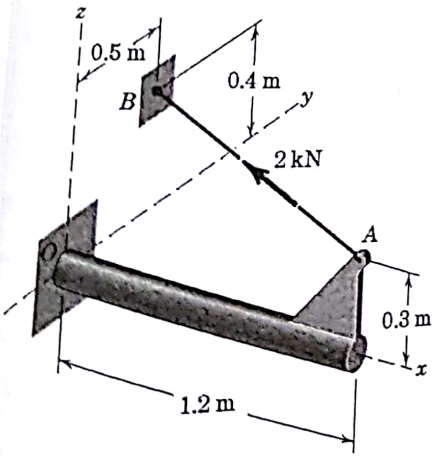
$$F_z = ۵\cos ۴۰^\circ = ۳/۸۳\,kN \quad , \quad F_h = ۵\sin ۴۰^\circ = ۳/۲۱\,kN$$

$$F_x = -۳/۲۱\sin ۳۵^\circ = -۱/۸۴۳\,kN \quad , \quad F_y = ۳/۲۱\cos ۳۵^\circ = ۲/۶۳\,kN$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -۱/۸۴۳\mathbf{i} + ۲/۶۳\mathbf{j} + ۳/۲۱\mathbf{k} \quad kN$$

$$F_{OA} = \mathbf{F}.\mathbf{n}_{OA} = (-۱/۸۴۳\mathbf{i} + ۲/۶۳\mathbf{j} + ۳/۲۱\mathbf{k}) \cdot (\cos ۳۰^\circ \mathbf{i} + \sin ۳۰^\circ \mathbf{j}) = -۰/۲۸\,kN$$

$$\mathbf{F}_{OA} = F_{OA}\mathbf{n}_{OA} = -۰/۲۸(\cos ۳۰^\circ \mathbf{i} + \sin ۳۰^\circ \mathbf{j}) = -۰/۲۴۳\mathbf{i} - ۰/۱۴۰۴\mathbf{j}\,kN$$



۲-۱۰۳. کابلی در نقطه‌ی A نیروی $۲kN$ بر قلاب وارد می‌کند. نیروی کشش **T** را به صورت برداری بنویسید.

حل:

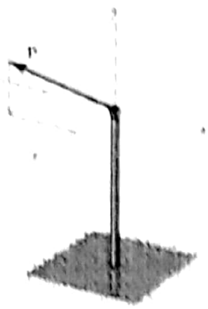
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{۱/۲}^۲ + \overline{۰/۵}^۲ + \overline{۰/۱}^۲} = ۱/۳۰۴\,m$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{-۱/۲}{۱/۳۰۴} = -۰/۹۲۰ \\ m &= \frac{۰/۵}{۱/۳۰۴} = ۰/۳۸۳ \\ n &= \frac{۰/۱}{۱/۳۰۴} = ۰/۰۷۶۷ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{T} = ۲(-۰/۹۲۰\mathbf{i} + ۰/۳۸۳\mathbf{j} + ۰/۰۷۷\mathbf{k})\,kN$$

۲-۱۰۴. تیر راهنمایی که اخیراً نصب شده است، برای اطمینان از محکم بودن در زمین مورد بررسی قرار می‌گیرد. فردی نیروی $\mathbf{P} = -۱۶۰\mathbf{i} + ۴۰\mathbf{j} + ۶۰\mathbf{k}\,N$ را مطابق شکل بر بالای تیر وارد می‌کند. زاویه‌ی نیروی **P**

Scanned by CamScanner

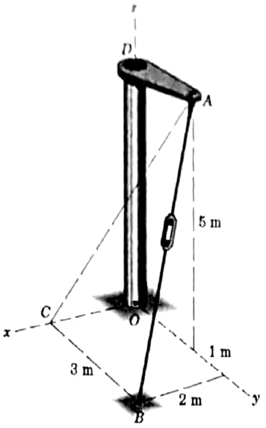
... با جهت مثبت محور x ها و صفحه‌ی x-z را تعیین کنید.



حل:

$$P_x = -۱۶۰\,N \qquad \theta_x = \cos^{-1}\frac{P_x}{P} = \cos^{-1}\frac{-۱۶۰}{\sqrt{۱۶۰^۲ + ۲۰^۲ + ۶۰^۲}} = ۱۵۵/۷^\circ$$

$$P_y = ۲۰\,N \qquad \theta_{xz} = \sin^{-1}\frac{P_y}{P} = \sin^{-1}\frac{۲۰}{\sqrt{۱۶۰^۲ + ۲۰^۲ + ۶۰^۲}} = ۱۲/۸۷^\circ$$

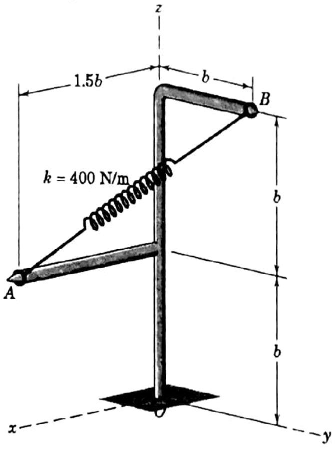


۲-۱۰۵. بست قورباغه‌ای نشان داده شده تا جایی که نیروی کششی در کابل AB برابر $۲/۴kN$ شود، محکم شده است. شکل برداری نیروی T را به صورت نیروی وارده بر عضو AD به دست آورید. همچنین اندازه‌ی تصویر T روی خط AC را بیابید.

حل:

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = ۲/۴\left(\frac{۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۵\mathbf{k}}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲ + ۵^۲}}\right) = ۰/۸۷۶\mathbf{i} + ۰/۴۳۸\mathbf{j} - ۲/۱۹\mathbf{k}\ \ kN$$

$$T_{AC} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_{AC} = (۰/۸۷۶\mathbf{i} + ۰/۴۳۸\mathbf{j} - ۲/۱۹\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}}{\sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۵^۲}}\right) = ۲/۰۶\,kN$$



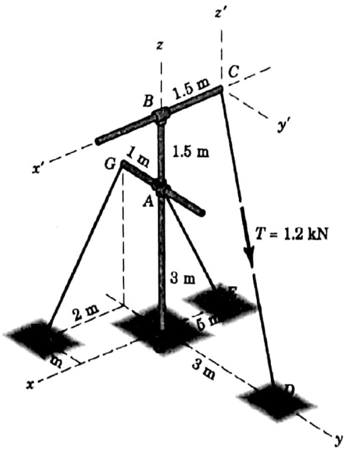
۲-۱۰۶. طول بدون کشیدگی فنری برابر b می‌باشد. اگر $b = ۰/۳m$ باشد، نیروی وارده از طرف فنر بر نقطه‌ی B از قاب فضایی را تعیین کنید. اندازه‌ی نیروی فنر برابر با حاصل‌ضرب ثابت فنر k در تغییر طول (افزایش یا کاهش) فنر می‌باشد.

حل:

$$F = k\Delta l \quad , \quad l_۱ = b \quad , \quad l_۲ = \sqrt{b^۲ + (۱/۵b)^۲ + b^۲} = ۲/۰۶b$$

$$\Rightarrow \quad F = k(l_۲ - l_۱) = ۱/۰۶\,kb = ۱/۰۶(۴۰۰)(۰/۳) = ۱۲۷/۲\,N$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{AB} = F\frac{۱/۵b\mathbf{i} - b\mathbf{j} - b\mathbf{k}}{۲/۰۶b} = ۹۲/۷\mathbf{i} - ۶۱/۸\mathbf{j} - ۶۱/۸\mathbf{k}$$



۲-۱۰۷. تیرک صلب و مجموعه بازوهای متصل به آن توسط سه کابل مهار شده‌اند، مطابق شکل. بست قورباغه‌ای در D تا جایی محکم شده است که نیروی کشش T در CD برابر $۱/۲kN$ شود. T را به صورت برداری بیان نمایید. آیا در نتیجه تفاوتی ایجاد می‌کند که از چه دستگاه مختصاتی استفاده شود؟

حل:

$$\mathbf{T} = T\frac{\mathbf{CD}}{CD} = ۱/۲\frac{۱/۵\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴/۵\mathbf{k}}{\sqrt{۱/۵^۲ + ۳^۲ + ۴/۵^۲}} = ۰/۳۲۱\mathbf{i} + ۰/۶۴۱\mathbf{j} - ۰/۹۶۲\mathbf{k}$$

در دستگاه مختصات نشان داده شده برای مسئله‌ی در دست بررسی یکسان می‌باشند.

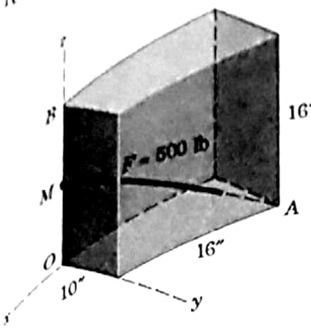
Scanned by CamScanner

۲-۱۰۸. با استفاده از جواب مسئله‌ی (۲-۱۰۷)، اندازه‌ی T_{GF}، تصویر $\mathbf{T}$ روی خط GF را تعیین کنید.

حل:

$$T_{GF} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_{GF} = (۰/۲۲۱\mathbf{i} + ۰/۶۲۱\mathbf{j} - ۰/۹۶۲\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۲\mathbf{i}-۲\mathbf{k}}{\sqrt{۲^۲+۲^۲}}\right) = ۰/۹۷۸\,kN$$

۲-۱۰۹. نیروی $\mathbf{F}$ با اندازه‌ی lb ۵۰۰ در امتداد خط AM عمل می‌کند، که در آن M نقطه‌ی میانی ضلع عمودی OB لوله‌های موازی می‌باشد. اندازه‌ی $\mathbf{F}$ را برحسب بردارهای یکه‌ی بیان کرده و مؤلفه‌های آن در راستای x و y و z را تعیین کنید.



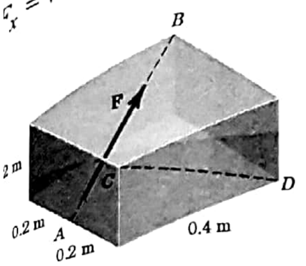
حل:

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{n}_{AM} = F\frac{\mathbf{AM}}{AM}$$

$$\mathbf{F} = ۵۰۰\left[\frac{۱۶\mathbf{i}-۱۰\mathbf{j}+۸\mathbf{k}}{\sqrt{۱۶^۲+۱۰^۲+۸^۲}}\right] = ۵۰۰[۰/۷۸۱\mathbf{i}-۰/۴۸۸\mathbf{j}+۰/۳۹۰\mathbf{k}]\,lb$$

$$F_x = ۳۹۰\,lb \quad , \quad F_y = -۲۴۴\,lb \quad , \quad F_z = ۱۹۵/۲\,lb$$

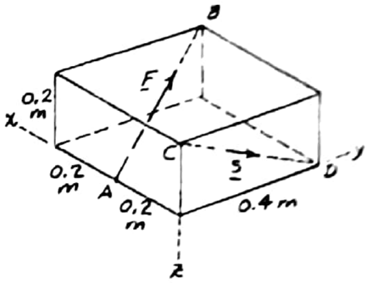
۲-۱۱۰. نیروی $\mathbf{F}$ با اندازه‌ی $۲kN$ در راستای A به B می‌باشد. تصویر F_{CD} نیروی $\mathbf{F}$ روی خط CD را محاسبه کرده و زاویه‌ی θ بین $\mathbf{F}$ و CD را تعیین کنید.



حل:

$$F = ۲kN \;,\; \overline{AB} = \sqrt{\overline{۰/۲}^۲+\overline{۰/۴}^۲+\overline{۰/۲}^۲} = \sqrt{۰/۲۴}\,m$$

$$l = \frac{۰/۲}{\sqrt{۰/۲۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \quad , \quad m = \frac{۰/۴}{\sqrt{۰/۲۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۶}} \quad , \quad n = \frac{-۱}{\sqrt{۶}}$$



$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{۲}{\sqrt{۶}}(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k})\,kN$$

برای بردار یکه‌ی $\mathbf{s}$:

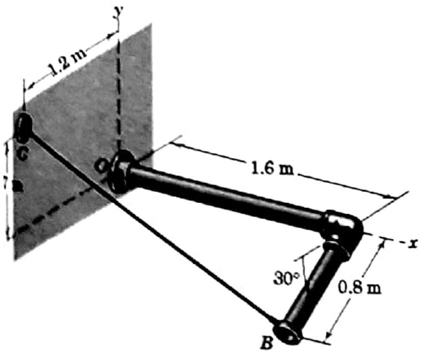
$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{۰/۲}^۲+\overline{۰/۴}^۲} = \sqrt{۰/۲}\,m \;\;,\;\; l = ۰ \;\;,\;\; m = \frac{۰/۴}{\sqrt{۰/۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \;\;,\;\; n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\mathbf{s} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$F_{CD} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = \frac{۲}{\sqrt{۶}}(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \frac{۲}{\sqrt{۳۰}}(۴-۱) = \frac{۶}{\sqrt{۳۰}} = \sqrt{\frac{۶}{۵}}\;kN$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}}{F} = \frac{\sqrt{\frac{۶}{۵}}}{۲} \quad , \quad \theta = ۵۶/۸^\circ$$

۲-۱۱۱. کشش در کابل BC برابر $۷۵۰N$ می‌باشد. این نیرو را به صورت نیروی $\mathbf{T}$ وارده بر نقطه‌ی B برحسب بردارهای یکه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بنویسید. زانویی در A قائمه می‌باشد.



حل:

مختصات نقطه‌ی B:

$$(x_B, y_B, z_B) = (۱/۶, -۰/۸\sin ۳۰^\circ, ۰/۸\cos ۳۰^\circ) = (۱/۶, -۰/۴, ۰/۶۹۳)\;m$$

Scanned by CamScanner

بردار موقعیت BC،

$$\mathbf{BC} = (۰ - ۱٫۶)\mathbf{i} + (۰٫۷ - (-۰٫۴))\mathbf{j} + (۱٫۲ - ۰٫۶۹۳)\mathbf{k} = -۱٫۶\mathbf{i} + ۱٫۱\mathbf{j} + ۰٫۵۰۷\mathbf{k} \quad m$$

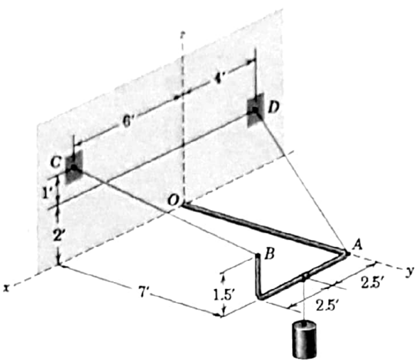
برداری که در راستای بردار موقعیت BC،

$$\mathbf{n}_{BC} = \frac{-۱٫۶\mathbf{i} + ۱٫۱\mathbf{j} + ۰٫۵۰۷\mathbf{k}}{\sqrt{۱٫۶^۲ + ۱٫۱^۲ + ۰٫۵۰۷^۲}} = -۰٫۷۹۷\mathbf{i} + ۰٫۵۴۸\mathbf{j} + ۰٫۲۵۳\mathbf{k}$$

بنابراین

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{BC} = ۷۵۰(-۰٫۷۹۷\mathbf{i} + ۰٫۵۴۸\mathbf{j} + ۰٫۲۵۳\mathbf{k}) = -۵۹۸\mathbf{i} + ۴۱۱\mathbf{j} + ۱۸۹٫۵\mathbf{k} \quad N$$

۱۱۲-۲. کشش درکابل نگهدارنده BC برابر $۸۰۰lb$ می‌باشد. نیروی وارده از طرف این کابل بر قاب OAB را به صورت یک بردار T بنویسید. زوایای θ_x، θ_y و θ_z بین خط اثر T و جهت مثبت محورهای x، y و z را تعیین کنید.



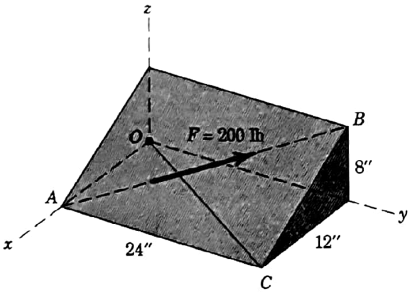
حل:

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{BC} \;:\; \mathbf{T} = ۸۰۰\left[\frac{\mathbf{i} - ۷\,\mathbf{j} + ۱٫۵\mathbf{k}}{\sqrt{۱^۲ + ۷^۲ + ۱٫۵^۲}}\right] = ۱۱۰٫۷\mathbf{i} - ۷۷۵\mathbf{j} + ۱۶۶٫۰\mathbf{k}$$

$$\cos\theta_x = \frac{۱}{۷٫۲۳} \Rightarrow \theta_x = ۸۲٫۰^\circ \quad , \quad \cos\theta_y = \frac{-۷}{۷٫۲۳} \Rightarrow \theta_y = ۱۶۵٫۶^\circ$$

$$\cos\theta_z = \frac{۱٫۵}{۷٫۲۳} \Rightarrow \theta_z = ۷۸٫۰^\circ$$

۱۱۳-۲. زاویه‌ی θ بین نیروی $۲۰۰lb$ و خط OC را تعیین کنید.



حل:

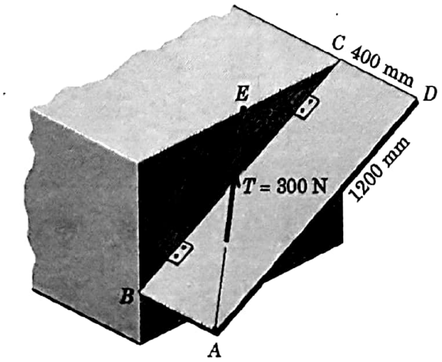
$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{AB} = ۲۰۰\left[\frac{-۱۲\mathbf{i} + ۲۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}}{\sqrt{۱۲^۲ + ۲۴^۲ + ۸^۲}}\right] = -۸۵٫۷\mathbf{i} + ۱۷۱٫۴\mathbf{j} + ۵۷٫۱\mathbf{k} \; lb$$

$$\mathbf{OC} = ۱۲\mathbf{i} + ۲۴\mathbf{j} \quad in$$

زاویه‌ی θ بین **F** و **OC** به صورت زیر می‌باشد،

$$\theta = \cos^{-۱}\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{OC}}{F(\overline{OC})} = \cos^{-۱}\left[\frac{-۸۵٫۷(۱۲) + ۱۷۱٫۴(۲۴)}{۲۰۰\sqrt{۱۲^۲ + ۲۴^۲}}\right] = ۵۴٫۹^\circ$$

۱۱۴-۲. صفحه‌ای مستطیلی توسط لولاهایی در راستای BC و کابل AE نگه داشته شده است. اگر کشش در کابل $۳۰۰N$ باشد، تصویر نیروی وارده از کابل بر صفحه روی خط BC را تعیین کنید. توجه کنید که E نقطه‌ی میانی لبه‌ی افقی بالایی ساختار می‌باشد.



حل:

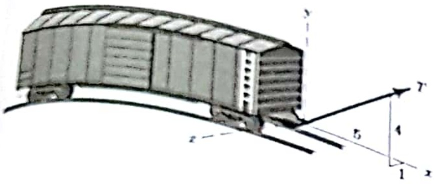
$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AE} = ۳۰۰\left[\frac{-۴۰۰\mathbf{i} + ۵۴۴\mathbf{j} + ۵۰۷\mathbf{k}}{\sqrt{۴۰۰^۲ + ۵۴۴^۲ + ۵۰۷^۲}}\right]$$

$$= ۳۰۰[-۰٫۴۷۴\mathbf{i} + ۰٫۶۴۴\mathbf{j} + ۰٫۶۰۱\mathbf{k}] \quad N$$

Scanned by CamScanner

$$n_{BC} = \cos 25^\circ \mathbf{j} + \sin 25^\circ \mathbf{k}$$

$$T_{BC} = T_{BC} \cdot n_{BC} \Rightarrow T_{BC} = 251\,N$$



۲-۱۱۵. جرثقیل سقفی برای جابه‌جا کردن واگنی باری روی ریل انحرافی استفاده شده است. اگر هنگامی که مؤلفه‌ی x نیروی کشش کابل به ۶۰۰lb برسد، واگن شروع به حرکت کند. زاویه‌ی θ_{xy} بین کابل و صفحه‌ی قائم x-y را تعیین کنید. کشش T کابل را محاسبه کنید.

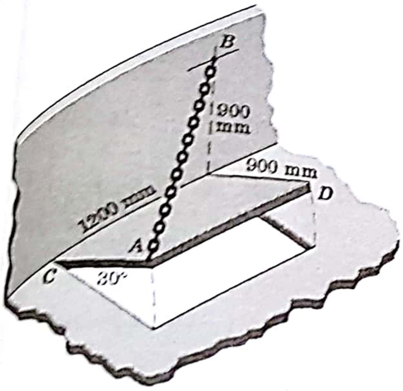
حل:

بردار یکه نیروی T به صورت زیر می‌باشد

$$n = \frac{5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{40}} = \frac{5}{\sqrt{40}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{40}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{40}}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = T\left(\frac{5}{\sqrt{40}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{40}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{40}}\mathbf{k}\right) \quad , \quad \frac{5T}{\sqrt{40}} = 600 \Rightarrow T = 758.9\,lb$$

$$\theta_{xy} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4^2+5^2}} = 8.88^\circ$$



۲-۱۱۶. دریچه دسترسی توسط زنجیر AB در موقعیت 30° باز نگه داشته شده است. اگر نیروی کشش در زنجیر $100N$ باشد، تصویر این نیرو روی محور قطری CD دریچه را تعیین کنید.

حل:

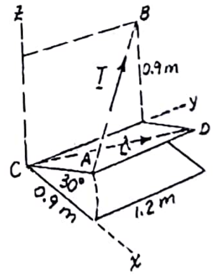
مختصات نقطه‌ی A به صورت $(0.9\cos 30^\circ, 0, 0.9\sin 30^\circ)$ می‌باشد.

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{0.779}^2 + \overline{1.2}^2 + (0.9-0.45)^2} = 1.50\,m$$

$$\bar{l} = -\frac{0.779}{1.5} \quad , \quad m = \frac{1.2}{1.5} \quad , \quad n = \frac{0.45}{1.5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \frac{100}{1.5}(-0.779\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} + 0.45\mathbf{k}) \quad N$$

λ: بردار یکه در راستای CD



$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{0.9}^2 + \overline{1.2}^2} = 1.5\,m \quad , \quad l = -\frac{0.779}{1.5} \quad , \quad m = \frac{1.2}{1.5} \quad , \quad n = \frac{0.45}{1.5}$$

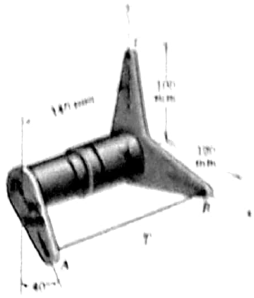
$$\lambda = \frac{1}{1.5}(0.779\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} + 0.45\mathbf{k})$$

$$T_{CD} = \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \frac{100}{1.5}(-0.779\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} + 0.45\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{1.5}(-0.779\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} + 0.45\mathbf{k})$$

$$= \frac{100}{2.25}(-\overline{0.779}^2 + \overline{1.2}^2 + \overline{0.45}^2) = \frac{100}{2.25}(-0.6075 + 1.44 + 0.2025) = 46.0\,N$$

۲-۱۱۷. محورها و قلاب‌های متصل به آنها در جهات مخالف پیچانده می‌شوند تا نیروی کشش T در سیم اتصال A به B برابر $500N$ شود. نیروی کشش وارده بر A را به صورت برداری بیان کرده و تصویر T را

... T_{DC} را تعیین کنید.



حل:

$$x_B - x_A = ۱۲۰ - ۹۰\sin ۴۰^\circ = ۶۲/۱\ mm$$

$$y_B - y_A = ۰ - (-۹۰\cos ۴۰^\circ) = ۶۸/۹\ mm$$

$$z_B - z_A = ۰ - ۱۴۰ = -۱۴۰\ mm \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{۶۲/۱^۲ + ۶۸/۹^۲ + ۱۴۰^۲} = ۱۶۸/۰\ mm$$

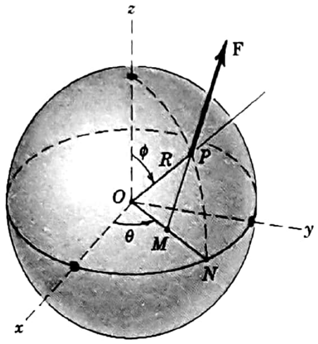
$$l = \frac{۶۲/۱}{۱۶۸} = ۰/۳۷ \quad , \quad m = \frac{۶۸/۹}{۱۶۸} = ۰/۴۱ \quad , \quad n = \frac{-۱۴۰}{۱۶۸} = -۰/۸۳۳$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T} = ۵۰۰(۰/۳۷\mathbf{i} + ۰/۴۱\mathbf{j} - ۰/۸۳۳\mathbf{k})$$

$$\overline{DC} = \sqrt{۱۴۰^۲ + ۱۰۰^۲} = ۱۷۲mm$$

$$n_{DC} = ۰\mathbf{i} + \frac{۱۰۰}{۱۷۲}\mathbf{j} - \frac{۱۴۰}{۱۷۲}\mathbf{k} = ۰/۵۸۱\mathbf{j} - ۰/۸۱۴\mathbf{k}$$

$$T_{DC} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}_{DE} = ۵۰۰(۰/۳۷۱\mathbf{i} + ۰/۴۱۰\mathbf{j} - ۰/۸۳۳\mathbf{k})\cdot(۰/۵۸۱\mathbf{j} - ۰/۸۱۴\mathbf{k}) = ۴۵۸\,N$$

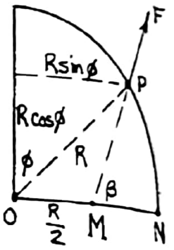


۲-۱۱۸. نیروی F به سطح کره‌ای وارد شده است، مطابق شکل. موقعیت نقطه‌ی P با زوایای θ و ϕ مشخص شده و نقطه‌ی M، نقطه‌ی میانی ON می‌باشد. شکل برداری F را بااستفاده از مختصات x، y و z داده شده بیابید.

حل:

$$F_x = F_{xy}\cos\theta \quad , \quad F_y = F_{xy}\sin\theta$$

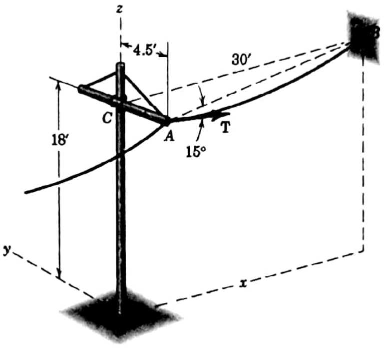
$$F_z = F\sin\beta \quad , \quad F_{xy} = F\cos\beta$$



$$\tan\beta = \frac{R\cos\phi}{R\sin\phi - \frac{R}{۲}} = \frac{۲\cos\phi}{۲\sin\phi - ۱} \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta = \dfrac{۲\cos\phi}{\sqrt{(۲\sin\phi - ۱)^۲ + (۲\cos\phi)^۲}} \\ \cos\beta = \dfrac{۲\sin\phi - ۱}{\sqrt{(۲\sin\phi - ۱)^۲ + (۲\cos\phi)^۲}} \end{cases}$$

از طرفی $\sqrt{(۲\sin\phi - ۱)^۲ + (۲\cos\phi)^۲} = \sqrt{۵ - ۴\sin\phi}$، بنابراین

$$\mathbf{F} = F[\cos\theta\cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\beta\,\mathbf{j} + \sin\beta\,\mathbf{k}] = \frac{F}{\sqrt{۵ - ۴\sin\phi}}[(۲\sin\phi - ۱)(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) + ۲\cos\phi\,\mathbf{k}]$$



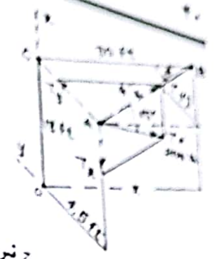
۲-۱۱۹. خط انتقال برق از نقطه‌ی A روی تیر برق به نقطه‌ی B در صفحه‌ی همتراز افقی متصل شده است. به دلیل شکم انداختن کابل در صفحه‌ی قائم، کابل در محل اتصال به نقطه‌ی A با راستای افق زاویه‌ی ۱۵° می‌سازد. اگر کشش کابل در A برابر $۲۰۰lb$ باشد، نیروی T را به صورت برداری نوشته و اندازه‌ی تصویر آن روی صفحه‌ی x-z را تعیین کنید.

حل:

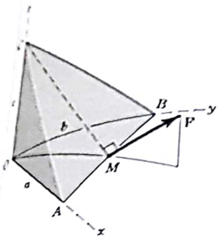
$$\theta = \tan^{-1}\frac{۴/۵}{۳۰} = ۸/۵۳^\circ \quad , \quad T_{xy} = ۲۰۰\cos ۱۵^\circ = ۱۹۳/۲lb$$

Scanned by CamScanner

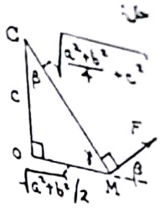
$$T_x = T_{xy}\cos\theta = ۱۹۱/۰\,lb$$
$$T_y = T_{xy}\sin\theta = ۲۸/۷\,lb$$
$$T_z = -T\sin ۱۵^\circ = -۵۱/۸\,lb$$
$$T_{xz} = \sqrt{T_x^۲ + T_z^۲} = ۱۹۷/۹\,lb$$
$$T = ۱۹۱/۰\,\mathbf{i} + ۲۸/۷\,\mathbf{j} - ۵۱/۸\,\mathbf{k}\ \ lb$$



۲-۱۲۰. مؤلفه‌های x، y و z نیروی F وارده بر چهار وجهی نشان داده شده را تعیین کنید. کمیت‌های a، b، c و F معلوم‌اند و M نقطه‌ی میانی لبه‌ی AB می‌باشد.



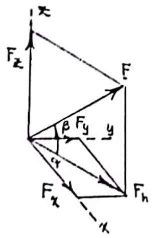
حل:

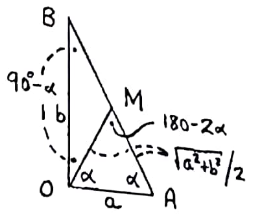


$$\tan\gamma = \frac{c}{\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲}} = \frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad , \quad \gamma + ۹۰^\circ + \beta = ۱۸۰^\circ$$

$$\beta = ۹۰^\circ - \gamma = ۹۰^\circ - \tan^{-۱}\frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} \quad , \quad \left\{\cos\alpha\,\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \ , \ \sin\alpha\,\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right\}$$





$$\{F_z = F\sin\beta\ ,\ F_h = F\cos\beta,\ F_x = F_h\cos\alpha = F\cos\beta\cos\alpha\ ,\ F_y = F_h\sin\alpha = F\cos\beta\sin\alpha\}$$

با ساده‌سازی عبارت‌های $\sin\beta$ و $\cos\beta$،

$$\sin\beta = \sin\left[۹۰^\circ - \tan^{-۱}\frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right]$$
$$= \sin ۹۰^\circ \cos\left[\tan^{-۱}\frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right] - \cos ۹۰^\circ \sin\left[\tan^{-۱}\frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right] = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{\sqrt{a^۲+b^۲+۴c^۲}}$$

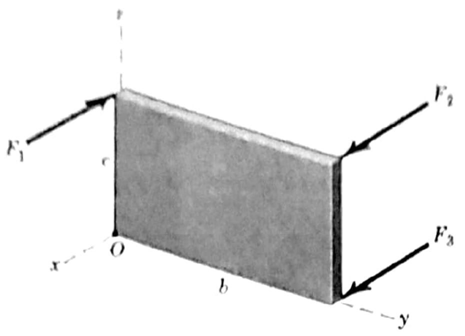
(همچنین می‌توان دید که $\sin\beta = \cos\gamma$!)

$$\cos\beta = \sin\gamma = \frac{c}{\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۴} + c^۲}} = \frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲+۴c^۲}}$$

در نهایت،

$$F_x = F\frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲+۴c^۲}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{۲acF}{\sqrt{a^۲+b^۲}\sqrt{a^۲+b^۲+۴c^۲}}$$

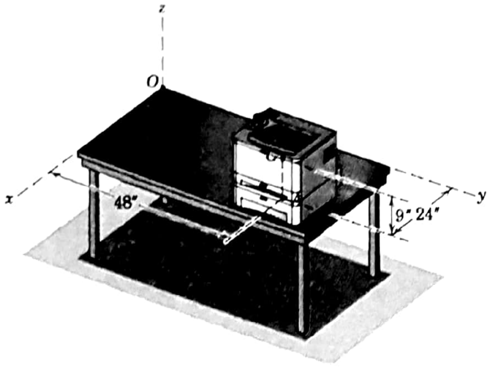
$$F_y = F\frac{۲c}{\sqrt{a^۲+b^۲+۴c^۲}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{۲bcF}{\sqrt{a^۲+b^۲}\sqrt{a^۲+b^۲+۴c^۲}} \quad ; \quad F_z = F\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{a^۲+b^۲+۴c^۲}}$$



۲-۱۲۱. سه نیرو به صورت عمود بر صفحه‌ی مستطیلی وارد شده‌اند. مطابق شکل، گشتاورهای M_1 نیروی F_1، M_2 نیروی F_2 و M_3 نیروی F_3، همگی حول نقطه‌ی O را تعیین کنید.

حل:

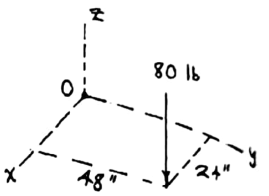
$$\mathbf{M}_1=\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1=c\mathbf{k}\times -F_1\mathbf{i}=-cF_1\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M}_2=\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2=(b\mathbf{j}+c\mathbf{k})\times F_2\mathbf{i}=F_2(c\mathbf{j}-b\mathbf{k})$$
$$\mathbf{M}_3=\mathbf{r}_3\times\mathbf{F}_3=b\mathbf{j}\times F_3\mathbf{i}=-bF_3\mathbf{k}$$



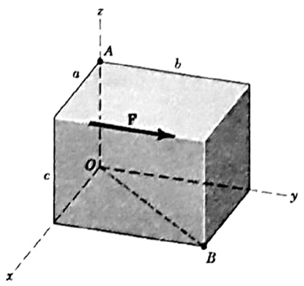
۲-۱۲۲. وزن پرینتری $۸۰lb$ بوده و مرکز جرم آن در G واقع می‌باشد. گشتاور $\mathbf{M}_O$ این وزن را حول نقطه‌ی O واقع روی قسمت بالایی افقی میز تعیین کنید. اندازه‌ی $\mathbf{M}_O$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} M_{O_x}=-۸۰\left(\frac{۴۸}{۱۲}\right)=-۳۲۰\,lb-ft \\ M_{O_y}=۸۰\left(\frac{۲۴}{۱۲}\right)=۱۶۰\,lb-ft \\ M_{O_z}=۰ \end{cases}$$



$$\mathbf{M}_O=-۳۲۰\mathbf{i}+۱۶۰\mathbf{j}\ lb-ft \quad , \quad M_O=\sqrt{۳۲۰^۲+۱۶۰^۲}=۳۵۸\ lb-ft$$



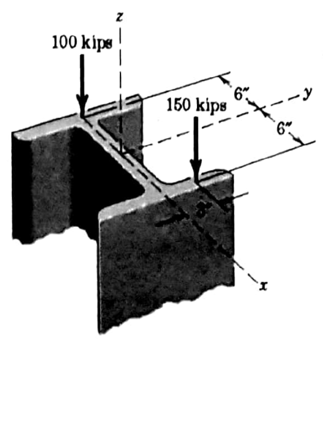
۲-۱۲۳. گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ را حول نقطه‌ی O، حول نقطه‌ی A و حول خط OB تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{M}_O=F(-c\mathbf{i}+a\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{M}_A=Fa\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M}_{OB}=(\mathbf{r}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB})\mathbf{n}_{OB} \quad , \quad \mathbf{n}_{OB}=\frac{a\mathbf{i}+b\mathbf{j}}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB}=\begin{vmatrix} a & ۰ & c \\ ۰ & F & ۰ \\ \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} & \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} & ۰ \end{vmatrix}=\frac{-Fac}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}_{OB}=-\frac{Fac}{a^۲+b^۲}(a\mathbf{i}+b\mathbf{j})$$

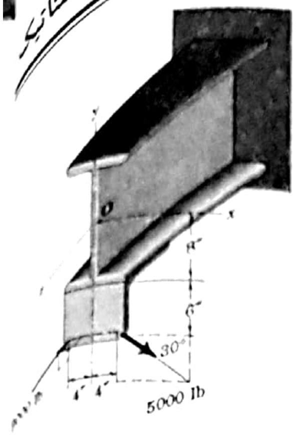


۲-۱۲۴. تیر فولادی H شکل به عنوان تکیه‌گاه دو نیروی عمودی نشان داده شده، طراحی شده است. این نیروها را با یک نیروی معادل در راستای خط مرکزی عمودی ستون و یک گشتاور جایگزین نمایید.

حل:

$$\mathbf{F}=-۲۵۰\mathbf{j}\ \ kips$$
$$\Sigma\mathbf{M}=۰\Rightarrow\mathbf{M}=(-۶\mathbf{i}\times-۱۰۰\mathbf{k})+(۶\mathbf{i}+۳\mathbf{j})\times(-۱۵۰\mathbf{k})=-۶۰۰\mathbf{j}+۹۰۰\mathbf{j}-۴۵۰\mathbf{i}$$
$$=-۴۵۰\mathbf{i}+۳۰۰\mathbf{j}\ \ kips$$

Scanned by CamScanner



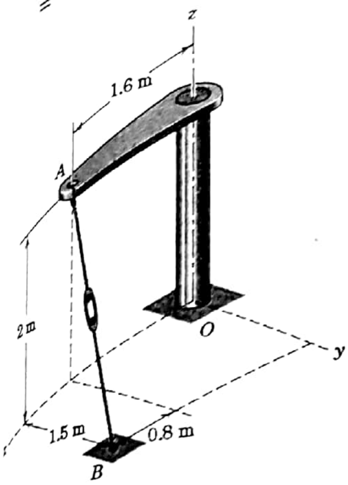
۲-۱۲۵. برای تحمل نیروی lb۹۰۰۰، نبشی قائمه‌ای به بال تیر I شکل جوش شده است. نیروی lb۹۰۰۰ موازی محور تیر اعمال شده و نیروی lb۵۰۰۰ در انتهای صفحه‌ی تیر وارد شده است. در تحلیل ظرفیت تیر در مقابل بارهای اعمال شده در مرحله‌ی طراحی، جابگزینی این نیروها با یک نیروی معادل در O و گشتاور مربوطه آن $\mathbf{M}$ رایج می‌باشد. مؤلفه‌های x، y و z گشتاور $\mathbf{M}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{F} = -9000\mathbf{k} + 5000(\cos 30^\circ \mathbf{i} - \sin 30^\circ \mathbf{j}) = 4330\mathbf{i} - 2500\mathbf{j} - 9000\mathbf{k}$$

$$M_o = (-4\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \times (-9000\mathbf{k}) + (4i - 14\mathbf{j}) \times 5000(\cos 30 \mathbf{i} - \sin 30^\circ \mathbf{j})$$

$$= -36000\mathbf{j} + 126000\mathbf{i} - 10000\mathbf{k} + 60621.8\mathbf{k} = (126\mathbf{i} - 36\mathbf{j} + 50.6\mathbf{k})10^3 \ lb-in$$



۲-۱۲۶. بست قورباغه‌ای تا جایی محکم شده است که کشش در کابل AB برابر $1.2kN$ شود. اندازه گشتاور نیروی وارده بر نقطه‌ی A حول نقطه‌ی O را محاسبه کنید.

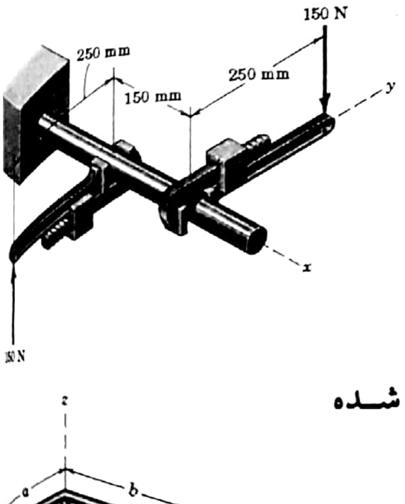
حل:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{0.8}^2 + \overline{1.5}^2 + 2^2} = 2.62m$$

$$\mathbf{T} = \frac{1.2}{2.62}(0.8\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} - 2\mathbf{k})kN \quad , \quad \bar{r} = \overrightarrow{OA} = 1.6\mathbf{i} + 2\mathbf{k} \quad m$$

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.6 & 0 & 2 \\ 0.8 & 1.5 & -2 \end{vmatrix} \frac{1.2}{2.62} = 0.457(-3\mathbf{i} + 4.8\mathbf{j} + 2.40\mathbf{k})\,kN.m$$

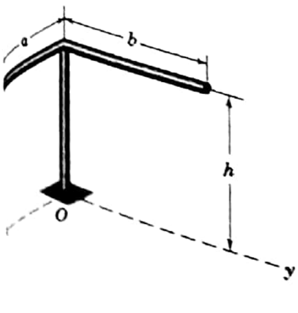
$$M_o = |\mathbf{M}_o| = 0.457\sqrt{3^2 + \overline{4.8}^2 + \overline{2.4}^2} = 2.81 \ kN.m$$



۲-۱۲۷. نیروهای وارده بر دسته‌های آچار، گشتاور $\mathbf{M}$ را به وجود می‌آورند. این گشتاور را به صورت برداری بیان نمایید.

حل:

$$\mathbf{M} = -150(0.250 + 0.250)\mathbf{i} + 150(0.150)\mathbf{j} = -75\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j} \ \ N.m$$

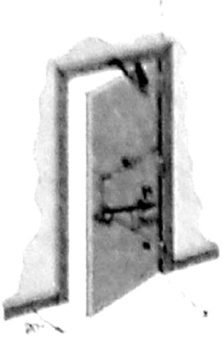


۲-۱۲۸. جسمی از یک میله‌ی باریک با جرم ρ بر واحد طول ساخته شده است. گشتاور وزن جسم حول نقطه‌ی O را به دست آورید.

حل:

$$\mathbf{M}_o = \left(\frac{a}{2}\mathbf{i} \times -\rho ag\mathbf{k}\right) + \left(\frac{b}{2}\mathbf{j} \times -\rho bg\mathbf{k}\right) = \frac{\rho g}{2}(-b^2\mathbf{i} + a^2\mathbf{j}) \ N.m$$

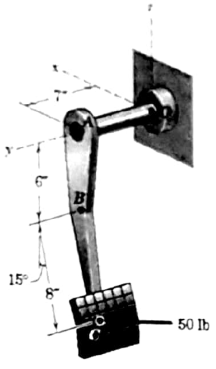
Scanned by CamScanner



۲-۱۲۹. در باز شدن یک در که به مکانیزم برگشت آرام مجهز شده است، فروی P با اندازه‌ی ۴lb مطابق شکل اعمال می‌کند. نیروی P و بردار عمود n مربوط به صفحه‌ی در، در یک صفحه‌ی قائم قرار دارند. گشتاور P را حول محور z محاسبه کنید.

حل:

$$\mathbf{M}_z = (P\cos ۲۰^\circ)d\,\mathbf{k} = (۴\cos ۲۰^\circ)(۴۰)\mathbf{k} = ۲۰۸\mathbf{k}\quad lb-in$$



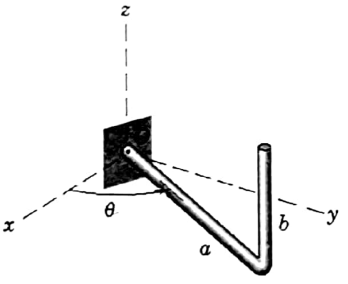
۲-۱۳۰. نیرویی ۵۰lb به پدال کنترل اعمال شده است، مطابق شکل. نیرو در صفحه‌ای موازی صفحه‌ی x-z واقع بوده و بر BC عمود است. گشتاورهای این نیرو حول نقطه‌ی O و حول محور OA را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{F} = ۵۰(\cos ۱۵^\circ \mathbf{i} - \sin ۱۵^\circ \mathbf{k})lb \quad , \quad \mathbf{r}_{OC} = -۸\sin ۱۵^\circ \mathbf{i} + ۷\mathbf{j} - (۶ + ۸\cos ۱۵^\circ)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F} \quad : \quad \mathbf{M}_O = -۹۰/۶\mathbf{i} - ۶۹۰\mathbf{j} - ۲۳۸\mathbf{k} \quad lb-in$$

$$M_{OA} = M_{O_y} = -۶۹۰ \quad lb-in$$

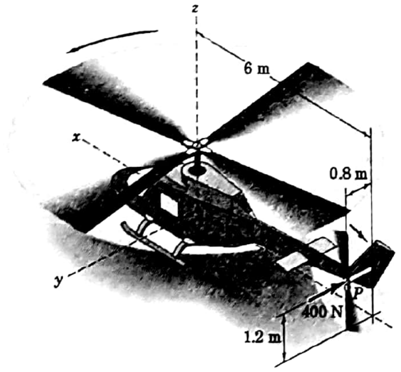


۲-۱۳۱. میله‌ی خمیده‌ای دارای جرم ρ بر واحد طول می‌باشد. گشتاور وزن میله حول نقطه‌ی O را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{M}_o = \frac{a}{۲}(\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}) \times -\rho ag\mathbf{k} + a(\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}) \times -\rho bg\mathbf{k}$$

$$= \rho ag\left(\frac{a}{۲} + b\right)[-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}]$$

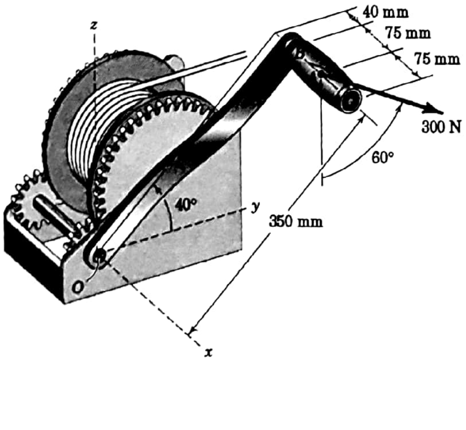


۲-۱۳۲. هلیکوپتری با هندسه سه‌بعدی در اینجا نشان داده شده است. در حین آزمایش روی زمین، نیروی آیرودینامیک ۴۰۰N در نقطه‌ی P بر پروانه‌ی عقب وارد می‌گردد، مطابق شکل. گشتاور این نیرو را حول نقطه‌ی O بدنه تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (-۶\mathbf{i} + ۰/۸\mathbf{j} + ۱/۲\mathbf{k}) \times (-۴۰۰\mathbf{j})$$

$$= ۴۸۰\mathbf{i} + ۲۴۰۰\mathbf{k} \quad N.m$$



۲-۱۳۳. نیروی ۲۰۰N به دسته بکسل وارد شده است، مطابق شکل. نیرو در صفحه‌ای موازی صفحه‌ی $y-z$ واقع بوده و بر خط AB دسته عمود می‌باشد. گشتاورهای این نیرو را حول نقطه‌ی O و حول محور x تعیین کنید.

حل:

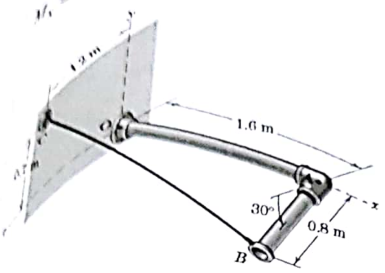
$$\mathbf{F} = ۲۰۰(\sin ۶۰^\circ \mathbf{j} - \cos ۶۰^\circ \mathbf{k})\ N$$

$$\mathbf{r}_{OA} = ۰/۱۱۵\mathbf{i} + ۰/۳۵\cos ۴۰^\circ \mathbf{j} + ۰/۳۵\sin ۴۰^\circ \mathbf{k}\ \ m$$

Scanned by CamScanner

$M_O = r_{OA} \times F \quad : \quad M_O = -۹۸/۷\mathbf{i} + ۱۷/۲۵\mathbf{j} + ۲۹/۸\mathbf{k} \; N.m$

$M_x = -۹۸/۷ \; N.m$



۲-۱۳۴. لوله را ... گوشه مسئله‌ی (۲-۱۱۱)، در اینجا مجدداً نشان داده شده است. نیروی کششی ۷۵۰N وارده از طرف کابل بر نقطه‌ی B را با یک سیستم گشتاور-نیرو در نقطه‌ی O جایگزین کنید.

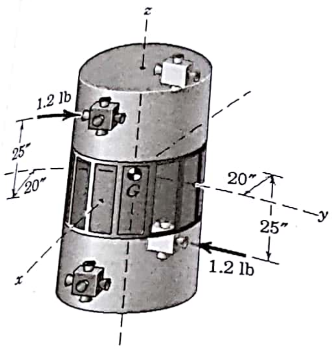
حل: از جواب مسئله‌ی (۲-۱۱۱)،

$$R = T = -۵۹۸\mathbf{i} + ۴۱۱\mathbf{j} + ۱۸۹/۵\mathbf{k} \; N$$

گشتاور متناظر به صورت

$$M_O = r_{OC} \times T \quad : \quad r_{OC} = ۰/۷\,\mathbf{j} + ۱/۲\mathbf{k} \; m$$

$$\Rightarrow M_O = -۳۶۱\mathbf{i} - ۷۱۸\mathbf{j} + ۴۱۹\mathbf{k} \; N.m$$

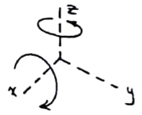


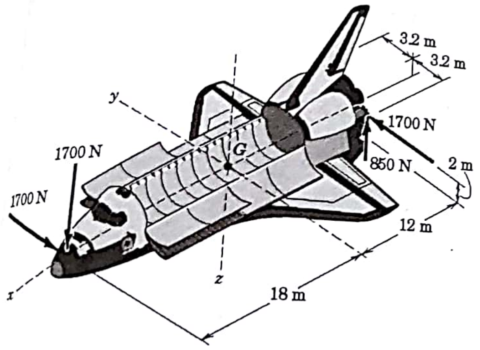
۲-۱۳۵. دو پیشرانه‌ی $۱/۲lb$ ماهواره‌ی غیرچرخانی به صورت همزمان شلیک می‌شوند. گشتاور مربوط به این زوج نیرو را محاسبه کنید. ماهواره حول چه محوری شروع به دوران خواهد کرد؟

حل:

$$\mathbf{M} = ۱/۲(۴۰)\mathbf{k} - ۱/۲(۵۰)\mathbf{i} = -۶۰\mathbf{i} + ۴۸\mathbf{k} \quad lb\text{-}in$$

ماهواره حول محورهای x و z خود شروع به دوران خواهد کرد.



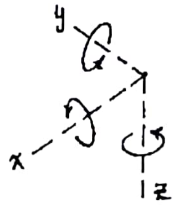


۲-۱۳۶. شاتل فضایی تحت تأثیر نیروی رانش پنج موتور سیستم کنترل عملکرد خود می‌باشد. چهار نیروی پیشرانش در شکل نشان داده شده‌اند؛ نیروی رانش پنجم برابر $۸۵۰N$ بوده و در انتهای راست به سمت بالا می‌باشد؛ متقارن با نیروی $۸۵۰N$ نشان داده شده در انتهای چپ. گشتاور این نیروها را حول نقطه‌ی G محاسبه کرده و نشان دهید نیروها حول همه‌ی نقاط گشتاور یکسانی دارند.

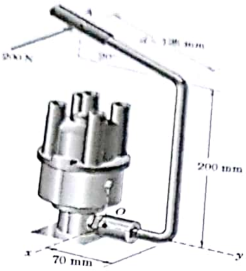
حل:

$$M = (۱۷۰۰)(۲)\mathbf{i} - (۱۷۰۰)(۳۰)\mathbf{j} - (۱۷۰۰)(۳۰)\mathbf{k} = ۳۴۰۰\mathbf{i} - ۵۱۰۰۰\mathbf{j} - ۵۱۰۰۰\mathbf{k} \quad N.m$$

شاتل حول هر سه محور دارای حرکت دورانی می‌باشد:



Scanned by CamScanner



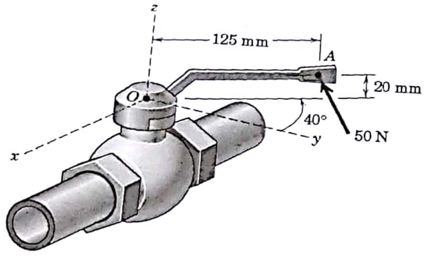
۲-۱۳۷. آچار مخصوص نشان داده شده در شکل، برای پایین نگه داشتن پیچ‌های دلکوی ماشین طراحی شده است. برای آرایش نشان داده شده، که آچار در صفحه‌ی عمودی قرار داشته و نیروی افقی $۲۰۰N$ در A به صورت عمود بر دسته وارد می‌شود، گشتاور $\mathbf{M}_o$ وارده بر پیچ در O را محاسبه کنید. به ازای چه مقداری از فاصله‌ی d مؤلفه‌ی z گشتاور $\mathbf{M}_o$ می‌تواند صفر شود؟

حل:

$$\mathbf{M}_o = ۰\mathbf{i} - (۲۰۰)(۰/۲ + ۰/۱۲۵\sin ۲۰^\circ)\mathbf{j} - ۲۰۰(۰/۱۲۵\cos ۲۰^\circ - ۰/۰۷)\mathbf{k}$$
$$= -۴۸/۶\mathbf{j} - ۹/۴۹\mathbf{k} \quad N.m$$

مؤلفه‌ی z برابر صفر خواهد بود اگر $d\cos ۲۰^\circ - ۷۰ = ۰$، بنابراین

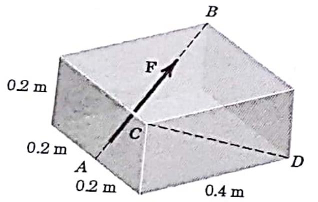
$$d = ۷۴/۵\,mm$$



۲-۱۳۸. نیروی افقی $۵۰N$ به دسته‌ی یک شیرآب صنعتی اعمال شده است، مطابق شکل. نیرو بر صفحه‌ی عمودی شامل خط OA عمود می‌باشد. سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O را تعیین کنید.

حل:

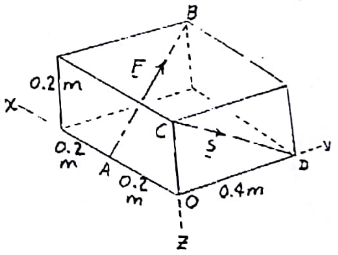
$$\mathbf{R} = ۵۰(-\cos ۴۰^\circ\,\mathbf{i} - \sin ۴۰^\circ\,\mathbf{j}) = -۳۸/۳\mathbf{i} - ۳۲/۱\mathbf{j} \quad N$$
$$\mathbf{M}_o = (۵۰\sin ۴۰^\circ)(۲۰)\mathbf{i} - (۵۰\cos ۴۰^\circ)(۲۰)\mathbf{j} + ۵۰(۱۲۵)\mathbf{k}$$
$$= ۶۴۳\mathbf{i} - ۷۶۶\mathbf{j} + ۶۲۵۰\mathbf{k} \quad N.mm$$



۲-۱۳۹. اگر اندازه‌ی گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول خط CD برابر $۵۰N.m$ باشد، اندازه‌ی $\mathbf{F}$ را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{s} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{F} = \frac{F}{\sqrt{۶}}(\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

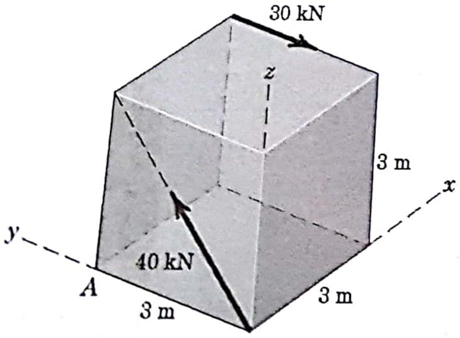


$$\overline{r} = \overrightarrow{DA} = ۰/۲\mathbf{i} - ۰/۴\mathbf{j} \;\; m$$

$$M_{CD} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \left[(۰/۲\mathbf{i} - ۰/۴\mathbf{j}) \times \frac{F}{\sqrt{۶}}(\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k})\right] \cdot \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

بنابراین

$$۵۰ = \frac{F}{\sqrt{۳۰}}\begin{vmatrix} ۰/۲ & -۰/۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = \frac{F}{\sqrt{۳۰}}(۰/۸ + ۰/۴) = \frac{۱/۲F}{\sqrt{۳۰}} \quad , \quad F = \frac{۵۰\sqrt{۳۰}}{۱/۲} = ۲۲۸N$$

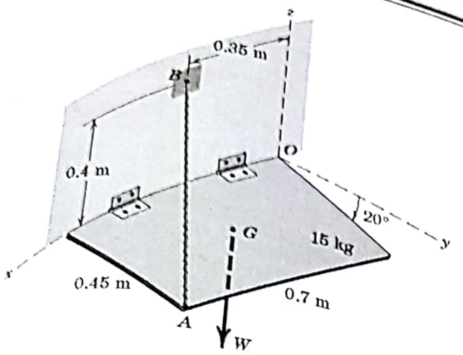


۲-۱۴۰. دو نیروی وارده بر مکعب به ضلع $۳m$ را با یک نیروی معادل منفرد $\mathbf{F}$ در A و یک گشتاور $\mathbf{M}$ جایگزین کنید.

حل:

$$\mathbf{F} = -۳۰\mathbf{j} + ۲۰\sqrt{۲}(\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -۱/۷۱۶\mathbf{j} + ۲۸/۳\mathbf{k} \quad kN$$
$$\mathbf{M} = ۳(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (-۳۰\mathbf{j}) + (-۳\mathbf{j}) \times ۲۰\sqrt{۲}(\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -۹۰\mathbf{k} + ۹۰\mathbf{i} - ۶۰\sqrt{۲}\mathbf{i}$$
$$= ۵/۱۵\mathbf{i} - ۹۰\mathbf{k} \;\; kN.m$$

Scanned by CamScanner



۱۴۱-۲. با استفاده از اصول توسعه یافته تعادل در فصل ۳، می‌توان کشش در کابل AB را برابر $۱۴۳/۴\ N$ تعیین نمود. گشتاور این نیروی کششی وارده بر نقطه‌ی A را حول محور x تعیین کنید. جواب خود را با گشتاور وزن W صفحه‌ی یکنواخت $۱۵kg$ حول محور x مقایسه کنید. گشتاور نیروی کششی وارده بر A حول خط OB چقدر است؟

حل:

$$\mathbf{T}=T\left[\frac{-۰/۳۵\mathbf{i}-۰/۴۵\cos ۲۰^\circ\mathbf{j}+(۰/۴+۰/۴۵\sin ۲۰^\circ)\mathbf{k}}{\sqrt{(۰/۳۵)^۲+(۰/۴۵\cos ۲۰^\circ)^۲+(۰/۴+۰/۴۵\sin ۲۰^\circ)^۲}}\right]$$

$$=۱۴۳/۴[-۰/۴۴۹\mathbf{i}-۰/۵۴۲\mathbf{j}+۰/۷۱۰\mathbf{k}]\ N$$

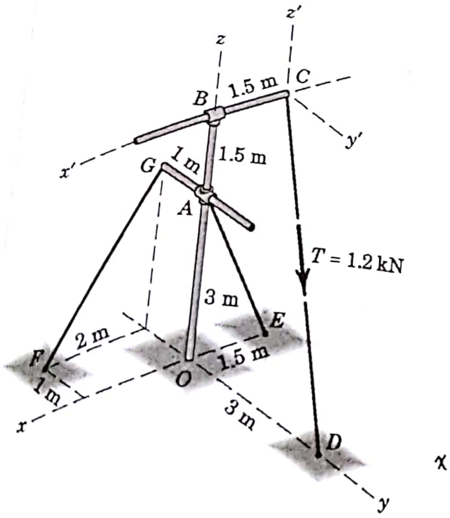
گشتاور این نیرو حول محور x به صورت

$$M_{O_x}=(۰/۷۱)(۱۴۳/۴)(۰/۴۵\cos ۲۰^\circ)-۰/۵۴۲(۱۴۳/۴)(۰/۴۵\sin ۲۰^\circ)=۳۱/۱\ N.m$$

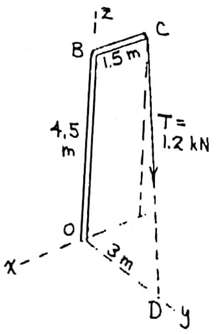
گشتاور وزن W صفحه‌ی $۱۵kg$ حول محور x به صورت

$$(M_{O_x})_W=-۱۵(۹/۸۱)\frac{۰/۴۵\cos ۲۰^\circ}{۲}=-۳۱/۱\ N.m$$

گشتاور $\mathbf{T}$ حول خط OB صفر است، زیرا $\mathbf{T}$ خط OB را قطع می‌کند.



۱۴۲-۲. تیر صلب و بازوهای متصل به آن مربوط به مسئله‌ی (۲-۱۰۷) در اینجا مجدداً نشان داده شده‌اند. عبارت برداری گشتاور نیروی کششی $۱/۲kN$ را: (الف) حول نقطه‌ی O و (ب) حول محور z تیر، تعیین کنید. هر گشتاور را به دو روش متفاوت بیابید.



حل:

از جواب مسئله‌ی (۲-۱۰۷)،

$$\mathbf{T}=۰/۳۲۱\mathbf{i}+۰/۶۴۱\mathbf{j}-۰/۹۶۲\mathbf{k}\ kN$$

الف)

$$\mathbf{M}_o=\mathbf{r}_{OD}\times\mathbf{T}\quad,\quad \mathbf{r}_{OD}=۲\mathbf{j}\ m$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{M}_o=-۲/۸۹\mathbf{i}-۰/۹۶۲\mathbf{k}\ \ kN.m$$

همچنین

$$\mathbf{M}_o=\mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{T}\quad,\quad \mathbf{r}_{OC}=-۱/۵\mathbf{i}+۴/۵\mathbf{k}\ m$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{M}_o=-۲/۸۹\mathbf{i}-۰/۹۶۲\mathbf{k}\ \ kN.m$$

ب)

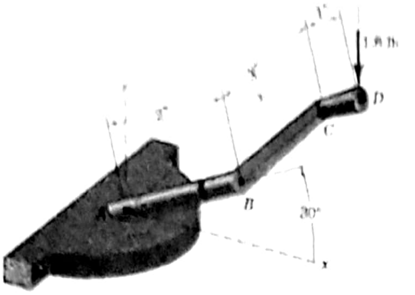
$$\mathbf{M}_z=-۱/۵T_y\mathbf{k}=-۱/۵(۰/۶۴۱)\mathbf{k}=-۰/۹۶۲\mathbf{k}\ \ kN.m$$

همچنین

$$\mathbf{M}_z=\mathbf{M}_o\cdot\mathbf{k}\ \mathbf{k}=(-۲/۸۹\mathbf{i}-۰/۹۶۲\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\ \mathbf{k}=-۰/۹۶۲\mathbf{k}\ \ kN.m$$

۱۴۳-۲. نیروی عمودی $۱/۸lb$ به دستگیره‌ی مکانیزم بازکننده‌ی پنجره اعمال شده است، درحالی که میله‌ی BC

در وضعیت افقی قرار دارد. گشتاور این نیرو را حول نقطه‌ی A و حول خط AB به دست آورید.



حل:
با استفاده از مختصات نشان داده شده در شکل،

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{F} = -۱/۸\mathbf{k} \ \ lb$$

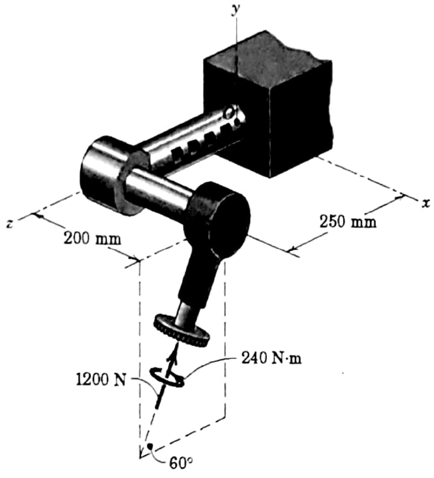
$$\mathbf{r} = ۲\cos۲۰^\circ\,\mathbf{i} + ۲\,\mathbf{j} + ۲\sin۲۰^\circ\,\mathbf{k} \ \ in$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{M}_A = -۵/۴۰\mathbf{i} + ۲/۶۸\mathbf{j} \ \ lb-in$$

$$\mathbf{M}_{AB} = (\mathbf{M}_A\cdot\mathbf{n}_{AB})\mathbf{n}_{AB} \quad , \quad n_{AB} = \cos۲۰^\circ\mathbf{i} + \sin۲۰^\circ\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_{AB} = -۴/۰۵\mathbf{i} - ۲/۳۴\mathbf{k} \ \ lb-in$$

۲-۱۴۴. دستگاه فرز خاصی تحت نیروی $۱۲۰۰N$ و زوج نیرو $۲۴۰N.m$ قرار گرفته است، مطابق شکل. گشتاور این سیستم را حول نقطه‌ی O تعیین کنید.



حل:
گشتاور زوج نیرو حول O به صورت

$$۲۴۰(\mathbf{j}\cos۳۰^\circ - \mathbf{k}\sin۳۰^\circ) = ۲۰۷/۸\mathbf{j} - ۱۲۰\mathbf{k} \ \ N.m$$

گشتاور نیروی $۱۲۰۰N$ حول O به صورت

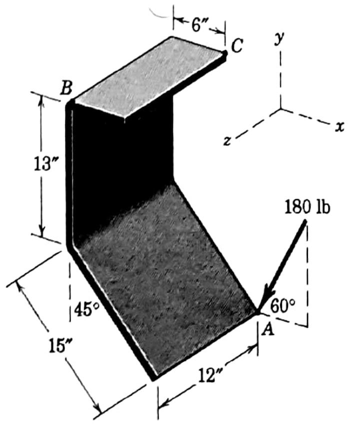
$$۱۲۰۰\cos۳۰^\circ(-۰/۲۵\mathbf{i} + ۰/۲\mathbf{k}) + ۱۲۰۰\sin۳۰^\circ(۰/۲\mathbf{j})$$

$$= -۲۵۹/۸\mathbf{i} + ۱۲۰\mathbf{j} + ۲۰۷/۸\mathbf{k} \ N.m$$

بنابراین مجموع گشتاورها حول O به صورت زیر خواهد بود

$$\mathbf{M}_o = -۲۵۹/۸\mathbf{i} + ۳۲۷/۸\mathbf{j} + ۸۷/۸\mathbf{k} \ \ N.m$$

۲-۱۴۵. نیروی $۱۸۰lb$ در نقطه‌ی A پایه اعمال شده است. گشتاورهای این نیرو را حول نقطه‌ی B، حول نقطه‌ی C و حول خط BC تعیین کنید.



حل:

$$\mathbf{F} = ۱۸۰(-\cos۶۰^\circ\,\mathbf{i} - \sin۶۰^\circ\,\mathbf{j}) \ \ lb$$

$$\mathbf{r}_{BA} = ۱۵\sin۴۵^\circ\,\mathbf{i} - (۱۵\cos۴۵^\circ + ۱۳)\mathbf{j} - ۱۲\mathbf{k} \ \ in$$

$$\mathbf{r}_{CA} = (۱۵\sin۴۵^\circ - ۶)\mathbf{i} - (۱۵\cos۴۵^\circ + ۱۳)\mathbf{j} \ \ in$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BA}\times\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{CA}\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_B = -۱۸۷۱\mathbf{i} + ۱۰۸۰\mathbf{j} - ۳۷۸۰\mathbf{k} \ \ lb-in \quad , \quad \mathbf{M}_C = -۲۸۴۰\mathbf{k} \ \ lb-in$$

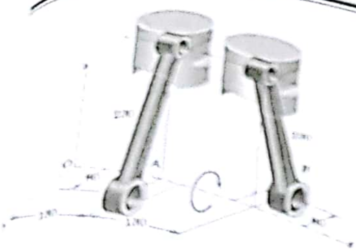
بردار هادی خط BC به صورت زیر می‌باشد

$$\mathbf{n}_{BC} = \frac{۶\mathbf{i} - ۱۲\mathbf{k}}{\sqrt{۶^۲ + ۱۲^۲}} = ۰/۴۴۷\mathbf{i} - ۰/۸۹۴\mathbf{k}$$

$$M_{BC} = \mathbf{M}_B\cdot\mathbf{n}_{BC} = ۲۵۴۰ \ \ lb-in \ \ (\mathbf{M}_C\cdot\mathbf{n}_{BC} = ۲۵۴۰ \ lb-in)$$

۲-۱۴۶. در لحظه‌ی نشان داده شده، که قسمت‌های استوانه‌ای میل‌لنگ‌های موتور دو سیلندر از موقعیت افقی صفحه‌ی $y-z$ عبور می‌کنند، میله اتصال A تحت نیروی فشاری $۱/۸kN$ و میله اتصال B تحت نیروی فشاری

Scanned by CamScanner



... قرار دارد. گشتاور وارده توسط دو میله را حول محور z میل‌لنگ تعیین کنید. برای اهداف طراحی، داشتن شکل برداری گشتاورهای این دو نیرو حول یکی از یاتاقان‌های اصلی در O ضروری می‌باشد.

حل:

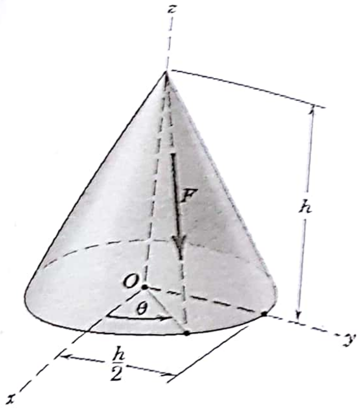
$$\mathbf{F}_A = 1/8\left(\frac{215/6}{230}\mathbf{i} - \frac{80}{230}\mathbf{j}\right) kN \quad , \quad \mathbf{F}_B = 0/8\left(\frac{215/6}{230}\mathbf{i} + \frac{80}{230}\mathbf{j}\right)$$

$$M_z = 80\mathbf{j} \times 1/8\left(\frac{215/6}{230}\mathbf{i} - \frac{80}{230}\mathbf{j}\right) + (-80\mathbf{j}) \times 0/8\left(\frac{215/6}{230}\mathbf{i} + \frac{80}{230}\mathbf{j}\right)$$

$$= 135\mathbf{k} - 60\mathbf{k} = 75\mathbf{k} \quad kN.mm = 75\mathbf{k} \quad N.m$$

$$M_O = (80\mathbf{j} + 130\mathbf{k}) \times 1/8\left(\frac{215/6}{230}\mathbf{i} - \frac{80}{230}\mathbf{j}\right) + (-80\mathbf{j} + 260\mathbf{k}) \times 0/8\left(\frac{215/6}{230}\mathbf{i} + \frac{80}{230}\mathbf{j}\right)$$

$$= -135\mathbf{k} + 219/3\mathbf{j} + 81/4\mathbf{i} + 60\mathbf{k} + 195\mathbf{j} - 72/35\mathbf{i} = 9/04\mathbf{i} + 414\mathbf{j} - 75\mathbf{k} \quad N.m$$



۲-۱۴۷. نیروی F در امتداد یال مخروط دایروی قائمی اعمال می‌شود، مطابق شکل. سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O را تعیین کنید.

حل:

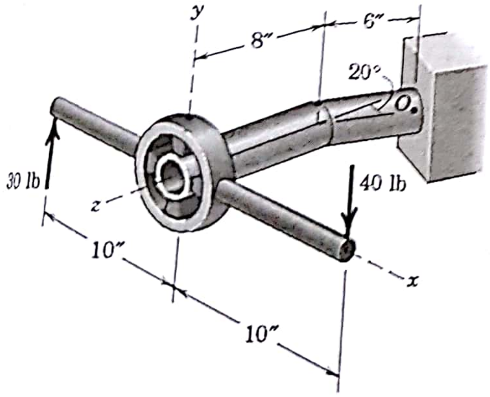
$$F_{xy} = F.\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{5}h} = \frac{F}{2\sqrt{5}} \Rightarrow F_x = \frac{F}{2\sqrt{5}}\cos\theta \quad , \quad F_y = \frac{F}{2\sqrt{5}}\sin\theta$$

$$\frac{\frac{F}{2\sqrt{5}}}{F_z} = \frac{\frac{h}{2}}{h} \Rightarrow F_z = \frac{F}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{F}{\sqrt{5}}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{h}{2}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) \times \frac{F}{\sqrt{5}}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$= \frac{hF}{2\sqrt{5}}(\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{k} - \sin\theta\cos\theta\,\mathbf{k} + 2\cos\theta\,\mathbf{j} - 2\sin\theta\,\mathbf{i}) = \frac{hF}{\sqrt{5}}(\cos\theta\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{i})$$



۲-۱۴۸. قلاویزی در انتهای لوله‌ی ثابتی پیچانده می‌شود، درحالی که لوله دارای خمی با زاویه‌ی ۲۰° می‌باشد. این نیروها را با یک نیروی معادل در O و زوج نیروی M جایگزین کنید. M را یافته و اندازه‌ی M′ را تعیین کنید که تمایل دارد لوله را حول محور خم آن گذرنده از O، به سمت داخل دیوار بپیچاند.

حل:

با معادل‌سازی مرحله به مرحله مسئله ساده می‌شود ابتدا معادل در مرکز قلاویز

$$R_1 = -10\mathbf{j} \; lb \quad , \quad \mathbf{M}_1 = -600\mathbf{k} - 100\mathbf{k} = -700\mathbf{k} \quad lb - in$$

در مرحله‌ی دوم، معادل در محل خمیدگی محور

$$R_2 = -10\mathbf{j} \; lb \quad , \quad \mathbf{M}_2 = -700\mathbf{k} + (8\mathbf{k} \times -10\mathbf{j}) = -700\mathbf{k} + 80\mathbf{i} \quad lb - in$$

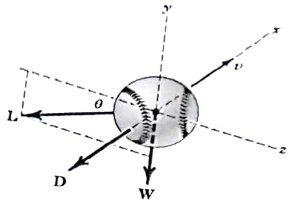
Scanned by CamScanner

... معادل در نقطه‌ی O

$$\mathbf{R} = -۱۰\mathbf{j}\ lb \quad , \quad \mathbf{M}_O = -۷۰۰\mathbf{k} + ۸۰\mathbf{i} + [۶(-\sin ۲۰°\mathbf{i} + \cos ۲۰°\mathbf{k}) \times -۱۰\mathbf{j}]$$
$$= -۷۰۰\mathbf{k} + ۸۰\mathbf{i} + ۶۰\sin ۲۰°\mathbf{k} + ۶۰\cos ۲۰°\mathbf{i} = ۱۳۶٫۴\mathbf{i} - ۶۷۹\mathbf{k}\ lb-in$$

گشتاور M' که می‌خواهد لوله را حول محور گذرنده از O بچرخاند، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$M' = |M_z|\cos ۲۰° + |M_x|\sin ۲۰° = ۶۸۵\ lb-in$$



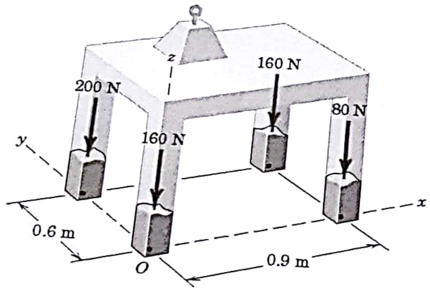
۲-۱۴۹. توپ بیسبالی با چرخش پرتاب می‌شود به گونه‌ای که سه نیرو به صورت همزمان مطابق شکل بر آن وارد می‌شوند. وزن W برابر $۵oz$، نیروی درگ D برابر $۱٫۷oz$ و نیروی لیفت L عمود بر سرعت $\mathbf{v}$ توپ می‌باشد. اگر مؤلفه‌ی y نیروی برآیند $-۵٫۵oz$ و مؤلفه‌ی z آن $-۰٫۸۶۶\ oz$ باشد، L، θ و R را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} + \mathbf{W} + \mathbf{D} = -۵\mathbf{j} + L(-\sin\theta\,\mathbf{j} - \cos\theta\,\mathbf{k}) - ۱٫۷\mathbf{i} = -۱٫۷\mathbf{i} - (۵ + L\sin\theta)\mathbf{j} - L\cos\theta\,\mathbf{k}$$

$$\begin{cases} -L\cos\theta = -۰٫۸۶۶ \\ -(۵ + L\sin\theta) = -۵٫۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta = ۳۰° \\ L = ۱\ oz \end{array}$$

$$R = [(۱٫۷)^۲ + (۵ + \sin ۳۰°)^۲ + (\cos ۳۰°)^۲]^{\frac{۱}{۲}} = ۵٫۸۲\ oz$$

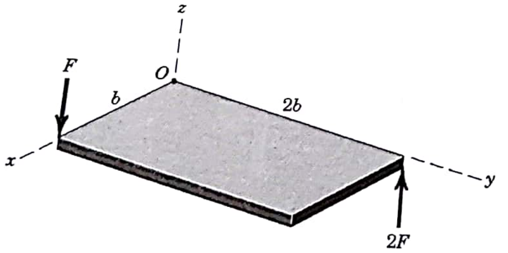


۲-۱۵۰. میزی، چهار نیروی نشان داده شده را به کف وارد می‌کند. سیستم نیرویی را به یک سیستم گشتاور- نیرو در نقطه‌ی O کاهش دهید. نشان دهید $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود است.

حل:

$$\mathbf{R}_۱ = -۱۶۰\mathbf{k} - ۲۰۰\mathbf{k} - ۱۶۰\mathbf{k} - ۸۰\mathbf{k} = -۶۰۰\mathbf{k}\quad N$$
$$\mathbf{M}_O = (۰٫۶\mathbf{j} \times -۲۰۰\mathbf{k}) + (۰٫۹\mathbf{i} \times -۸۰\mathbf{k}) + ([۰٫۶\mathbf{j} + ۰٫۹\mathbf{i}] \times -۱۶۰\mathbf{k})$$
$$= -۱۲۰\mathbf{i} + ۷۲\mathbf{j} - ۹۶\mathbf{i} + ۱۴۴\mathbf{j} = ۲۱۶(-\mathbf{i} + \mathbf{j})\ N.m$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = (-۶۰۰\mathbf{k}) \cdot ۲۱۶(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \perp \mathbf{M}_O$$



۲-۱۵۱. دو نیرو مطابق شکل به صفحه‌ای مستطیلی وارد می‌شوند. این سیستم نیرویی را به یک سیستم گشتاور- نیرو وارده در نقطه‌ی O کاهش دهید. سپس برآیند سیستم را در صورت امکان به صورت یک نیرو بیان کرده و خط اثر آن را مشخص کنید.

حل:

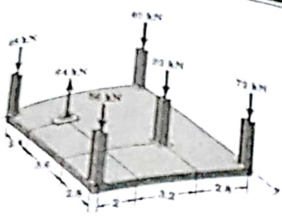
$$\mathbf{R} = F\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{M}_O = (b\,\mathbf{i} \times -F\mathbf{k}) + (۲b\,\mathbf{j} \times ۲F\mathbf{k}) = bF\,\mathbf{j} + ۴bF\mathbf{i} = bF(۴\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

درصورتی سیستم معادل، شامل فقط یک نیرو خواهد بود که M_O برابر صفر شود، اگر موقعیت $\mathbf{R}$ برابر (x, y) باشد:

$$\mathbf{M}_O = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \times F\mathbf{k} = bF(۴\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -b \\ y = ۴b \end{cases}$$

Scanned by CamScanner



۲-۱۵۲. قالب بتنی، شش نیروی نشان داده شده را تحمل می‌کند. مختصات x و y نقطه‌ای از قالب را تعیین کنید که برآیند سیستم بارگذاری از آن می‌گذرد.

حل:

$$\mathbf{R} = -48\mathbf{k} - 40\mathbf{k} + 64\mathbf{k} - 56\mathbf{k} - 22\mathbf{k} - 72\mathbf{k} = -184\mathbf{k} \quad kN$$

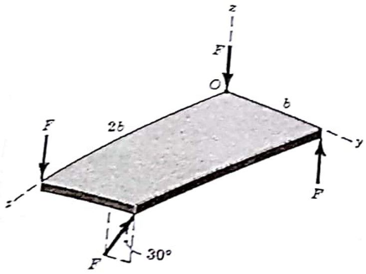
با فرض مختصات (x,y) برای $\mathbf{R}$ و محاسبه‌ی گشتاور حول مبدأ مختصات،

$$\mathbf{M}_o = [8\mathbf{i} \times -48\mathbf{k}] + [(6\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j}) \times 64\mathbf{k}] + [8.8\mathbf{i} \times -72\mathbf{k}] + [(2.8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \times -22\mathbf{k}]$$

$$+ [(8\mathbf{i} + 8.8\mathbf{j}) \times -56\mathbf{k}] + [(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times -184\mathbf{k}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_o = -1164.8\mathbf{i} + 537.6\mathbf{j} + 184x\mathbf{j} - 184y\mathbf{i} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2.92\,m \\ y = 6.33\,m \end{cases}$$



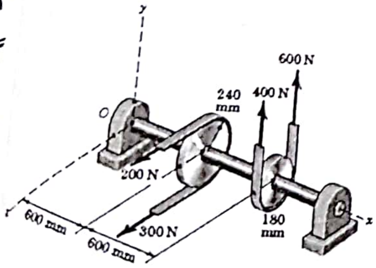
۲-۱۵۳. صفحه‌ی مستطیلی نازکی تحت چهار نیروی نشان داده شده قرار گرفته است. سیستم گشتاور- نیروی معادل در O را تعیین کنید. آیا $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_o$ عمود است؟

$$\mathbf{R} = -2F\mathbf{k} + F\mathbf{k} + F(\cos 30^\circ \mathbf{k} + \sin 30^\circ \mathbf{j})$$

$$= \frac{F}{2}\mathbf{j} + F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\mathbf{k} = F\left(\frac{1}{2}\mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{M}_o = 2Fb\,\mathbf{j} + Fb\,\mathbf{i} + \frac{F}{2}(2b)\mathbf{k} + \frac{\sqrt{3}}{2}Fb\,\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}F(2b)\,\mathbf{j} = Fb\left[\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i} + (2 - \sqrt{3})\mathbf{j} + \mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o = \left[\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)(1)\right]F^2 b = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \perp \mathbf{M}_o$$



۲-۱۵۴. پولی‌ها تحت بارگذاری نشان داده شده قرار گرفته‌اند. سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی O را تعیین کنید.

حل:

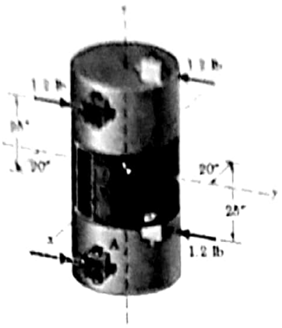
$$\mathbf{R} = 1000\mathbf{j} + 500\mathbf{k} \quad N$$

$$\mathbf{M}_o = (1200\mathbf{i} + 180\mathbf{k}) \times (400\mathbf{j}) + (1200\mathbf{i} - 180\mathbf{k}) \times (600\mathbf{j}) + (600\mathbf{i} + 240\mathbf{j}) \times (200\mathbf{k})$$

$$+ (600\mathbf{i} - 240\mathbf{j}) \times (300\mathbf{k})$$

$$= 480\mathbf{k} - 72\mathbf{i} + 720\mathbf{k} + 108\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 48\mathbf{i} - 180\mathbf{j} - 72\mathbf{i} = 12\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 1200\mathbf{k} \quad N.m$$

۵-۱۵۵. فضاپیمای مسئله‌ی (۲-۱۳۵) در اینجا تکرار شده است. برنامه بدین صورت است که چهار پیشرانه‌ی $1.2\,lb$ مطابق شکل برای چرخاندن فضاپیما حول محور z خودش روشن می‌شوند، اما پیشرانه‌ی واقع در

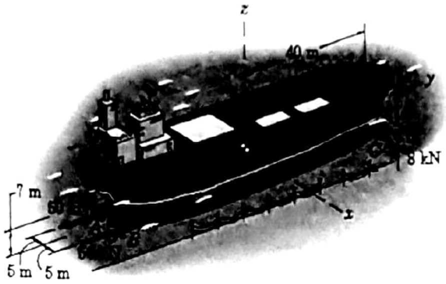


کار می‌کند. سیستم گشتاور- نیروی معادل در G را برای سه پیشرانه‌ی باقیمانده تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{R}=(۱/۲-۱/۲-۱/۲)\,\mathbf{j}=-۱/۲\,\mathbf{j}\ \ lb$$

$$\mathbf{M}_G=۱/۲(۳)(۲۰)\mathbf{k}+(۱/۲-۱/۲-۱/۲)(۲۵)\,\mathbf{i}=-۳۰\,\mathbf{i}+۷۲\,\mathbf{k}\ \ lb-in$$

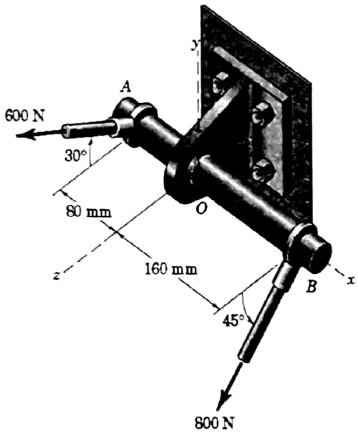


۲-۱۵۶. یک نفت‌کش تحت‌تأثیر نیروی رانش معکوس پروانه‌ی A نیروی رانش رو به جلوی پروانه‌ی B و نیروی رانش جانبی از پیشرانه‌ی قایق C، از موقعیت خود در اسکله فاصله می‌گیرد. سیستم گشتاور- نیروی معادل در مرکز جرم G را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=-۸\,\mathbf{i}\ \ kN$$

$$\mathbf{M}_G=۵۰(۱۰)\mathbf{k}+۸(۶)\,\mathbf{j}+۸(۴۰)\,\mathbf{k}=۴۸\,\mathbf{j}+۸۲۰\,\mathbf{k}\ \ kN.m$$



۲-۱۵۷. سیستم گشتاور- نیرو در O را به گونه‌ای تعیین کنید که با دو نیروی وارده بر محور AOB معادل باشد. آیا $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود است؟

حل:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=۶۰۰(\sin۳۰^\circ\,\mathbf{j}+\cos۳۰^\circ\,\mathbf{k})+۸۰۰\,(-\sin۴۵^\circ\,\mathbf{j}+\cos۴۵^\circ\,\mathbf{k})$$

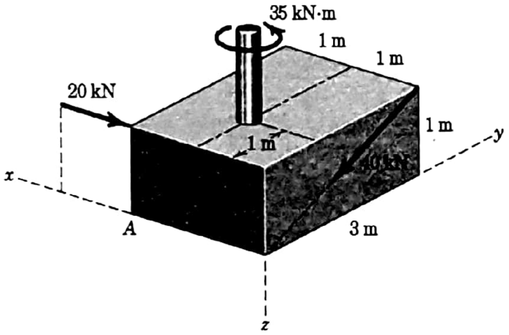
$$=-۲۶۶\,\mathbf{j}+۱۰۸۵\,\mathbf{k}\ \ N$$

$$\mathbf{M}_O=-۰/۰۸۰\,\mathbf{i}\times۶۰۰(\sin۳۰^\circ\,\mathbf{j}+\cos۳۰^\circ\,\mathbf{k})$$

$$+۰/۱۶\,\mathbf{i}\times۸۰۰(-\sin۴۵^\circ\,\mathbf{j}+\cos۴۵^\circ\,\mathbf{k})$$

$$=-۴۸/۹\,\mathbf{j}-۱۱۴/۵\,\mathbf{k}\ \ N$$

$\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود نیست زیرا $\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}_O\neq ۰$.



۲-۱۵۸. دو نیرو و زوج نیروی منفرد را با یک سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی A جایگزین کنید.

حل:

$$\left.\begin{aligned}R_x&=\sum F_x=-۲۰kN\\ R_y&=\sum F_y=-۴۰\cos\left(\tan^{-1}\frac{۱}{۳}\right)=-۳۷/۹kN\\ R_z&=\sum F_z=۴۰\sin\left(\tan^{-1}\frac{۱}{۳}\right)=۱۲/۶۵kN\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \mathbf{R}=-۲۰\,\mathbf{i}-۳۷/۹\,\mathbf{j}+۱۲/۶۵\,\mathbf{k}\ \ kN$$

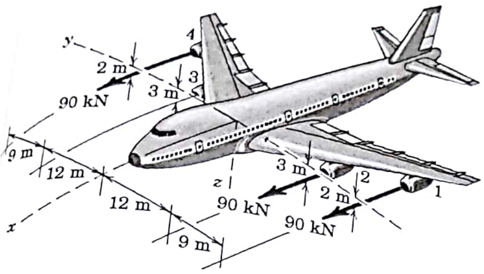
Scanned by CamScanner

$$M_{A_1} = 0$$

$$M_{A_2} = 20(1) + 20\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2) = 25/2\ kN.m$$

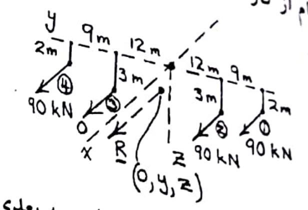
$$M_{A_3} = 20\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}(2) - 25 = 20/9\ kN.m$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} = 25/2\mathbf{j} + 20/9\mathbf{k}\ \ kN.m$$



۱۵۹-۲. هواپیمای مسافربری سه بعدی مسئله‌ی (۲-۹۰) در اینجا مجدداً به صورت سه بعدی نشان داده شده است. اگر موتور شماره ۳ به صورت ناگهانی از کار بیافتد، نیروی برآیند بردارهای پیشرانش سه موتور باقیمانده را تعیین کنید. پیشرانش هر موتور برابر $90 kN$ می‌باشد. مؤلفه‌های y و z نقطه‌ای که خط اثر نیروی برآیند از آن می گذرد، را تعیین کنید. این اطلاعات برای بررسی کارآیی هواپیما در هنگام از کار افتادن موتور ضروری می‌باشد.

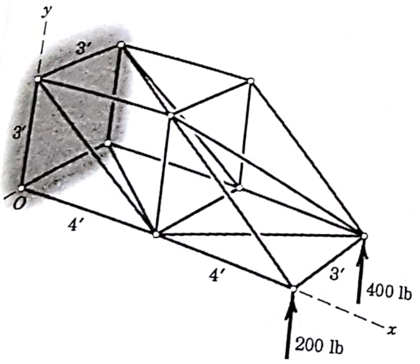
حل:



$$R = \sum F = 3(90) = 270\ kN$$

$$\sum M_z = -Ry = 90(21) + 90(12) - 90(21) \quad , \quad y = -4\,m$$

$$\sum M_y = Rz = 2(90)(2) + 1(90)(3) \quad , \quad z = 2/33\,m$$



۱۶۰-۲. دوبار رو به بالا بر خرپای سه بعدی کوچکی وارد شده‌اند. این دوبار را به یک سیستم گشتاور- نیروی منفرد در نقطه‌ی O کاهش دهید. نشان دهید $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{M}_O$ عمود است. سپس، نقطه‌ای در صفحه‌ی $y-z$ که نیروی برآیند از آن عبور می‌کند، را تعیین کنید.

حل:

$$@\ \ O:\ \ \mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = (200+400)\mathbf{j} = 600\mathbf{j}\ \ lb$$

$$\mathbf{M}_O = 600(8)\mathbf{k} + 400(3)\mathbf{i} = 1200\mathbf{i} + 4800\mathbf{k}\ \ lb-ft$$

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}_O = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{R} \perp \mathbf{M}_O$$ (سیستم بارگذاری را می‌توان با یک نیروی تنها معادل نمود)

با درنظر گرفتن P با مختصات (x,o,z) و اینکه $\mathbf{R}$ در P اعمال شود،

$$\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \quad : \quad (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times 600\mathbf{j} = 1200\mathbf{i} + 4800\mathbf{k}$$

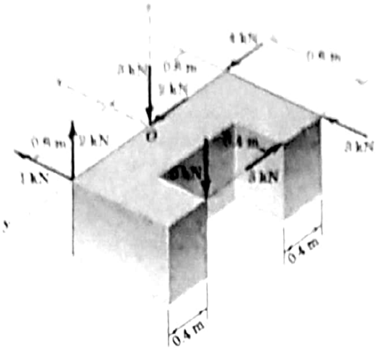
$$600x\mathbf{k} - 600z\mathbf{i} = 1200\mathbf{i} + 4800\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\ x = 8\ ft \quad , \quad z = -2\ ft$$

۱۶۱-۲. سطح بالای افقی یک ستون بتنی تحت سیستم نیروهای نشان داده شده قرار گرفته است. برآیند همه نیروها را به صورت یک نیروی $\mathbf{R}$ در نقطه‌ی O و زوج نیروی $\mathbf{M}$ نشان دهید. همچنین اندازه‌های $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}$ را مشخص کنید.

Scanned by CamScanner

حل:

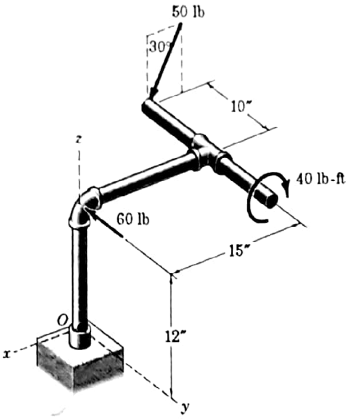


$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=۱\mathbf{i}+۲\mathbf{k}-۲\mathbf{k}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k}-۲\mathbf{j}+۲\mathbf{i}-۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۶\mathbf{k}\ kN$$

$$R=\sqrt{۲^۲+۳^۲+۶^۲}=۷٫۸۱kN$$

$$\mathbf{M}_o=(۰٫۸\mathbf{j}\times۱\mathbf{i})+(۰٫۸\mathbf{j}\times۲\mathbf{k})+([-۰٫۸\mathbf{i}+۰٫۴\mathbf{j}]\times-۵\mathbf{k})$$
$$+([-۰٫۸\mathbf{i}-۰٫۴\mathbf{j}]\times-۲\mathbf{j})+([-۰٫۸\mathbf{i}-۰٫۸\mathbf{j}]\times۲\mathbf{i})$$
$$=-۰٫۸\mathbf{k}+۱٫۶\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-۲\mathbf{i}+۲٫۴\mathbf{k}+۲٫۴\mathbf{k}=-۰٫۴\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۴\mathbf{k}\ kN_m$$

$$M_o=۵٫۶۷\ kN.m$$

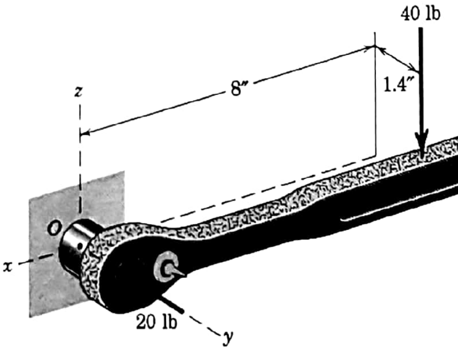


۲-۱۶۲. دو نیرو و زوج نیروی وارده بر قاب لوله‌ای صلب را با نیروی برآیند **R** معادل در نقطه‌ی O و یک زوج نیروی $\mathbf{M}_O$ جایگزین کنید.

حل:

$$\mathbf{R}=-۶۰\mathbf{j}-۵۰\cos۳۰°\mathbf{k}+۵۰\sin۳۰°\mathbf{i}=۲۵\mathbf{i}-۶۰\mathbf{j}-۴۳٫۳\mathbf{k}\quad lb$$

$$\sum\mathbf{M}_O=(۱۲\mathbf{k}\times-۶۰\mathbf{j})+[-۱۵\mathbf{i}-۱۰\mathbf{j}+۱۲\mathbf{k}]\times[۲۵\mathbf{i}-۴۳٫۳\mathbf{k}])-۴۸۰\mathbf{j}$$
$$=۷۲۰\mathbf{i}-۶۴۹٫۵\mathbf{j}+۲۵۰\mathbf{k}+۴۳۳\mathbf{i}+۳۰۰\mathbf{j}-۴۸۰\mathbf{j}$$
$$=۱۱۵۳\mathbf{i}-۸۳۰\mathbf{j}+۲۵۰\mathbf{k}\ lb-in$$



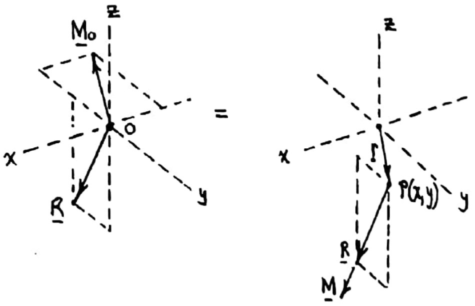
۲-۱۶۳. در فرآیند محکم کردن پیچی که مرکز آن در نقطه‌ی O قرار دارد، فردی با دست راستش نیروی ۴۰lb را به دسته آچار وارد می‌کند. به علاوه، با دست چپ خود، برای نگه داشتن سر آچار روی سرپیچ نیروی ۲۰lb اعمال می‌کند. سیستم گشتاور- نیروی معادل در O را تعیین کنید. نقطه‌ای در صفحه‌ی x-y بیابید که خط اثر نیروی برآیند از آن عبور می‌کند.

حل:

$$\mathbf{R}=-۲۰\mathbf{j}-۴۰\mathbf{k}\,lb=۴۴٫۷(-۰٫۴۴۷\mathbf{j}-۰٫۸۹۴\mathbf{k})\quad lb$$

$$\mathbf{M}_O=-۴۰(۱٫۴)\mathbf{i}-۴۰(۸)\mathbf{j}=-۵۶\mathbf{i}-۳۲۰\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O=-۵۶\mathbf{i}-۳۲۰\mathbf{j}=\mathbf{r}\times\mathbf{R}+\mathbf{M}$$
$$=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(-۲۰\mathbf{j}-۴۰\mathbf{k})+M(-۰٫۴۴۷\mathbf{j}-۰٫۸۹۴\mathbf{k})$$



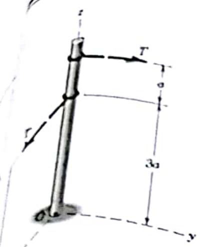
با مساوی قرار دادن ضرایب،

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{i}:\ -۵۶=-۴۰y\\ \mathbf{j}:\ -۳۲۰=۴۰x-۰٫۴۴۷M\\ \mathbf{k}:\ ۰=-۲۰x-۰٫۸۹۴M\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x=-۶٫۴\,in\\ y=۱٫۴\,in\end{array}$$

۲-۱۶۴. دو نیروی وارده بر تیرک را با یک رنچ جایگزین کنید. گشتاور **M** مربوط به آچار را به صورت

Scanned by CamScanner

... برداری نوشته و مختصات نقطه‌ی P در صفحه‌ی y-z که خط اثر رنج از آن عبور می‌کند، را بیابید.



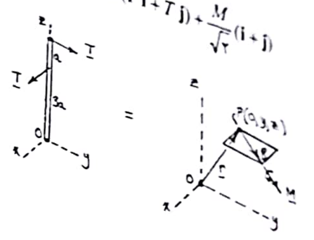
حل:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=T\mathbf{i}+T\mathbf{j}=\sqrt{2}\,T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right]$$

$$\sum\mathbf{M}_o=3aT\,\mathbf{j}-4aT\,\mathbf{i}$$

$$\sum\mathbf{M}_o=\mathbf{r}\times\mathbf{R}+\mathbf{M}\quad:\quad 3aT\,\mathbf{j}-4aT\,\mathbf{i}=(y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\times(T\mathbf{i}+T\mathbf{j})+\frac{M}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

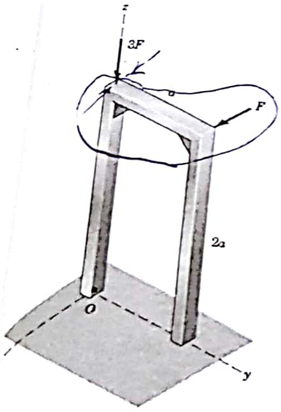
$$\Rightarrow\begin{cases}-4aT=-zT+\dfrac{M}{\sqrt{2}}\\ 3aT=zT+\dfrac{M}{\sqrt{2}}\\ 0=-yT\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ z=\dfrac{7}{2}a\\ M=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}aT\end{cases}$$



بنابراین

$$\mathbf{M}=-\frac{\sqrt{2}}{2}aT\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)=-\frac{aT}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})\quad\text{(یک رنج منفی)}$$

۲-۱۶۵. دو نیروی وارده بر قاب را با یک رنج جایگزین کنید. گشتاور مربوط به رنج را به صورت برداری نوشته و مختصات نقطه‌ی P در صفحه‌ی y-z که خط اثر رنج از آن عبور می‌کند، را تعیین نمایید. توجه داشته باشید نیروی با اندازه F موازی محور x ها می‌باشد.



حل:

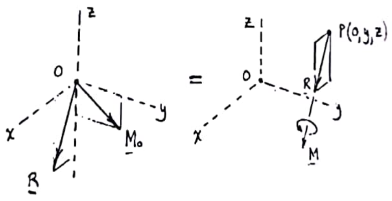
$$@\,O:\begin{cases}\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=F\mathbf{i}-3F\mathbf{k}=\sqrt{10}\,F\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i}-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{k}\right)\\ \mathbf{M}_o=F(2a)\mathbf{j}-F(a)\mathbf{k}=Fa(2\mathbf{j}-\mathbf{k})\end{cases}$$

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}=3F^2a\neq 0\;\Rightarrow\;\mathbf{R}\not\perp\mathbf{M}_o$$

$$\mathbf{M}_o=\mathbf{M}+\mathbf{r}_{OP}\times\mathbf{R}\quad:\quad Fa(2\mathbf{j}-\mathbf{k})=M\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i}-\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{k}\right)+(y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\times(F\mathbf{i}-3F\mathbf{k})$$

با مساوی قرار دادن ضرایب،

$$\begin{cases}\mathbf{i}:\;0=-3Fy+\dfrac{M}{\sqrt{10}}\\ \mathbf{j}:\;2Fa=Fz\\ \mathbf{k}:\;-Fa=-Fy-\dfrac{3M}{\sqrt{10}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{a}{10}\\ z=2a\\ M=\dfrac{3\sqrt{10}aF}{10}=0.949Fa\end{cases}$$

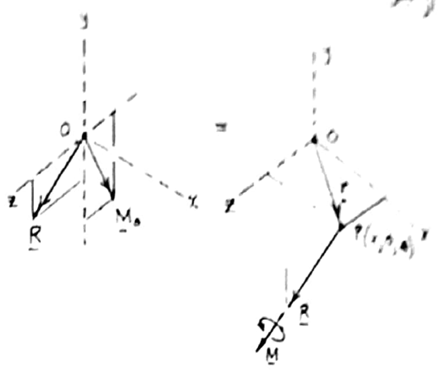


$$\Rightarrow\mathbf{M}=\frac{3\sqrt{10}\,aF}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i}-\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{k}\right)=\frac{3aF}{10}(\mathbf{i}-3\mathbf{k})$$

۲-۱۶۶. برای سیستم دو نیروی مسئله‌ی (۲-۱۵۷)، مختصات نقطه‌ای در صفحه‌ی x-z را تعیین کنید که خط اثر نیروی برآیند سیستم از آن عبور می‌کند.

حل:

از جواب مسئله‌ی (۲-۱۵۷)، سیستم گشتاور- نیرو در O به صورت

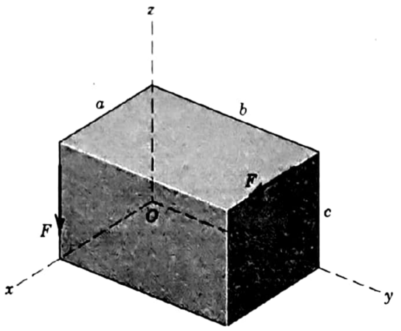


$$\begin{cases}\mathbf{R}=-۲۶۶\mathbf{i}+۱۰۸۵\mathbf{k}\ \ N\\ \mathbf{M}_o=-۲۸/۹\mathbf{j}-۱۱۴/۵\mathbf{k}\ \ N.m\end{cases}$$

$$\mathbf{M}_o=\mathbf{r}\times\mathbf{R}+\mathbf{M}=(x\mathbf{i}+z\mathbf{k})\times(-۲۶۶\mathbf{j}+۱۰۸۵\mathbf{k})$$
$$+M(-۰/۲۲۸\mathbf{j}+۰/۹۷۱\mathbf{k})$$

با مساوی قرار دادن ضرایب،

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{i}\ :\ ۰=۲۶۶z\\ \mathbf{j}\ :\ -۴۸/۹=-۱۰۸۵x-۰/۲۲۸M\\ \mathbf{k}\ :\ -۱۱۴/۵=-۲۶۶x+۰/۹۷۱M\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=۰/۰۶۶۹(۶۶/۹mm)\\ z=۰\\ M=-۹۹/۶N.m\end{cases}$$



۲-۱۶۷. دو نیروی وارده بر مکعب صلب را با یک رنچ جایگزین کنید. گشتاور M مربوط به این رنچ را به صورت برداری نوشته و مختصات نقطه‌ی P در صفحه‌ی x-y را تعیین کنید که خط اثر رنچ از آن عبور می‌کند.

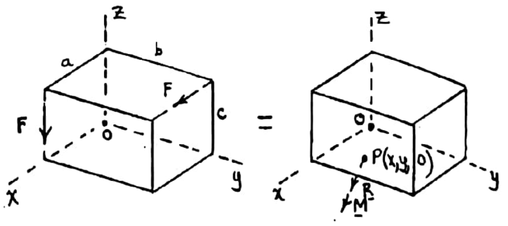
حل:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=F\,\mathbf{i}-F\,\mathbf{k}=\sqrt{۲}\,F\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)$$

$$\sum\mathbf{M}_o=aF\,\mathbf{j}+cF\,\mathbf{j}-bF\,\mathbf{k}=F[(a+c)\,\mathbf{j}-b\mathbf{k}]=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times\mathbf{R}+\mathbf{M}$$
$$=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(F\mathbf{i}-F\mathbf{k})+M\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)=\left(-Fy+\frac{M}{\sqrt{۲}}\right)\mathbf{i}+(Fx)\,\mathbf{j}+\left(-Fy-\frac{M}{\sqrt{۲}}\right)\mathbf{k}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب،

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{i}\ :\ ۰=-Fy+\dfrac{M}{\sqrt{۲}}\\ \mathbf{j}\ :\ F(a+c)=Fx\\ \mathbf{k}\ :\ -b=-Fy-\dfrac{M}{\sqrt{۲}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=a+c\\ y=\dfrac{b}{۲}\\ M=\dfrac{Fb\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$



$$\Rightarrow\ \ \mathbf{M}=\frac{Fb\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)=\frac{Fb}{۲}(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

۲-۱۶۸. سیستم دو نیروی نشان داده شده در مسئله‌ی (۲-۱۵۸) را با یک رنچ جایگزین کنید. اندازه‌ی گشتاور M مربوط به رنچ، اندازه‌ی نیروی R مربوط به رنچ و مختصات نقطه‌ی P در صفحه‌ی x-y که R از آن می‌گذرد، را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=-۲۰\mathbf{i}-۴۰\frac{۳}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}\mathbf{j}+۴۰\frac{۱}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}\mathbf{k}=-۲۰\mathbf{i}-۳۷/۹\mathbf{j}+۱۲/۶۵\mathbf{k}\ \ kN$$

$$R=\sqrt{R_x^۲+R_y^۲+R_z^۲}=۴۴/۷\ \ kN$$

کسینوس‌های هادی بردار **R**:

Scanned by CamScanner

$$\left\{ l=-\frac{۲۰}{۴۴/۷}=-۰/۴۴۷ \quad , \quad m=\frac{-۳۷/۹}{۴۴/۷}=-۰/۸۴۹ \quad , \quad n=\frac{۱۲/۶۵}{۴۴/۷}=۰/۲۸۳ \right.$$

با در نظر گرفتن مختصات P به صورت $P=P(x,y,0)$

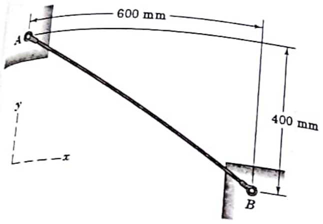
$$M=\sum \mathbf{M}_P=۲۰(-y\mathbf{k}+\mathbf{j})+۳۷/۹(x\mathbf{k}-\mathbf{i})+۱۲/۶۵[(۳-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}]$$

$$\Rightarrow -۳۵\mathbf{k}=-۱۲/۶۵y\mathbf{i}+(۲۰+۱۲/۶۵x)\mathbf{j}+(۳۷/۹x-۲۰y-۳۵)\mathbf{k} \quad kN.m$$

با داشتن کسینوس‌های هادی بردار $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}$،

$$\left.\begin{aligned} -۰/۴۴۷&=\frac{-۱۲/۶۵y}{M} \\ -۰/۸۴۹&=\frac{(۲۰+۱۲/۶۵x)}{M} \\ ۰/۲۸۳&=\frac{(۳۷/۹x-۲۰y-۳۵)}{M} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=۰/۲۲۱m \\ y=-۰/۹۵۰m \\ M=-۲۶/۹kN.m \end{cases}$$

$\mathbf{M}$ و $\mathbf{R}$ دارای جهات خلاف هم می‌باشند.

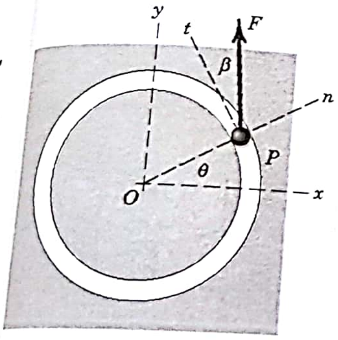


۲-۱۶۹. کابلی بین تکیه‌گاه‌های ثابت A و B با نیروی T برابر $۲kN$ کشیده شده است. نیروی کششی را با استفاده از بردارهای یکه به صورت برداری بیان کنید. ابتدا، به صورت یک نیروی T_A وارده بر A و در ادامه، به صورت یک نیروی T_B وارده بر B

حل:

$$T_A=\frac{۲}{\sqrt{۰/۶^۲+۰/۴^۲}}(۰/۶\mathbf{i}-۰/۴\mathbf{j})=۱/۶۶۴\mathbf{i}-۱/۱۰۹\mathbf{j} \quad kN$$

$$T_B=-\mathbf{T}_A=-۱/۶۶۴\mathbf{i}+۱/۱۰۹\mathbf{j} \quad kN$$

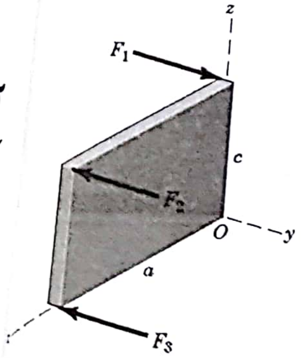


۲-۱۷۰. مؤلفه‌ی y نیروی $\mathbf{F}$ وارده بر پین P برابر $۲۰lb$ است، درحالی که $\theta=۲۵°$ و $\beta=۱۵°$ می‌باشد. اندازه‌ی نیروی F و مؤلفه‌ی x نیروی $\mathbf{F}$ را تعیین کنید.

حل:

$$F_y=F\cos(\theta-\beta) \quad : \quad ۲۰=F\cos ۱۵° \ \Rightarrow \ F=۲۰/۷lb$$

$$F_x=-F\sin(\theta-\beta) \ \Rightarrow \ F_x=-۲۰/۷\sin ۱۵°=-۵/۳۶lb$$



۲-۱۷۱. سه نیرو به صورت عمود بر صفحه‌ای مستطیلی وارد می‌شوند، مطابق شکل. گشتاورهای $\mathbf{M}_۱$ نیروی $\mathbf{F}_۱$، $\mathbf{M}_۲$ نیروی $\mathbf{F}_۲$ و $\mathbf{M}_۳$ نیروی $\mathbf{F}_۳$ را حول نقطه‌ی O تعیین کنید.

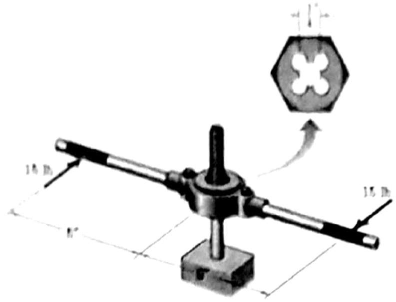
حل:

$$\mathbf{M}_۱=c\mathbf{k}\times -F_۱\mathbf{j}=cF_۱\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{M}_۲=(a\mathbf{i}+c\mathbf{k})\times F_۲\mathbf{j}=(-c\mathbf{i}+a\mathbf{k})F_۲$$

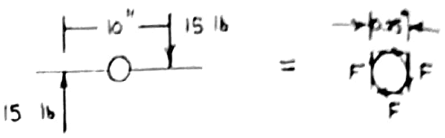
$$\mathbf{M}_۳=a\mathbf{i}\times -F_۳\mathbf{j}=-aF_۳\mathbf{k}$$

۲-۱۷۲. برای رزوه کردن میله‌ای، حدیده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. اگر نیروهای $۱۵lb$ مطابق شکل اعمال شده باشند، اندازه‌ی F نیروهای مساوی وارده بر میله‌ی به قطر $\frac{۱}{۴}in$ توسط هر یک از چهار سطح برادۀ

بردار را به گونه‌ای تعیین کنید که اثر خارجی آنها معادل اثر دو نیروی $15lb$ باشد.

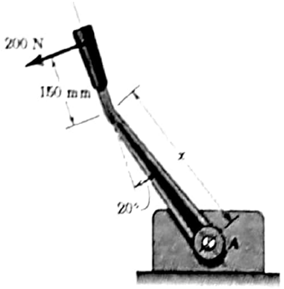


حل:

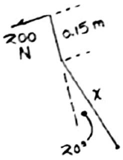


$$M = Fd = ۱۵(۱۰) = ۲F(۰/۲۵) \Rightarrow F = ۳۰۰lb$$

۱۷۳-۲. اهرم کنترلی تحت یک زوج نیروی ساعتگرد $۸۰N.m$ توسط محور خود در A قرار گرفته و مطابق شکل برای عملکرد با یک نیروی کششی $۲۰۰N$ طراحی شده است. اگر برآیند نیرو و زوج نیرو از نقطه‌ی A بگذرد، اندازه‌ی مناسب x اهرم را تعیین کنید.

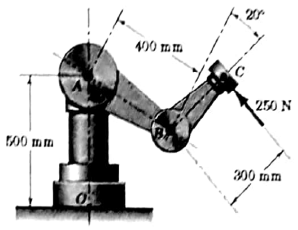


حل:

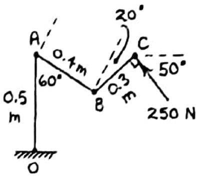


$$M_A = Fd \quad : \quad ۸۰ = ۲۰۰(۰/۱۵ + x\cos ۲۰°) \quad \Rightarrow \quad x = ۰/۲۶۶ m = ۲۶۶ mm$$

۱۷۴-۲. گشتاور M_O نیروی $۲۵۰N$ را حول نقطه‌ی O پایه‌ی روبات تعیین کنید.



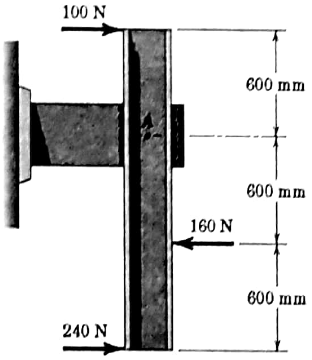
حل:



$$\curvearrowleft + \sum M_O = ۲۵۰\cos ۵۰°[۰/۵ - ۰/۴\cos ۶۰۰ + ۰/۳\sin ۴۰°] + ۲۵۰\sin ۵۰°[۰/۴\sin ۶۰° + ۰/۳\cos ۴۰°]$$

$= ۱۸۹/۶ N.m$ (پادساعتگرد)

۱۷۵-۲. سه نیروی نشان داده شده را با یک سیستم گشتاور- نیروی معادل در نقطه‌ی A جایگزین کنید. اگر نیروها با یک نیروی برآیند منفرد جایگزین شوند، فاصله‌ی d زیر نقطه‌ی A تا خط اثر آن را تعیین کنید.



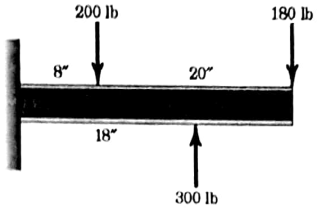
حل:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = ۲۴۰ + ۱۰۰ - ۱۶۰ = ۱۸۰N$$

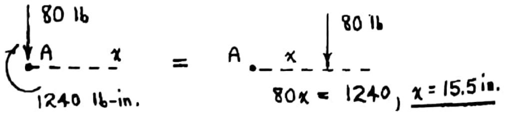
$$\curvearrowleft + \sum M_A = ۲۴۰(۱۲۰۰) - ۱۶۰(۶۰۰) - ۱۰۰(۶۰۰) = ۱۸۰d$$

$$\Rightarrow \quad d = ۷۳۳/۳ mm = ۰/۷۳۳ m$$

۱۷۶-۲. سیستم تحت بار نشان داده شده را به یک سیستم گشتاور- نیرو در نقطه‌ی A کاهش دهید. سپس، فاصله‌ی x نیروی برآیند از نقطه‌ی A را تعیین کنید.



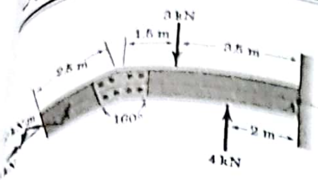
حل:



$$@ A : \quad R = \sum F = ۲۰۰ + ۱۸۰ + ۳۰۰ = ۸۰lb \ (\downarrow)$$

$$\curvearrowright + \ M_A = ۲۰۰(۸) + ۱۸۰(۲۸) - ۳۰۰(۱۸) = ۱۲۴۰lb - in$$

Scanned by CamScanner



... و گشتاور - نیرو

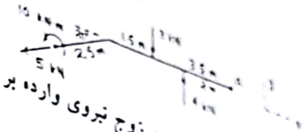
حل:

$R_x = \sum F_x = -5\cos 20° = -۴/۷۰ \ kN$

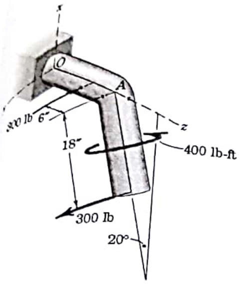
$R_y = \sum F_y = -5\sin 20° + 4 - 3 = -۰/۷۱ \ kN$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = ۴/۷۵ \ kN$

$\sum M_A = ۱۰ + ۵\sin ۲۰°(۵) + ۳(۳/۵) - ۴(۲) = ۲۱/۱ \ kN$



۲-۱۷۸. برآیند دو نیرو و زوج نیروی وارده بر محور خمیده در صفحه‌ی y-z را به دست آورید.



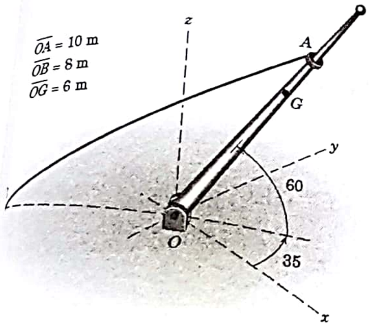
حل:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = -۳۰۰\mathbf{j} + ۳۰۰\mathbf{j} = ۰$$

$$\sum M_A = (-۶\mathbf{k} \times -۳۰۰\mathbf{j}) + [۱۸(-\cos ۲۰°\mathbf{i} + \sin ۲۰°\mathbf{k}) \times ۳۰۰\mathbf{j}] + ۴۸۰۰(\cos ۲۰°\mathbf{i} - \sin ۲۰°\mathbf{k})$$

$$= -۱۸۰۰\mathbf{i} - ۵۰۷۴\mathbf{k} - ۱۸۴۷\mathbf{i} + ۴۵۱۰/۵\mathbf{i} - ۱۶۴۲\mathbf{k} = ۸۶۴\mathbf{i} - ۶۷۱۶\mathbf{k} \quad lb-in$$

$$M = \sqrt{۸۶۴^2 + ۶۷۱۶^2} = ۶۷۷۱ \quad lb-in$$



۲-۱۷۹. هنگامی که دیرک OA در موقعیت نشان داده شده است، کشش در کابل AB برابر $۲kN$ می‌باشد. (الف) با استفاده از مختصات نشان داده شده، نیروی کششی وارده بر لغزنده‌ی کوچک در نقطه‌ی A را به صورت برداری بنویسید. (ب) گشتاور این نیرو حول نقطه O را تعیین کرده و گشتاورها حول محورهای x، y و z را بیان نمایید. (ج) تصویر این نیروی کششی روی خط OA را بیابید.

حل:

$$\overline{AB}^2 = ۸^2 + ۱۰^2 - ۲(۸)(۱۰)\cos ۱۲۰° \Rightarrow \overline{AB} = ۱۵/۶۲ \ m$$

الف)

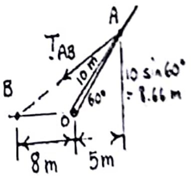
$$T_{AB} = ۲\left[-\frac{۱۳}{۱۵/۶۲}\cos ۳۵°\mathbf{i} - \frac{۱۳}{۱۵/۶۲}\sin ۳۵°\mathbf{j} - \frac{۸/۶۶}{۱۵/۶۲}\mathbf{k}\right] = -۲/۰۵\mathbf{i} - ۱/۴۳۲\mathbf{j} - ۱/۶۲۲\mathbf{k} \quad kN$$

ب) از رابطه‌ی $\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{T}_{AB}$، که در آن $\mathbf{r}_{OB} = ۸(-\cos ۳۵°\mathbf{i} - \sin ۳۵°\mathbf{j})m$، به دست می‌آید

$$M_o = ۷/۶۳\mathbf{i} - ۱۰/۶۹\mathbf{j} \quad kN.m$$

$$M_{o_x} = ۷/۶۳ \ kN.m \quad , \quad M_{o_y} = -۱۰/۹ \ .m \quad , \quad M_{o_z} = ۰$$

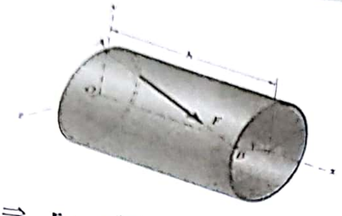
ج)



$$T_{AO} = \mathbf{T}_{AB} \cdot \mathbf{n}_{AO} \quad , \quad \mathbf{n}_{AO} = -\cos ۶۰° \cos ۳۵°\mathbf{i} - \cos ۶۰° \sin ۳۵°\mathbf{j} - \sin ۶۰°\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow T_{AO} = ۲/۶۹ \ kN$$

Scanned by CamScanner



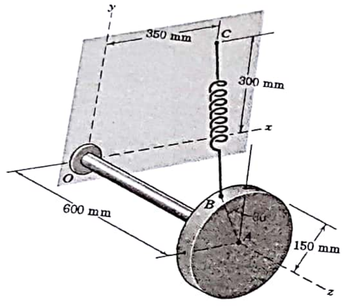
۲-۱۸۰. نیروی F در امتداد خط AB واقع روی دیواره‌ی داخلی پوسته استوانه‌ای نشان داده شده، اعمال شده است. کمیت‌های r، h، θ و F معلوم می‌باشند. با استفاده از مختصات x-y-z نشان داده شده، F را به صورت برداری بنویسید.

حل:

$$A:(x_A,y_A,z_A)=(۰,r,۰)\quad,\quad B:(x_B,y_B,z_B)=(h,r\cos\theta,r\sin\theta)$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{r}_{AB}=h\mathbf{i}+(r\cos\theta-r)\mathbf{j}+r\sin\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}=F\mathbf{n}_{AB}=F\left[\frac{h\mathbf{i}+r(\cos\theta-۱)\mathbf{j}+r\sin\theta\mathbf{k}}{\sqrt{h^۲+r(\cos\theta-۱)^۲+[r\sin\theta]^۲}}\right]=F\left[\frac{h\mathbf{i}+r(\cos\theta-۱)\mathbf{j}+r\sin\theta\mathbf{k}}{\sqrt{h^۲+۲r^۲(۱-\cos\theta)}}\right]$$



۲-۱۸۱. فنری که نقطه‌ی B دیسک و نقطه‌ی C روی صفحه‌ی قائم را به یکدیگر متصل می‌کند، تحت نیروی کششی $۵۰۰N$ قرار دارد. این نیروی کششی را هنگامی که بر نقطه‌ی B وارد می‌شود، به صورت نیروی برداری T برحسب بردارهای یکه i، j و k بنویسید و گشتاور M_z این نیرو را حول محور شفت OA تعیین کنید.

حل:

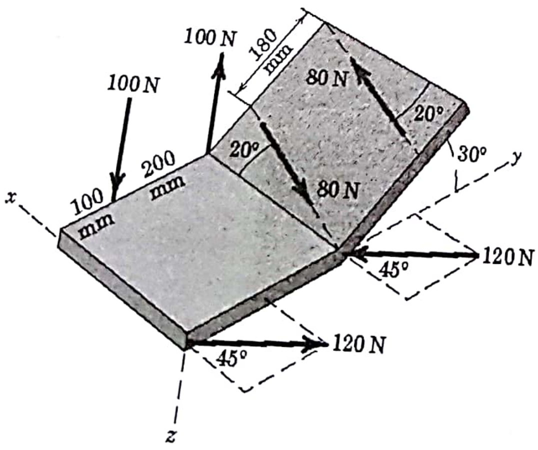
$$BC=(۳۵۰+۱۵۰\sin۳۰^\circ)\mathbf{i}+(۳۰۰-۱۵۰\cos۳۰^\circ)\mathbf{j}-۶۰۰\mathbf{k}$$
$$=۴۲۵\mathbf{i}+۱۷۰\mathbf{j}-۶۰۰\mathbf{k}\ mm$$

$$\mathbf{n}_{BC}=\frac{۴۲۵\mathbf{i}+۱۷۰\mathbf{j}-۶۰۰\mathbf{k}}{\sqrt{۴۲۵^۲+۱۷۰^۲+۶۰۰^۲}}=۰/۵۶۴\mathbf{i}+۰/۲۲۵\mathbf{j}-۰/۷۹۶\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}=۵۰۰(۰/۵۶۴\mathbf{i}+۰/۲۲۵\mathbf{j}-۰/۷۹۶\mathbf{k})=۲۸۲\mathbf{i}+۱۱۲/۷\mathbf{j}-۳۹۸\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_A=\mathbf{r}\times\mathbf{T}=۱۵۰(-\sin۳۰^\circ\mathbf{i}+\cos۳۰^\circ\mathbf{j})\times(۲۸۲\mathbf{i}+۱۱۲/۷\mathbf{j}-۳۹۸\mathbf{k})$$
$$=-۸۴۵۲/۵\mathbf{k}-۲۹۸۵۰\mathbf{j}-۳۶۶۳۲/۹\mathbf{k}-۵۱۷۰۱/۷\mathbf{i}$$

$$\Rightarrow\quad M_{A_z}=-۴۵۰۸۵/۴\ \ N.mm\approx-۴۵\,N.m$$



۲-۱۸۲. سه زوج نیرو توسط سه جفت نیروی مساوی و خلاف جهت یکدیگر تشکیل شده‌اند. برآیند M این سه زوج نیرو را بیابید.

حل:

$$\mathbf{M}_{۱۰۰}=-۱۰۰(۰/۲۰۰)\mathbf{i}=-۲۰\mathbf{i}\ N.m$$

$$\mathbf{M}_{۸۰}=۸۰(۰/۱۸۰\cos۲۰^\circ)(-\mathbf{j}\sin۳۰^\circ-\mathbf{k}\cos۳۰^\circ)$$
$$=-۶/۷۷\mathbf{j}-۱۱/۷۲\mathbf{k}\ \ N.m$$

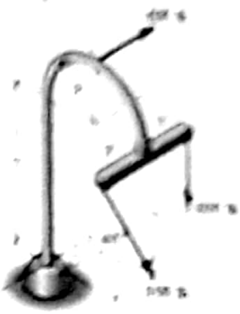
$$\mathbf{M}_{۱۲۰}=-۱۲۰(۰/۳۰۰\cos۴۵^\circ)\mathbf{k}=-۲۵/۵\mathbf{k}\ \ N.m$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{M}=-۲۰\mathbf{i}-۶/۷۷\mathbf{j}-۳۷/۲\mathbf{k}\ \ N.m$$

۲-۱۸۳. اثر ترکیبی سه نیرو روی پایه‌ی O را می‌توان با به دست آوردن برآیند آنها حول O، مورد بررسی قرار داد. اندازه‌ی R و زوج نیروی متناظر M را تعیین کنید.

Scanned by CamScanner

حل:



$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = ۵۰۰\cos۴۵^\circ\,\mathbf{i} + ۲۰۰\,\mathbf{j} - (۶۰۰ + ۵۰۰\sin۴۵^\circ)\,\mathbf{k} = ۳۵۴\,\mathbf{i} + ۲۰۰\,\mathbf{j} - ۹۵۴\,\mathbf{k}\ \ lb$

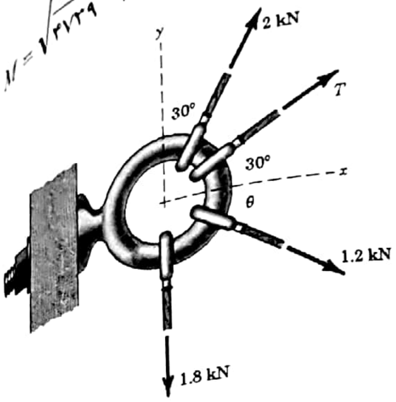
$R = \sqrt{۳۵۴^۲ + ۲۰۰^۲ + ۹۵۴^۲} = ۱۰۹۲\ lb$

$\mathbf{M} = [۵۰۰\cos۴۵^\circ(۲) - ۶۰۰(۳) + ۲۰۰(۱۰)]\,\mathbf{i} + [۵۰۰\cos۴۵^\circ(۶) + ۵۰۰\sin۴۵^\circ(۷) + ۶۰۰(۶)]\,\mathbf{j}$

$+[۵۰۰\sin۴۵^\circ(۲) + ۲۰۰(۳)]\,\mathbf{k} = -۴۷۲۹\,\mathbf{i} + ۸۱۹۶\,\mathbf{j} + ۲۲۶۱\,\mathbf{k}\ \ lb-ft$

$M = \sqrt{۴۷۲۹^۲ + ۸۱۹۶^۲ + ۲۲۶۱^۲} = ۹۷۳۰\ lb-ft$

۲-۱۸۴. پیچ سر سوراخی چهار نیروی نشان داده شده را تحمل می‌کند. اگر اثر خالص روی پیچ، یک کشش مستقیم $۲kN$ در جهت x باشد، مقادیر لازم θ و T را تعیین کنید.



حل:

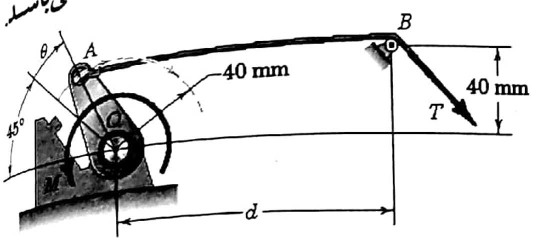
$\Sigma F_x = ۰ \quad : \quad ۲\sin۳۰^\circ + T\cos۳۰^\circ + ۱/۲\cos\theta = ۰$ (۱)

$\Sigma F_y = ۰ \quad : \quad ۲\cos۳۰^\circ + T\sin۳۰^\circ - ۱/۲\sin\theta - ۱/۸ = ۰$ (۲)

حل عددی معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌دهد:

$\theta = ۲۱/۷^\circ \quad , \quad T = ۱/۰۲۲\,kN$

۲-۱۸۵. اهرم کنترل دریچه OA در محدوده‌ی $۰ \le \theta \le ۹۰^\circ$ دوران می‌کند. یک فنر پیچشی داخلی بازگرداننده، گشتاور بازیابی حول O به صورت $M = K(\theta + \frac{\pi}{۴})$ اعمال می‌کند، در آن $K = ۵۰۰N.mm/rad$ و θ برحسب رادیان می‌باشد. کشش T موردنیاز برای صفر شدن گشتاور برآیند حول O را به صورت تابعی از θ تعیین کرده و رسم نمایید. از دو مقدار $d = ۱۶۰mm$ و $d = ۶۰mm$ استفاده کرده و در مورد مزیت نسبی آنها نظر دهید. اثرات شعاع پولی در B قابل صرف‌نظر می‌باشد.

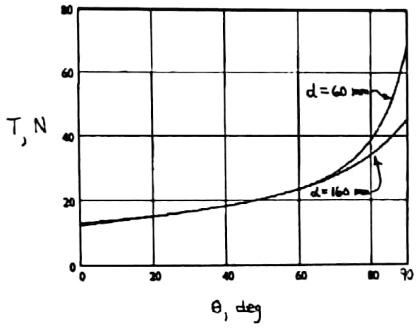


حل:

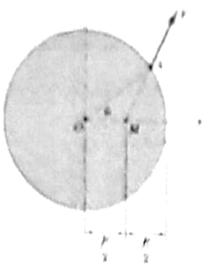
$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = \mathbf{T}\left[\frac{(d + ۴۰\cos\beta)\mathbf{i} + ۴۰(۱-\sin\beta)\,\mathbf{j}}{\sqrt{(d+۴۰\cos\beta)^۲ + ۴۰^۲(۱-\sin\beta)^۲}}\right] \quad , \quad \beta = \theta + \frac{\pi}{۴} \quad , \quad \mathbf{r}_{OB} = d\,\mathbf{i} + ۴۰\,\mathbf{j}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_o = ۰ \quad : \quad \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{T} + K\beta\,\mathbf{k} = ۰$$

$$T = \frac{۱۲/۵(\theta + \frac{\pi}{۴})\sqrt{d^۲ + ۸۰d\cos(\theta+\frac{\pi}{۴}) - ۳۲۰۰\sin(\theta+\frac{\pi}{۴}) + ۳۲۰۰}}{[d\sin(\theta+\frac{\pi}{۴}) + ۴۰\cos(\theta+\frac{\pi}{۴})]}$$



Scanned by CamScanner



۲-۱۸۶. شکل مسئله‌ی (۲-۷۸) در اینجا مجدداً آورده شده است. نیروی با اندازه‌ی F در امتداد خط MA اعمال می‌شود، که M نقطه‌ی میانی شعاع در امتداد محور x می‌باشد. گشتاور این نیرو حول نقطه‌ی مبدأ O را به صورت تابعی از θ در محدوده‌ی $0 \le \theta \le 90^\circ$ به دست آورده و رسم نمایید. حداکثر مقدار M_O و θ متناظر آن را بیابید.

حل:

با به کارگیری قانون کسینوس‌ها در مثلث OMA،

$$\overline{MA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 - 2\overline{OA}\cdot\overline{MA}\cos\theta = R^2 + \frac{R^2}{4} - R^2\cos\theta = R^2\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)$$

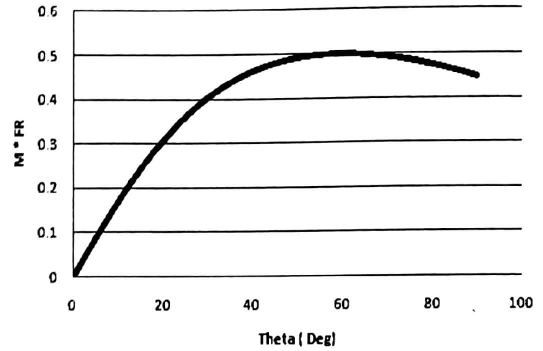
با به کارگیری قانون سینوس‌ها در مثلث OMA و $\beta = \angle OMA$،

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\beta} = \frac{\overline{MA}}{\sin\theta} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left\{\frac{\overline{OM}\sin\theta}{\overline{MA}}\right\} = \sin^{-1}\left\{\frac{\frac{R}{2}\sin\theta}{R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}}\right\} = \sin^{-1}\left\{\frac{\sin\theta}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}\right\}$$

$$\mathbf{F} = F\{\cos(\theta+\beta)\mathbf{i} + \sin(\theta+\beta)\mathbf{j}\}$$

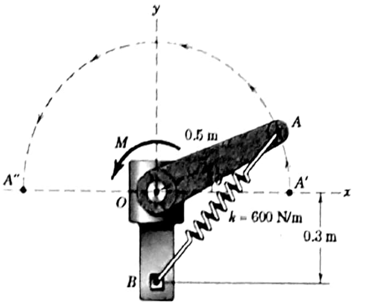
$$M_O = -FR\cos(\theta+\beta)\sin\theta + FR(\theta+\beta)\cos\theta$$

با نوشتن برنامه‌ی کامپیوتری به ازای مقادیر مختلف θ، مقدار M_O به صورت زیر به دست می‌آید:



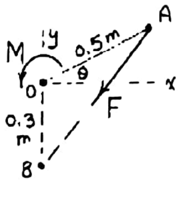
با توجه به شکل مشاهده می‌شود

$$(M_O)_{\max} = 0.5FR @ \theta = 60^\circ$$



۲-۱۸۷. موتور متصل به شفت در O باعث دوران بازوی OA در محدوده‌ی $0 \le \theta \le 180^\circ$ می‌شود. طول بدون کشیدگی فنر $0.65m$ بوده و می‌تواند هر دوی کشش و فشار را تحمل کند. اگر بخواهد گشتاور خالص حول O برابر صفر باشد، گشتاور موردنیاز موتور M را به صورت تابعی از θ تعیین کرده و رسم نمایید.

حل:



$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{AB} = \frac{F\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}, \quad \mathbf{AB} = -0.5\cos\theta\mathbf{i} - (0.5\sin + 0.3)\mathbf{j}m$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(0.5\cos\theta)^2 + (0.5\sin\theta) + 0.3)^2} = \sqrt{0.34 + 0.3\sin\theta}m$$

$$F = k\delta = 600[\sqrt{0.34 + 0.3\sin\theta} - 0.65]N$$

Scanned by CamScanner

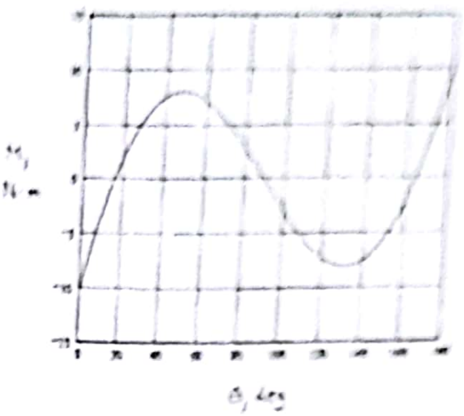
$$\ldots[\sqrt{۰/۲۴+۰/۲\sin\theta}-۰/۶۵][-۰/۵\cos\theta\mathbf{i}-(۰/۵\sin\theta+۰/۲)]]$$
$$\sqrt{۰/۲۴+۰/۲\sin\theta}$$

با داشتن $\mathbf{r}_{OB}=-۰/۲\mathbf{j}m$، $\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{F}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

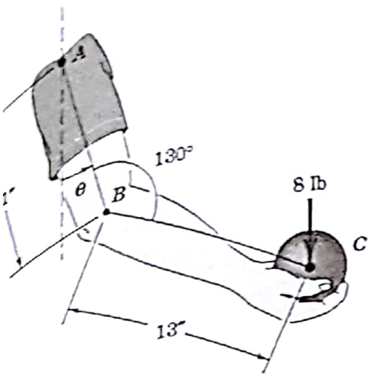
$$\ldots\times\mathbf{F}=\frac{۹۰\cos\theta(\sqrt{۰/۲۴+۰/۲\sin\theta}-۰/۶۵)}{\sqrt{۰/۲۴+۰/۲\sin\theta}}\mathbf{k}$$

مقدار به دست آمده به علاوه $M\mathbf{k}$ باید برابر صفر شود، بنابراین

$$=\frac{۹۰\cos\theta(\sqrt{۰/۲۴+۰/۲\sin\theta}-۰/۶۵)}{\sqrt{۰/۲۴+۰/۲\sin\theta}}$$

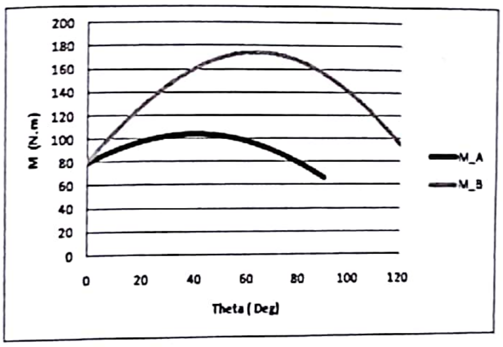


۲-۱۸۸. فردی آرنج خود را به صورتی قفل کرده است که زاویه‌ی ABC برابر ۱۳۰° باشد و مفصل شانه خود را به گونه‌ای می‌چرخاند که بازوی وی در صفحه‌ی قائم باقی بماند، مطابق شکل. مفصل شانه ثابت می‌باشد. گشتاورهای نیروی وزن کره‌ی $۸lb$ حول نقاط A و B را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ در محدوده‌ی ۰° تا ۱۲۰° به دست آورده و روی یک نمودار رسم نمایید. در مورد اهمیت فیزیکی مقدار حداکثر گشتاور روی هر منحنی نظر دهید.

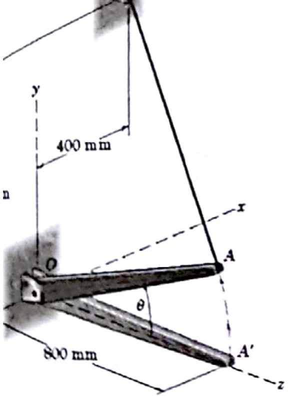


حل:

$$M_B=۸\times۱۳\sin(۵۰+\theta)=۱۰۴\sin(\theta+۵۰°)\,lb-in$$
$$M_A=۸\times\{۱۱\sin\theta+۱۳\sin(۵۰+\theta)\}=۸۸\sin\theta+۱۰۴\{\sin۵۰°\cos\theta+\cos۵۰°\sin\theta\}$$
$$=۱۵۴/۸\sin\theta+۷۹/۷\cos\theta\;\;lb-in$$



۲-۱۸۹. کشش T در کابل AB برابر مقدار ثابت $۱۲۰N$ نگه داشته می‌شود. گشتاور $\mathbf{M}_o$ این نیروی کششی حول نقطه‌ی O را در محدوده‌ی $۰\le\theta\le۹۰°$ به دست آورید. مؤلفه‌های x، y و z این گشتاور را به صورت توابعی از θ ترسیم نمایید.



حل:

$$\mathbf{T}=T\mathbf{n}_{AB}=T\frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}=۱۲۰\left[\frac{۰/۴\mathbf{i}+۰/۸(۱-\sin\theta)\mathbf{j}-۰/۸\cos\theta\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۴^۲+۰/۸^۲(۱-\sin\theta)^۲+۰/۸^۲\cos^۲\theta}}\right]$$

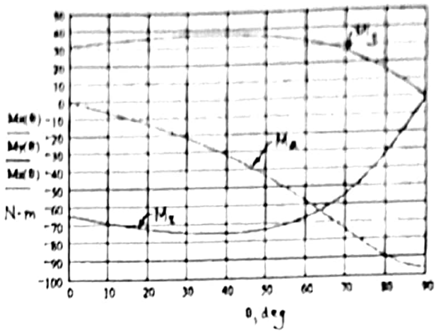
$$=\frac{۴۸\mathbf{i}+۹۶(۱-\sin\theta)\mathbf{j}-۹۶\cos\theta\mathbf{k}}{\sqrt{۱/۴۴-۱/۲۸\sin\theta}}N$$

$\mathbf{r}_{OB}=۰/۴\mathbf{i}+۰/۸\mathbf{j}m$، بنابراین $\mathbf{M}_o=\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{T}$ نتیجه می‌دهد

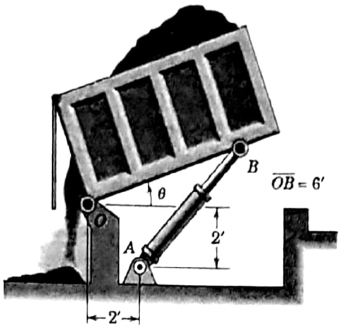
Scanned by CamScanner

$$\mathbf{M}_O = \frac{۷۴٫۸\cos\theta\,\mathbf{i} + ۲۸٫۲\cos\theta\,\mathbf{j} - ۲۸٫۲\sin\theta\,\mathbf{k}}{\sqrt{۱٫۲۲ - ۱٫۲۸\sin\theta}}\ N$$

مؤلفه‌های x، y و z گشتاور $\mathbf{M}_O$ در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



۱۹۰-۲. فرض شده است که به هنگام بالا رفتن انباره، سیلندر هیدرولیکی AB نیروی F با اندازه‌ی ثابت $۵۰۰lb$ را اعمال می‌کند. گشتاور این نیرو حول نقطه‌ی O را در محدوده‌ی $۰ \le \theta \le ۹۰^\circ$ تعیین کرده و ترسیم نمایید. به ازای چه مقدار زاویه θ، گشتاور حداکثر شده و مقدار آن چقدر است؟



حل:

اگر زاویه‌ی سیلندر AB با افق برابر β باشد،

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{۶\sin\theta + ۲}{۶\cos\theta - ۲}\right)$$

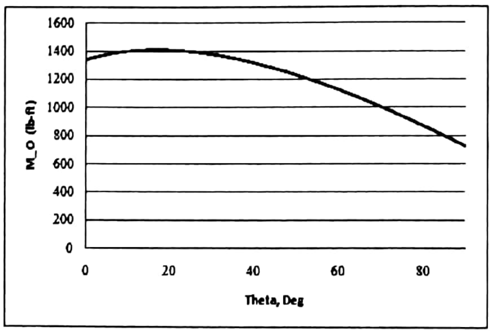
از طرفی طول سیلندر AB برحسب θ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\overline{AB} = \sqrt{(۶\sin\theta + ۲)^۲ + (۶\cos\theta - ۲)^۲} = ۲\sqrt{۱۱ + ۶(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$$F = F(\cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\beta\,\mathbf{j}) = F\left(\frac{۳\cos\theta - ۱}{\sqrt{۱۱ + ۶(\sin\theta - \cos\theta)}}\mathbf{i} + \frac{۳\sin\theta + ۱}{\sqrt{۱۱ + ۶(\sin\theta - \cos\theta)}}\mathbf{j}\right)$$

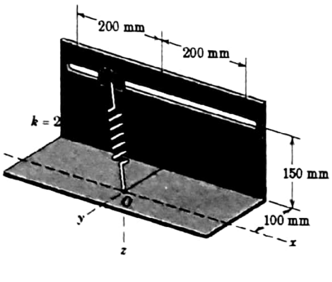
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} = ۶(\cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\beta\,\mathbf{j}) \times \frac{۵۰۰}{\sqrt{۱۱ + ۶(\sin\theta - \cos\theta)}}([۳\cos\theta - ۱]\mathbf{i} + [۳\sin\theta + ۱]\mathbf{j})$$

$$= \frac{۳۰۰}{\sqrt{۱۱ + ۶(\sin\theta - \cos\theta)}}\{۳\cos\theta\sin\theta + \cos\theta - ۳\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\}\mathbf{k} = \frac{۳۰۰۰(\sin\theta + \cos\theta)}{\sqrt{۱۱ + ۶(\sin\theta - \cos\theta)}}\mathbf{k}$$



با توجه به نمودار حداکثر گشتاور M_O به صورت مقابل می‌باشد $\quad M_O = ۱۴۱۴lb - ft \ @ \ \theta = ۱۶٫۸۷^\circ$

۱۹۱-۲. بخشی از یک فرآیند طراحی برای یک مکانیزم بزرگتر در شکل نشان داده شده است. فنری با ثابت $k = ۲۰۰N/m$ به نقطه‌ی ثابت O و به لغزنده‌ی A که در راستای شیار حرکت می‌کند، متصل شده است. طول بدون کشیدگی فنر $۱۵۰mm$ بوده و نیرو در فنر، k برابر تغییر طول فنر می‌باشد. مؤلفه‌های x و y نیروی فنر که بر نقطه‌ی A اعمال می‌شوند، را برحسب



Scanned by CamScanner

... $-200mm \le x \le 200mm$ رسم نماید.

حل: طول فنر : $L=\sqrt{x^2+0/1^2+0/15^2}=\sqrt{x^2+0/0325}\ m$ ، تغییر طول فنر : $\delta=L-0/15=\sqrt{x^2+0/0325}-0/15\ m$

نیروی فنر : $F=k\delta=200[\sqrt{x^2+0/0325}-0/15]$

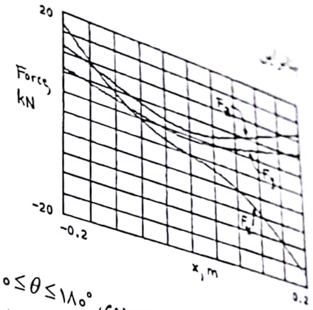
بردار F به صورت برداری $\mathbf{F}=F\mathbf{n}_{AO}$.

$$\mathbf{n}_{AO}=\left[\frac{-x_A\mathbf{i}+0/1\mathbf{j}+0/15\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+0/0325}}\right]$$

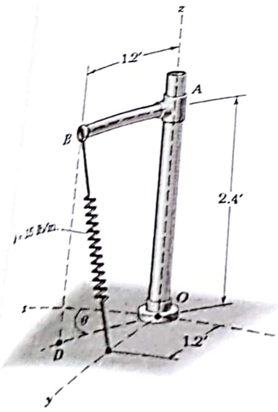
$$F_x=200\left[\sqrt{x^2+0/0325}-0/15\right]\left[\frac{-x_A}{\sqrt{x^2+0/0325}}\right]$$

$$F_y=200\left[\sqrt{x^2+0/0325}-0/15\right]\left[\frac{0/1}{\sqrt{x^2+0/0325}}\right]$$

$$F_z=200\left[\sqrt{x^2+0/0325}-0/15\right]\left[\frac{0/15}{\sqrt{x^2+0/0325}}\right]$$



۲-۱۹۲. بازوی AB در محدوده‌ی $0\le\theta\le180^\circ$ دوران می‌کند و در $\theta=90^\circ$، فنر بدون کشیدگی می‌باشد. گشتاور نیروی فنر وارده بر B حول نقطه‌ی O را به صورت تابعی از θ تعیین کنید. سه مؤلفه‌ی اسکالر $\mathbf{M}_o$ را رسم کرده و حداکثر مقدار مطلق هر یک از مؤلفه‌ها را تعیین کنید.



حل:

$$\mathbf{BC}=-1/2\cos\theta\,\mathbf{i}+1/2(1-\sin\theta)\mathbf{j}-2/4\mathbf{k}\ \ ft$$

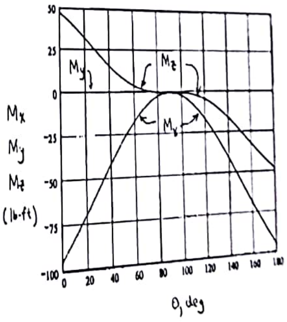
$$|\mathbf{BC}|=\sqrt{(1/2\cos\theta)^2+1/2^2(1-\sin\theta)^2+2/4^2}=\sqrt{8/64-2/88\sin\theta}\ \ ft$$

$$F=k\delta=180(\sqrt{8/64-2/88\sin\theta}-2/4)$$

$$\mathbf{F}=F\mathbf{n}_{BC}=F\frac{\mathbf{BC}}{|\mathbf{BC}|}=\frac{180[\sqrt{8/64-2/88\sin\theta}-2/4]}{\sqrt{8/64-2/88\sin\theta}}[-1/2\cos\theta\,\mathbf{i}+1/2(1-\sin\theta)\mathbf{j}-2/4\mathbf{k}]lb$$

با توجه به اینکه $\mathbf{M}_o=\mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{F}$ و $\mathbf{r}_{OC}=1/2\mathbf{j}$، لذا

$$\mathbf{M}_o=\frac{\sqrt{8/64-2/88\sin\theta}-2/4}{\sqrt{8/64-2/88\sin\theta}}[-518\mathbf{i}+259\cos\theta\,\mathbf{k}]lb-ft$$



حداکثر مقدار مطلق مؤلفه‌ها،

M_x : $95/1lb-ft$ @ $\theta=0$, $\theta=\pi$

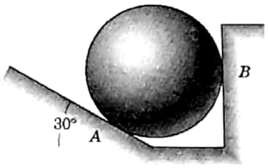
M_z : $47/6lb-ft$ @ $\theta=0$, $\theta=\pi$

M_y: به ازای تمامی مقادیر θ برابر صفر می‌باشد.

Scanned by CamScanner

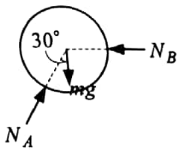
فصل سوم

تعادل



۳-۱. کره‌ای همگن به جرم $۵۰kg$ روی سطح A با شیب $۳۰°$ قـرار گرفتـه و بـه دیوار قائم B تکیه داده شده است. نیروهای تماسی در A و B را محاسبه کنید.

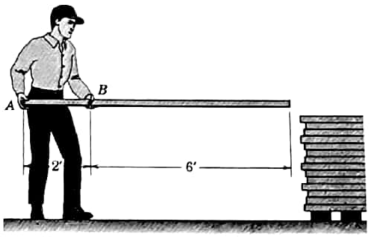
حل:



$$mg = ۵۰ \times ۹/۸ = ۴۹۰N$$

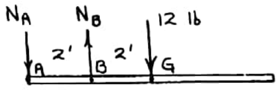
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad N_A \cos ۳۰° - mg = ۰ \qquad N_A = ۵۶۶N$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad N_A \sin ۳۰° - N_B = ۰ \qquad N_B = ۲۸۳N$$



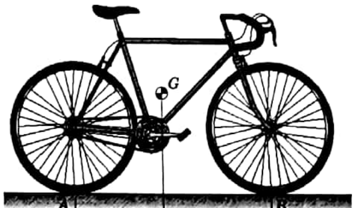
۳-۲. با توجه به شکل، یک نجار تخته‌ای به وزن $۱۲lb$ را نگه داشته اسـت. اگر او نیروهای قائم به تخته وارد کند، نیروها در A و B را تعیین کنید.

حل:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = ۰ \qquad N_B \times ۲ - ۱۲ \times ۴ = ۰ \qquad N_B = ۲۴lb$$ رو به بالا

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad ۲۴ - ۱۲ - N_A = ۰ \qquad N_A = ۱۲lb$$ رو به پایین

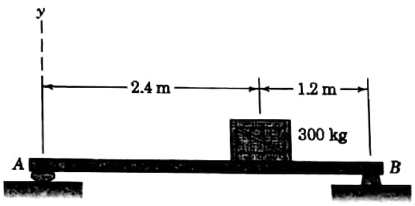


۳-۳. وزن دوچرخه $۲۹lb$ و مرکز ثقل آن در نقطه‌ی G واقع است. نیروهـای عمودی در A و B را، هنگامی که دوچرخه در حال تعادل است، تعیین کنید.

حل:

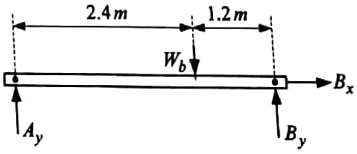
$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = ۰ \qquad N_B \times ۴۱ - ۲۹ \times ۱۸/۵ = ۰ \qquad N_B = ۱۳/۰۹lb$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad N_A + ۱۳/۰۹ - ۲۹ = ۰ \qquad N_A = ۱۵/۹۱lb$$



۳-۴. جرم هر متر از این تیر یکنواخت $۵۰kg$ است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین کنید.

حل:



Scanned by CamScanner

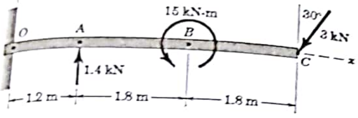
$W_b = 50\times 9.81\times 3.6 = 1764\ N$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \quad B_y\times 3.6 - 200\times 9.81\times 2.4 - 1764\times 1.8 = 0 \quad B_y = 2840\,N$

$\sum F_x = 0 \quad B_x = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + 2840 - 1764 - 2940 = 0 \quad A_y = 1864\,N$

۳-۵. تیر یکنواختی به جرم $500kg$ تحت اثر سه بار خارجی نشان داده شده قرار دارد. عکس‌العمل‌ها در نقطه‌ی تکیه‌گاه O را محاسبه کنید. صفحه‌ی x-y قائم است.



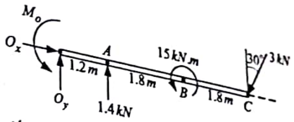
حل:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad Q_x - 3\sin 30^\circ = 0 \quad O_x = 1.5kN$

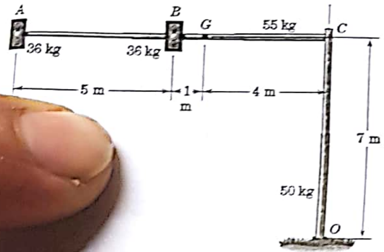
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad O_y + 1.4 - 3\cos 30^\circ - 0.5\times 9.81 = 0 \quad O_y = 6.1kN$

$\circlearrowleft + \sum M_o = 0 \quad M_o + 1.4\times 1.2 + 15 - 3\cos 30\times 4.8 - 0.5\times 9.81\times 2.4 = 0$

$M_o = 7.56\ kN.m$ پادساعتگرد



۳-۶. عکس‌العمل‌های نیرو و لنگر ناشی از مجموعه‌ی چراغ ترافیک را در پیچ O محاسبه کنید. هر چراغ ترافیک جرمی معادل $36kg$ دارد، درحالی که جرم قطعات OC و AC به ترتیب $50kg$ و $55kg$ است. مرکز ثقل عضو AC در G واقع است.



حل:

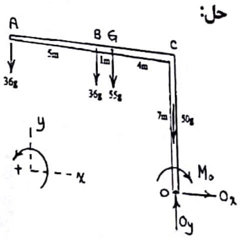
$\sum F_x = 0 \quad O_x = 0$

$\sum F_y = 0 \quad O_y - (2\times 36 + 50 + 55)9.81 = 0$

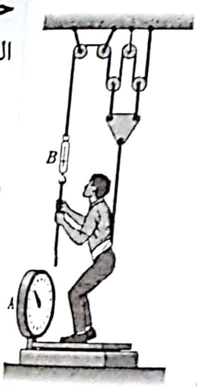
$O_y = 1736\,N$

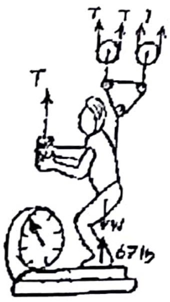
$\sum M_o = 0 \quad (36\times 5 + 36\times 10 + 55\times 4)\times 9.81 - M_o = 0$

$M_o = 7460\,N.m$ ساعتگرد



۳-۷. یک دانشجوی سابق مکانیک می‌خواهد خودش را وزن کند اما فقط به ترازوی A با ظرفیت محدود $100lb$ و فنر دینامومتر کوچک B با ظرفیت $20lb$ دسترسی دارد. به وسیله‌ی دستگاه نشان داده شده، او پی می‌برد موقعی که طناب متصل به فنر B را به اندازه‌ی $19lb$ می‌کشد، ترازوی A $67lb$ را نشان می‌دهد. وزن صحیح او چقدر است؟





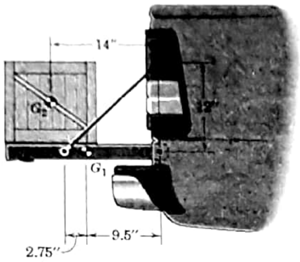
حل:

$T = 19lb$

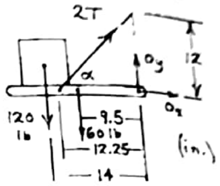
$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad T\times 5 + 67 - W = 0 \quad W = 162lb$

۳-۸. جعبه‌ای به وزن $120lb$ روی درب عقب وانتی به وزن $60lb$ قرار دارد. نیروی کشش T مربوط به هر کدام از ۲ کابل نگهدارنده که یکی از آنها در شکل نشان داده شده است را محاسبه کنید. مراکز ثقل G_1 و G_2

است، جعبه در وسط فاصله‌ی بین دو کابل قرار دارد.



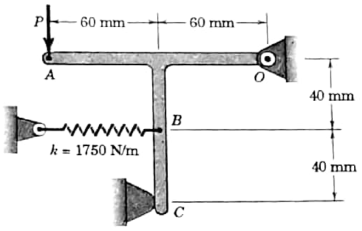
حل:



$\alpha = \tan^{-1}\dfrac{۱۲}{۱۲/۲۵} = ۴۴/۴^\circ$

$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \quad ۱۲۰(۱۴) + ۶۰(۹/۵) - ۲T \sin ۴۴/۴^\circ \times (۱۲/۲۵) = ۰$

$T = ۱۳۱/۲\ lb$



۹-۳. موقعی که قطعه‌ی زیر به جرم $۰/۰۵kg$ در موقعیت نشان داده شده قرار دارد، فنر طولی به اندازه‌ی $۱۰\ mm$ کشیده شده است. نیروی P که لازم است تا ارتباط با نقطه‌ی C قطع شود، را تعیین کنید: (الف) با درنظر گرفتن اثر وزن و (ب) صرف‌نظر کردن از اثر وزن.

حل:

(الف)

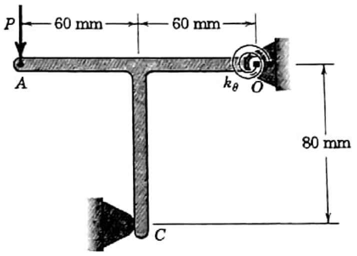
$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \qquad P \times ۱۲۰ + ۰/۰۵ \times ۹/۸۱ \times ۶۰ - ۱۷۵۰ \times ۰/۰۱ \times ۴۰ = ۰$

$P = ۵/۵۹ N$

(ب)

$\sum M_o = ۰ \qquad P \times ۱۲۰ - ۱۷۵۰ \times ۰/۰۱ \times ۴۰ = ۰$

$P = ۵/۸۳ N$



۱۰-۳. موقعی که قطعه‌ی زیر به جرم $۰/۰۵kg$ در موقعیت نشان داده شده قرار دارد، فنر پیچشی در O می‌پیچد و گشتاوری معادل $۰/۷۵N.m$ در جهت ساعتگرد وارد می‌کند. نیروی P که لازم است تا ارتباط با نقطه‌ی C قطع شود، را تعیین کنید. (الف) با درنظر گرفتن اثر وزن و (ب) صرف‌نظر کردن از اثر وزن.

حل:

(الف)

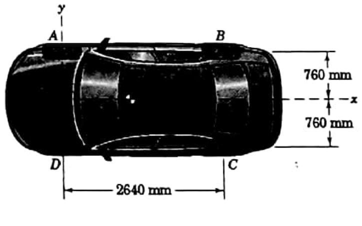
$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \qquad P \times ۰/۱۲ + ۰/۰۵ \times ۹/۸۱ \times ۰/۰۶ - ۰/۷۵ = ۰$

$P = ۶N$

(ب)

$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \qquad P \times ۰/۱۲ - ۰/۷۵ = ۰$

$P = ۶/۲۵N$



۱۱-۳. روی سطح زمین، ماشینی روی چهار ترازوی مستقل قرار داده شده است (هر کدام زیر یک لاستیک). قرائت ترازوها در هر یک از چرخ‌های جلو $۴۴۵۰N$ و در هر یک از چرخ‌های عقب $۲۹۵۰N$ است. مؤلفه‌ی x مرکز ثقل G و جرم ماشین را تعیین کنید.

Scanned by CamScanner

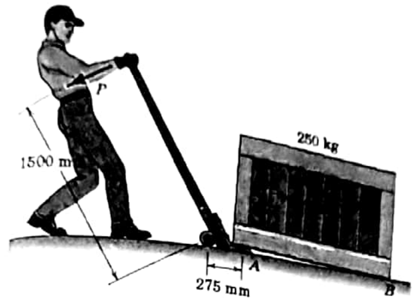
حل:

$\sum F = ۰ \qquad ۲ \times (۲۲۵۰ + ۲۹۵۰) - W = ۰$

$W = ۱۴۸۰۰\,N \qquad m = ۱۵۰۹\,kg$

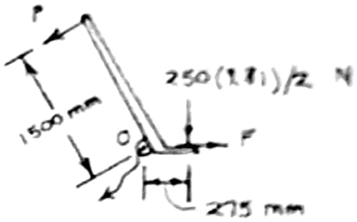
$\circlearrowright + \sum M_o = ۰ \qquad ۲ \times (۲۹۵۰ \times ۲۶۴۰) - ۱۴۸۰۰ \times x = ۰$

$x = ۱۰۵۲\,mm$



۱۲-۳. مقدار نیروی P موردنیاز برای بلند کردن جعبه‌ی $۲۵۰kg$ با اهرم نشان داده شده را تعیین کنید. فرضیات مربوطه را شرح دهید.

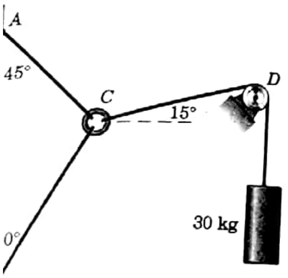
حل:



$\circlearrowright + \sum M_o = ۰ \qquad P(۱۵۰۰) - \frac{۱}{۲}(۲۵۰)(۹/۸۱)(۲۷۵) = ۰$

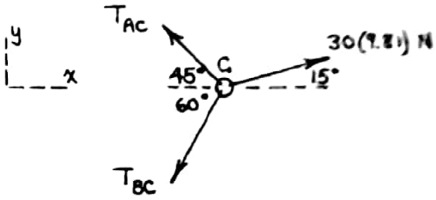
$P = ۲۲۵\,N$

فرض می‌کنیم اصطکاک ناچیز است.



۱۳-۳. سه کابل در حلقه‌ی اتصال C به هم متصل شده‌اند. نیروی ایجاد شده توسط استوانه‌ی $۳۰kg$ در کابل‌های AC و BC را تعیین کنید.

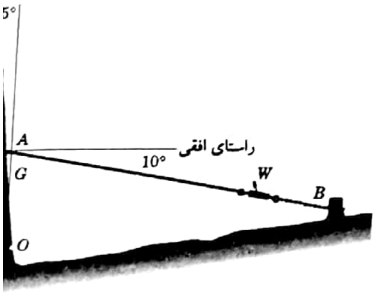
حل:



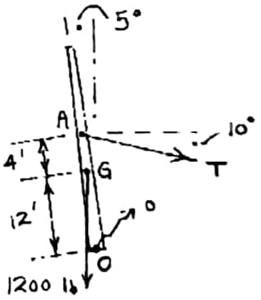
$F_x = ۰ \qquad -T_{AC}\cos ۴۵° - T_{BC}\cos ۶۰° + ۳۰(۹/۸۱)\cos ۱۵° = ۰$

$F_y = ۰ \qquad T_{AC}\sin ۴۵° - T_{BC}\sin ۶۰° + ۳۰(۹/۸۱)\sin ۱۵° = ۰$

$T_{AC} = ۲۱۵\,N \quad , \quad T_{BC} = ۲۶۴\,N$



۱۴-۳. تنه‌ی درختی تمایل دارد در سراشیبی بیفتد، اما یک هیزم‌شکن قصد دارد به کمک بست قورباغه‌ای W تنه‌ی درخت را در سربالایی بیاندازد. کشش T موردنیاز در کابل چقدر خواهد بود؟ مرکز ثقل تنه‌ی ۱۲۰۰ پوندی در نقطه‌ی G واقع است. شکاف O به اندازه‌ای بزرگ است که مقاومت ناچیز است.



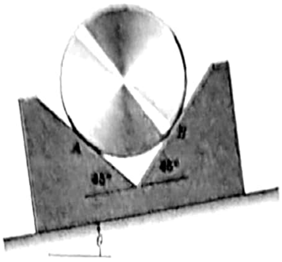
حل:

$\sum M_o = ۰ \qquad ۱۲۰۰(۱۲\sin ۵°) - T(۱۶)\cos ۱۵° = ۰$

$T = ۸۱/۲\,lb$

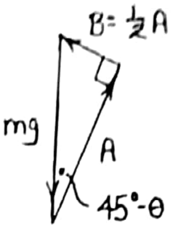
۱۵-۳. زاویه‌ی θ شیب با راستای افق را به گونه‌ای بیابید که برای استوانه‌ی صیقلی نیروی تماسی در B آن در A باشد.

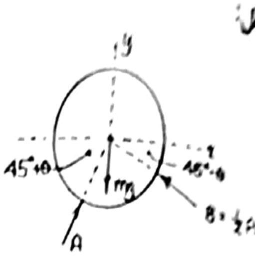
Scanned by CamScanner



$$\sum F = ۰$$

$$\tan(۴۵° - \theta) = \frac{A/۲}{A} = \frac{۱}{۲}$$

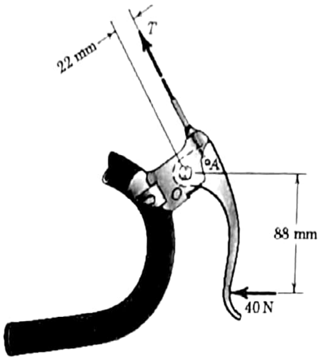




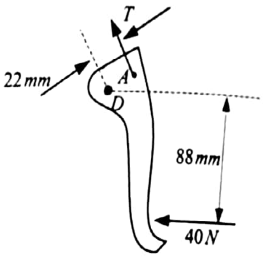
$$۴۵° - \theta = ۲۶/۶°$$

$$\theta = ۱۸/۴۳°$$

۳-۱۶. مطابق شکل یک دوچرخه‌سوار نیرویی معادل $۴۰N$ را به اهـرم ترمـز دوچرخه‌اش اعمال می‌کند. نیروی T منتقل شده به کابل ترمز را تعیین کنیـد. اصطکاک در محور O ناچیز است.

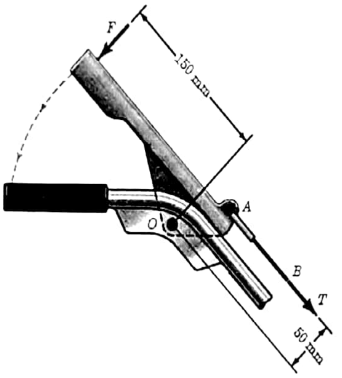


حل:

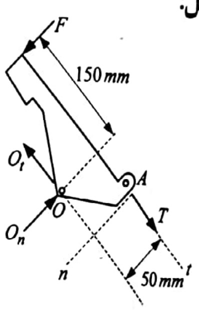


$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \qquad -۴۰(۸۸) + T(۲۲) = ۰ \qquad T = ۱۶۰N$$

۳-۱۷. اهرم زیر، مته‌ی دستگاه پرتاب‌کننده‌ی برف را کنترل می‌کند. اگـر یک نیروی $F = ۳۰N$ برای شروع چرخش اهرم حول محور O نیاز باشـد، کشش T در کابل کنترل AB و عکس‌العمل‌ها در لولای O را تعیین کنیـد. از وزن اهرم صرف‌نظر کنید.



حل:



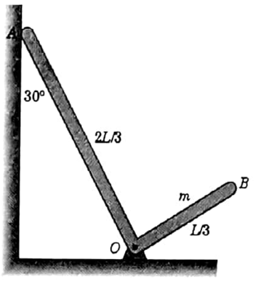
$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \quad ۳۰(۱۵۰) - T(۵۰) = ۰ \quad T = ۹۰N$$

$$\sum F_t = ۰ \qquad T - O_t = ۰ \qquad O_t = ۹۰N$$

$$\sum F_n = ۰ \qquad O_n - F = ۰ \qquad O_n = ۳۰N$$

$$O = \sqrt{۹۰^۲ + ۳۰^۲} = ۹۴/۹N$$

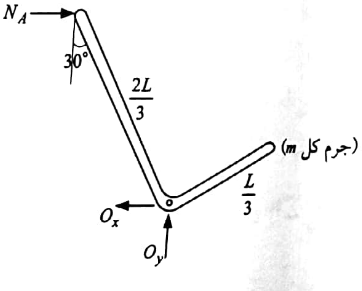
۳-۱۸) جرم میله‌ی باریک و بلند و یکنواخت AOB، m است. درصورتی که اصـطکاک در محور O ناچیز باشد، نیروی عمودی در A و عکس‌العمل‌ها در O را تعیین کنید.



حل:

$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \quad -\frac{mg}{۳} \times \left(\frac{L}{۶}\cos ۳۰°\right) + \frac{۲mg}{۳}\left(\frac{L}{۳}\cos ۶۰°\right) - N_A\left(\frac{۲L}{۳}\cos ۳۰°\right) = ۰$$

$$N_A = ۰/۱۰۹۱\, mg$$



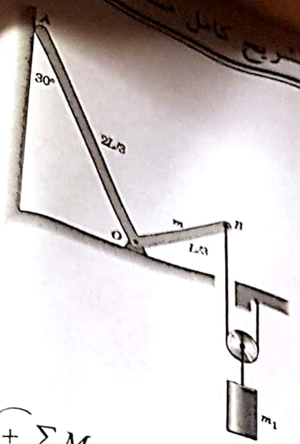
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad ۰/۱۰۹۱mg - O_x = ۰ \qquad O_x = ۰/۱۰۹۱mg$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad O_y - mg = ۰ \qquad O_y = mg$$

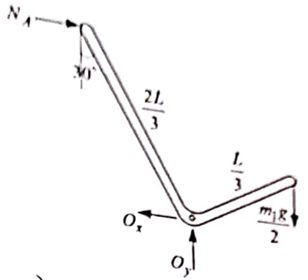
$$O = \sqrt{(۰/۱۰۹۱^۲ + ۱^۲)(mg)^۲} = ۱/۰۰۶\, mg$$

Scanned by CamScanner

۳-۱۹. کمترین جرم استوانه‌ی $m_۱$ برای از دست رفتن تماس در A را تعیین کنید.



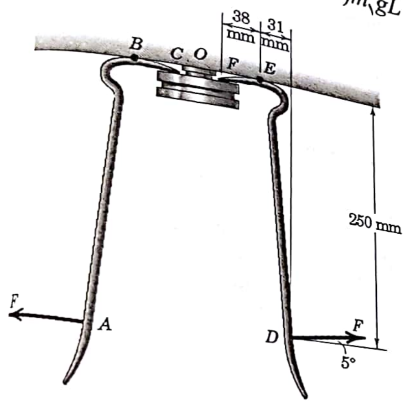
حل:



$$(+\circlearrowright)\ \sum M_O = ۰ \qquad \frac{۲mg}{۳}\times\left(\frac{L}{۳}\cos ۶۰^\circ\right)-\frac{mg}{۳}\left(\frac{L}{۶}\cos ۳۰^\circ\right)-\frac{m_۱ g}{۲}\left(\frac{L}{۳}\cos ۳۰^\circ\right)=۰$$

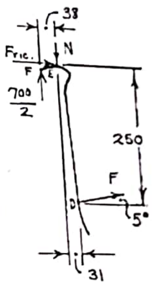
$$(۲-\cos ۳۰^\circ)mgL=(۳\cos ۳۰^\circ)m_۱ gL$$

$$m_۱=۰/۴۳۶\,m$$



۳-۲۰. نیروی محوری ۷۰۰ نیوتنی لازم است تا قرقره از محورش جدا شود. چه مقدار نیروی F باید به هر کدام از دو دسته اعمال شود؟ اصطکاک در نقاط تماس B و E برای ممانعت از لغزش کافی است. اصطکاک در نقاط تماس قرقره F و C ناچیز است.

حل:

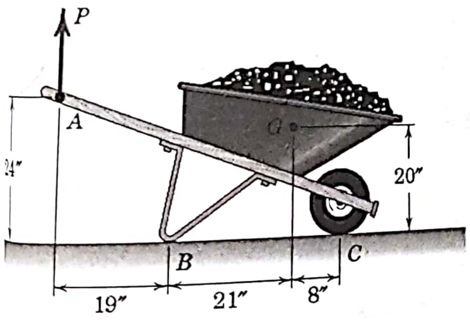


میله‌ی سمت راست را درنظر بگیرید.

اندازه‌ها به mm

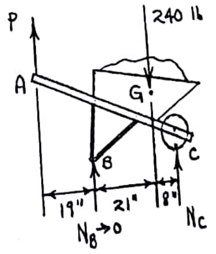
$$(+\circlearrowright)\ \sum M_E=۰ \qquad -\frac{۷۰۰}{۲}\times(۳۸)+F\cos ۵^\circ(۲۵۰)+F\sin ۵^\circ(۳۱)=۰$$

$$F=۵۲/۸\,N$$



۳-۲۱. نیروی قائم P موردنیاز برای بلند کردن گاری از زمین در نقطه‌ی B را تعیین کنید. مجموع وزن گاری و بار داخل آن $۲۴۰lb$ و مرکز ثقل آن در G واقع است.

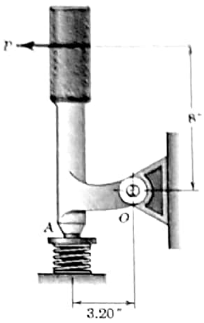
حل:



$$(+\circlearrowright)\ \sum M_C=۰ \qquad ۲۴۰(۸)-P(۴۸)=۰ \qquad P=۴۰lb$$

Scanned by CamScanner

۳-۲۲. مطابق شکل، نیروی اعمالی P بر دسته‌ی اهرم، نیروی فشاری قائم $۶۰lb$ را در فنر مارپیچی تولید می‌کند. عکس‌العمل لولای O را تعیین کنید.



حل:

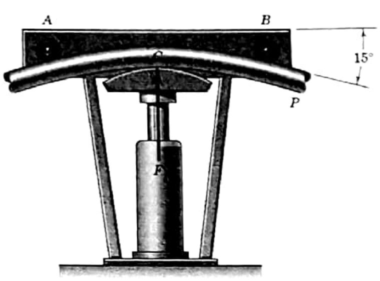
$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \qquad P \times (۸) - ۶۰(۳/۲) = ۰ \qquad P = ۲۴\,lb$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad O_x - ۲۴ = ۰ \qquad O_x = ۲۴\,lb$

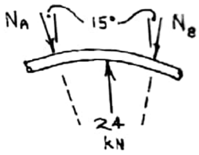
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad ۶۰ - O_y = ۰ \qquad O_y = ۶۰\,lb$

$O = \sqrt{۲۴^۲ + ۶۰^۲} = ۶۴/۶\,lb$

۳-۲۳. مطابق شکل لوله‌ی P به وسیله‌ی یک لوله خم‌کن خم شده است. اگر استوانه‌ی هیدرولیکی نیروی $F = ۲۴kN$ را به قسمت C لوله اعمال کند، عکس‌العمل غلتک‌های A و B را تعیین کنید.



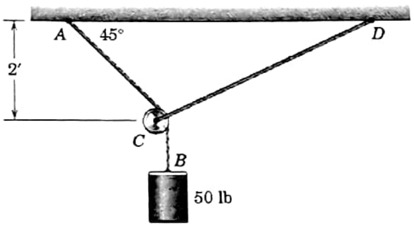
حل:



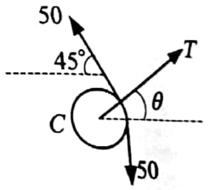
$+\uparrow \sum F = ۰ \qquad ۲۴ - ۲N_A \cos ۱۵° = ۰$

$N_A = N_B = ۱۲/۴۲\,kN$

۳-۲۴. کابل AB بدون تغییر در نیروی کششی آن از روی قرقره ایده‌آل C عبور کرده است. طول کابل CD چقدر باشد تا تعادل استاتیکی در موقعیت نشان داده شده برقرار شود؟ کشش T در کابل CD چقدر است؟



حل:



$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad T \cos\theta - ۵۰ \cos ۴۵° = ۰$

$T \cos\theta = ۵۰ \cos ۴۵°$

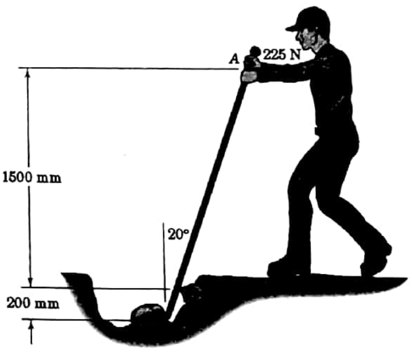
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad T \sin\theta + ۵۰ \sin ۴۵° - ۵۰ = ۰$

$T \sin\theta = ۵۰(۱ - \sin ۴۵°)$

$\dfrac{T \sin\theta}{T \cos\theta} = \tan\theta = ۰/۴۱۴ \qquad \theta = ۲۲/۵°$

$T = ۳۸/۳\,lb \qquad ; \qquad \overline{CD} = \dfrac{۲}{\sin ۲۲/۵°} = ۵/۲۳\,ft$

۳-۲۵. صاحب‌خانه در حال حفر کردن سوراخ کوچکی برای کاشت درخت به چند قطعه سنگ برمی‌خورد. مطابق شکل اگر او نیروی افقی $۲۲۵N$ را به میله وارد کند، نیروی افقی اعمال شده بر سنگ C چقدر است؟ توجه کنید که پایه‌ی کوچک روی سنگ C یک عکس‌العمل قائم ایجاد می‌کند. اصطکاک در B ناچیز است. (الف) با درنظر گرفتن وزن (ب) با صرف‌نظر کردن از وزن میله‌ی یکنواخت $۱۸kg$



Scanned by CamScanner

حل:

الف)

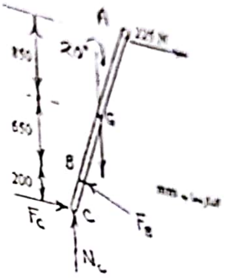
$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = ۰ \qquad ۲۲۵(۱۷۰۰) + ۱۸(۹/۸۱)(۸۵۰ \tan ۲۰^\circ) - F_B\left(\frac{۲۰۰}{\cos ۲۰^\circ}\right) = ۰$

$F_B = ۲۰۵۴\ N$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F = ۰ \qquad ۲۲۵ + F_C - ۲۰۵۴ \cos ۲۰^\circ = ۰$

$F_C = ۱۷۰۵\ N$

ب)

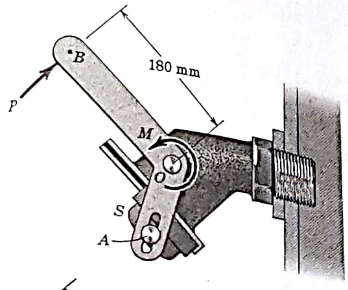


$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = ۰ \qquad ۲۲۵(۱۷۰۰) - F_B\left(\frac{۲۰۰}{\cos ۲۰^\circ}\right) = ۰$

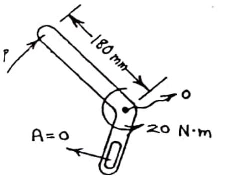
$F_B = ۱۷۹۷\ N$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F = ۰ \qquad F_C + ۲۲۵ - ۱۷۹۷ \cos ۲۰^\circ = ۰$

$F_C = ۱۴۶۴\ N$



۳-۲۶. در شکل زیر المان‌های یک شیر مایع سنگین نشان داده شده است. وقتی عضو OB تحت نیروی P به صورت ساعتگرد حول محور ثابت O می‌چرخد، المان s آزادانه به سمت بالا در شکافش می‌لغزد و جریان رها می‌شود. مطابق شکل اگر یک فنر پیچشی داخلی گشتاور $M = ۲۰ N.m$ را اعمال کند، نیروی P موردنیاز برای باز شدن شیر را تعیین کنید. از تمامی اصطکاک‌ها صرف‌نظر شود.

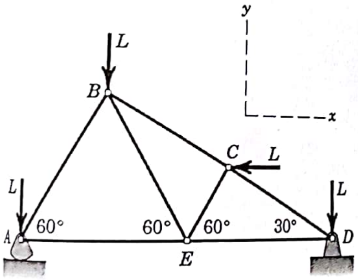


حل:

چون s آزادانه در شکافش می‌لغزد $A = ۰$

$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_O = ۰ \qquad ۲۰ - P(۰/۱۸) = ۰ \quad , \quad P = ۱۱۱/۱\ N$

۳-۲۷. مطابق شکل یک خرپای ساده نامتقارن بارگذاری شده است. عکس‌العمل‌ها را در A و D تعیین کنید. وزن سازه در مقابل بارهای اعمالی ناچیز است. آیا دانستن اندازه‌ی سازه ضروری است؟



حل:

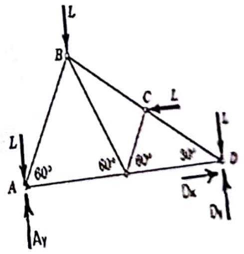
$\sum F_x = ۰ \qquad D_x = L$

$\sum F_y = ۰ \qquad A_y + D_y = ۲L$ (۱)

$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = ۰ \qquad L \times \frac{d}{۲} + L \times ۲d - L \times \frac{d}{۲} \sin ۶۰ - D_y \times ۲d = ۰$

$\frac{L}{۲} + ۲L - ۰/۴۳L = ۲D_y$

$D_y = ۱/۰۳۳L$



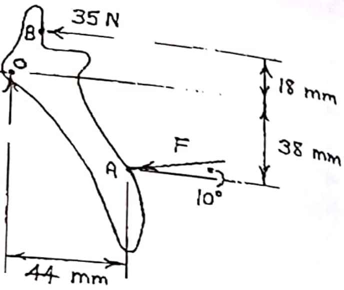
دانستن اندازه خرپا ضروری نیست

از رابطه‌ی (۱) داریم $A_y = ۱/۹۶۷L$

۳-۲۸. نیروی محوری ۳۵N در B ... اعمالی بر دسته ... باز شود. نیروی F ... تعیین کنید. توجه کنید که پیستون ... عبور می‌کند، بنابراین نیروی عمود ...

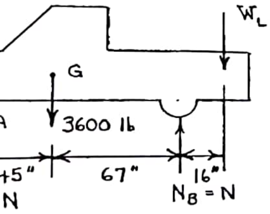
حل:

$...^\circ)(۳۸) - (F \sin ۱۰^\circ)(۴۴) = ۰$



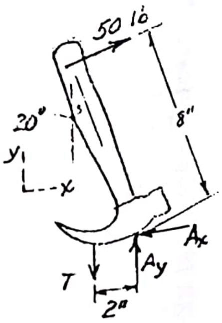
۳-۲۹. مرکز ثقل وانتی به وزن ... در محل نشان داده شده قرار دا... ثقل $x = ۱۶in$ پشت چرخ عقب ... W_L برای حالتی که نیروی عم... جلو و عقب برابر باشد، را تعیی...

حل:

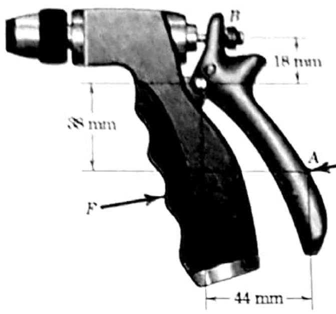


۳-۳۰. بلوکی مطابق شکل زیر ... تا حد زیادی خروج میخ را آ... نیرویی معادل $۵۰lb$ بر دسته‌ی ... مقدار نیروی A اعمال شده به ... تماسی در A برای ممانعت از ...

حل:



Scanned by CamScanner

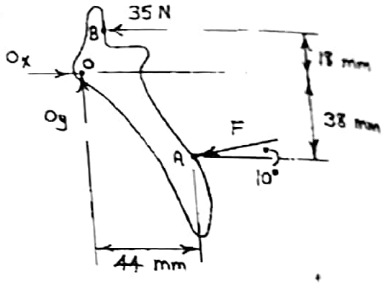


۳-۲۸. نیروی محوری N ۳۵ در B نیاز است تا پیستون فنری نازل آب باز شود. نیروی F اعمالی بر دسته‌ی A و مقدار عکس‌العمل لولای O را تعیین کنید. توجه کنید که پیستون از درون یک حفره‌ی عمودی دراز عبور می‌کند، بنابراین نیروی عمودی منتقل شده قابل اغماض است.

حل:

$+\sum M_O = ۰ \qquad ۳۵(۱۸)-(F\cos۱۰^\circ)(۳۸)-(F\sin۱۰^\circ)(۴۴)=۰$

$F = ۱۲/۹۸\,N$



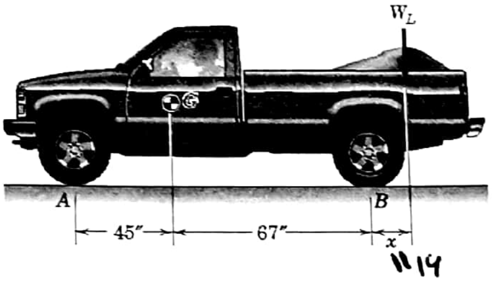
$\sum F_x = ۰ \qquad O_x - ۳۵ - ۱۲/۹۸\cos۱۰^\circ = ۰$

$O_x = ۴۸/۸\,N$

$\sum F_y = ۰ \qquad O_y - ۱۲/۹۸\sin۱۰^\circ = ۰$

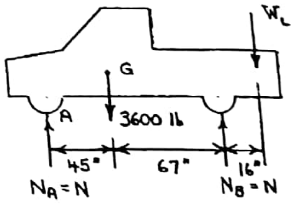
$O_y = ۲/۴۳\,N$

$O = \sqrt{۴۸/۸^۲ + ۲/۴۳^۲} = ۴۸/۸\,N$



۳-۲۹. مرکز ثقل وانتی به وزن lb ۳۶۰۰ در حالت بدون بار در محل نشان داده شده قرار دارد. اگر باری با فاصله‌ی مرکز ثقل $x=۱۶in$ پشت چرخ عقب، به وانت اضافه شود، وزن بار W_L برای حالتی که نیروی عمودی زیر هر کدام از چرخ‌های جلو و عقب برابر باشد، را تعیین کنید.

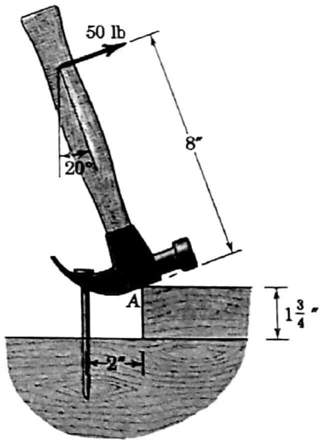
حل:



$+\sum M_A = ۰ \qquad ۳۶۰۰(۴۵) - N(۱۱۲) + W_L(۱۲۸) = ۰$

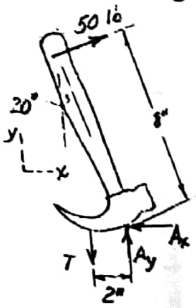
$+\uparrow \sum F = ۰ \qquad ۲N - ۳۶۰۰ - W_L = ۰$

حل همزمان دو معادله $N = ۲۰۷۵lb \quad , \quad W_L = ۵۵۰lb$



۳-۳۰. بلوکی مطابق شکل زیر سر پنجه‌ی چکشی قرار داده شده، به طوری که تا حد زیادی خروج میخ را آسان کرده است. چنانچه برای بیرون کشیدن میخ نیرویی معادل $۵۰lb$ بر دسته‌ی چکش نیاز باشد، نیروی کششی T در میخ و مقدار نیروی A اعمال شده به بلوک توسط سرچکش را محاسبه کنید. نیروی تماسی در A برای ممانعت از لغزش کافی است.

حل:



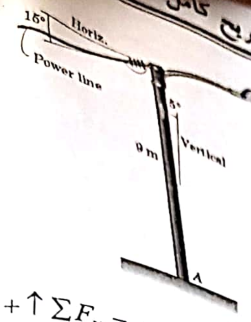
$\sum M_A = ۰ : \; ۵۰(۸) - ۲T = ۰ \qquad , \; T = ۲۰۰lb$

$\sum F_x = ۰ \; : \; ۵۰\cos۲۰^\circ - A_x = ۰ \; , \; A_x = ۴۶/۹۸lb$

$\sum F_y = ۰ \; : \; A_y + ۵۰\sin۲۰^\circ - ۲۰۰ = ۰ \; , \; A_y = ۱۸۲/۹lb$

$A = \sqrt{۴۶/۹۸^۲ + ۱۸۲/۹^۲} = ۱۸۸/۸lb$

Scanned by CamScanner



۳-۳۱. به علت بارگذاری طولانی ناشی از نیروی کششی N ۹۰۰ در خط انتقال قدرت، تیر چراغ برق به اندازه‌ی ۵° منحرف شده است. اگر جرم واحد طول این تیر ۹متری، kg/m ۲۴ و جرم فیکسچر لامپ ناچیز باشد، عکس‌العمل‌ها را در تکیه‌گاه زمینی A تعیین کنید.

حل:

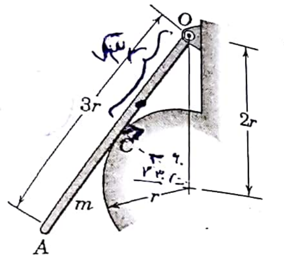
$m = ۲۴ \times ۹ = ۲۱۶kg \quad , \quad mg = ۲۱۶ \times ۹/۸۱ = ۲۱۱۸/۹۶N$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad A_x - ۹۰۰\cos ۱۵° = ۰ \quad A_x = ۸۶۹N$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad A_y - ۲۱۱۸/۹۶ - ۹۰۰\sin ۱۵° = ۰ \quad A_y = ۲۳۵۲N$

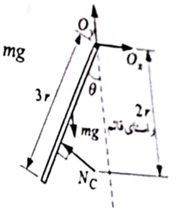
$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = ۰ \quad M_A - ۲۱۱۸/۹۶(۴/۵\sin ۵°) - ۹۰۰(۹\cos ۱۰°) = ۰$

$M_A = ۸۸۰۸\,N.m$ ساعتگرد



۳-۳۲. مطابق شکل میله‌ای همگن به طول ۲r و جرم m بر سطح دایره‌ای تکیه داده شده است. نیروی عمودی در نقطه‌ی تماس C و عکس‌العمل لولای ایده‌آل O را تعیین کنید.

حل:



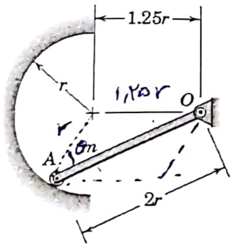
$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{r}{۲r}\right) = ۳۰°$

$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_o = ۰ \quad mg(۰/۷۵r) - N_C(\sqrt{۳}\,r) = ۰ \quad N_C = ۰/۴۳۳mg$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad O_x - ۰/۴۳۳mg(\cos ۳۰°) = ۰ \quad O_x = ۰/۳۷۵mg$

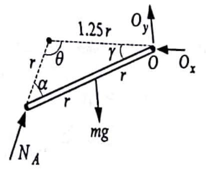
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad O_y + ۰/۴۳۳mg(\sin ۳۰°) - mg = ۰ \quad O_y = ۰/۷۸۴mg$

$O = \sqrt{۰/۷۸۴^۲ + ۰/۳۷۵^۲}\,mg = ۰/۸۶۹mg$



۳-۳۳. مطابق شکل میله‌ای یکنواخت به طول ۲r و جرم m بر سطح دایره‌ای تکیه داده شده است. نیروی عمودی در غلتک A و عکس‌العمل لولای ایده‌آل O را تعیین کنید.

حل:



با توجه به قانون کسینوس‌ها:

$(۲r)^۲ = (r)^۲ + (۱/۲۵r)^۲ - ۲(r)(۱/۲۵r)\cos\theta$

$\cos\theta = -۰/۵۷۵ \quad , \quad \theta = ۱۲۵/۱°$

با توجه به قانون سینوس‌ها:

$\frac{۲r}{\sin ۱۲۵/۱°} = \frac{۱/۲۵r}{\sin\alpha} \quad , \quad \alpha = ۳۰/۷۵° \quad , \quad \gamma = ۲۴/۱۵°$

$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_o = ۰ \quad : \quad mg(r\cos\gamma) - N_A\sin\alpha(۲r) = ۰ \quad , \quad N_A = ۰/۸۹۲mg$

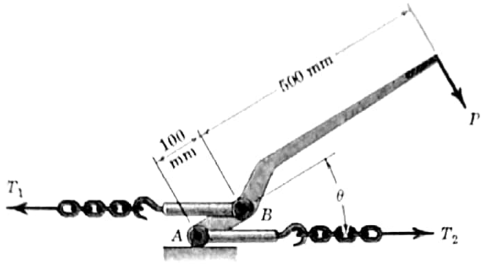
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad : \quad N_A\sin(\theta - ۹۰°) - O_x = ۰ \quad , \quad O_x = ۰/۵۱۲mg$

Scanned by CamScanner

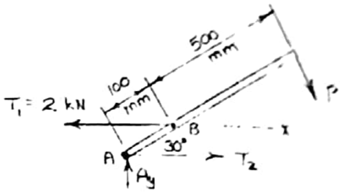
$+\uparrow\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A\cos(\theta - ۹۰^\circ) - mg + O_y = ۰ \quad , \quad O_y = ۰/۲۷\,mg$

$O = \sqrt{O_x^۲ + O_y^۲} = ۰/۵۸\,mg$

۳-۳۴. از زنجیرهایی برای ایمنی بارهای ناشی از لوله و الـوار و... استفاده می‌شود. اگر کـشش $T_۱$ معـادل $۲kN$ باشـد، در حالـت $\theta = ۳۰^\circ$، نیروی P وارده بر اهرم و نیروی کشش $T_۲$ در موقعیـت نشان داده شده را تعیین کنید. فرض کنیـد سـطح زیـر A کـاملاً صاف است.



حل:



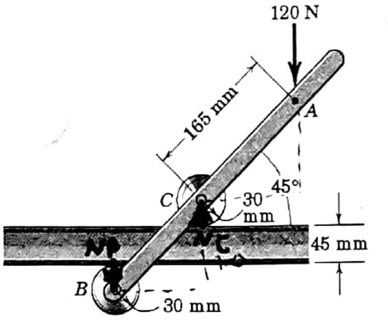
$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = ۰ \qquad P(۵۰۰+۱۰۰) - ۲(۱۰۰\sin ۳۰^\circ) = ۰$

$P = ۱۶۶/۷\,N$

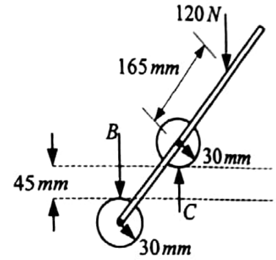
$\sum F_x = ۰ \qquad ۰/۱۶۶۷\sin ۳۰^\circ + T_۲ - ۲ = ۰$

$T_۲ = ۱/۹۱۷\,kN$

۳-۳۵. مطابق شکل دستگاهی برای اعمال نیـروی فـشاری هنگـام اتـصال کاغذ دیواری به هر طرف سطوح آشپزخانه در نزدیکی لبه‌ها طراحی شـده است. اگر نیرویی معادل $۱۲۰N$ بر دسته اعمال شود، نیرویی را که هر کدام از غلتک‌ها بر سطوح خود وارد می‌کنند، تعیین کنید.



حل:



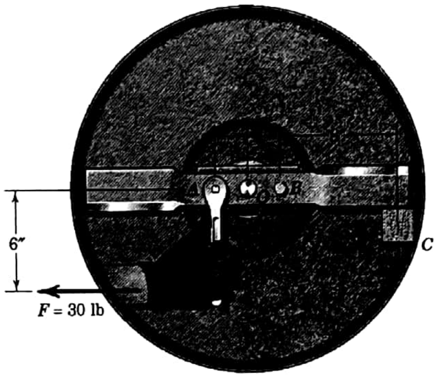
$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_C = ۰ \qquad B(۱۰۵) - ۱۲۰(۱۶۵\cos ۴۵^\circ) = ۰$

$B = ۱۳۳/۳\,N$

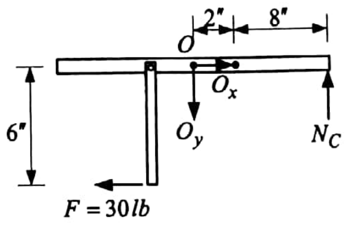
$+\uparrow\sum F_y = ۰ \qquad C - ۱۳۳/۳ - ۱۲۰ = ۰$

$C = ۲۵۳/۳\,N$

۳-۳۶. یک مکانیک در حـال نـصب تیغـه‌ی جدیـدی روی ماشـین چمن‌زنی است. درصورت اعمـال نیـروی $۳۰lb$ بـر دسـته‌ی آچـار، قطعه‌ای چوبی در C مانع از چرخش تیغه می‌شود. تیغـه بـه براکـت متصل به محور O موتور بسته شده است که از تیغه و براکت خـارج شده است. نیروی عمودی در C را تعیـین کنیـد. تمـام فرضـیات را شرح دهید. آیا بسته بودن پیچ B اهمیتی دارد؟



حل:

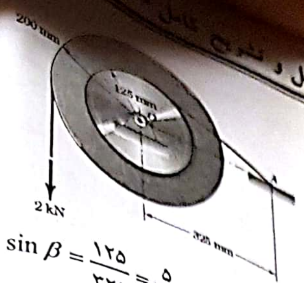


$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_o = ۰ \qquad ۳۰\times(۶) - N_C(۱۰) = ۰$

$N_C = ۱۸\,lb$

بسته بودن پیچ B اهمیتی ندارد.

Scanned by CamScanner



۳-۳۷. دو قرقره به یکدیگر بسته شده‌اند و یک واحد یکپارچه را تشکیل داده‌اند. آنها به وسیله‌ی کابلی که محکم دور قرقره‌ی کوچکتر پیچیده شده و به B وصل شده، از چرخیدن حول یاتاقان O بازداشته شده‌اند. عکس‌العمل R یاتاقان O برای بار اعمالی ۲kN مطابق شکل را محاسبه کنید.

حل:

$\sin\beta = \frac{۱۲۵}{۳۲۵} = \frac{۵}{۱۳}$

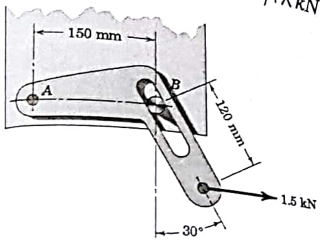
$\cos\beta = \frac{۱۲}{۱۳}$

$\circlearrowright + \sum M_o = ۰ \qquad ۲(۲۰۰) - T(۱۲۵) = ۰ \quad , \quad T = ۳٫۲\,kN$

$\sum F_x = ۰ \qquad ۳٫۲\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right) + R_x = ۰ \quad , \quad R_x = -۲٫۹۵\,kN$

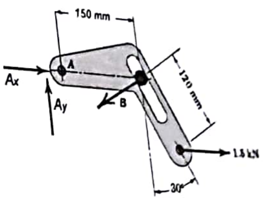
$\sum F_y = ۰ \qquad R_y - ۲ - ۳٫۲\left(\frac{۵}{۱۳}\right) = ۰ \quad , \quad R_y = ۳٫۲۳\,kN$

$R = \sqrt{۲٫۹۵^۲ + ۳٫۲۳^۲} = ۴٫۳۸\,kN$



۳-۳۸. عکس‌العمل لولای A در اثر بار اعمالی ۱٫۵kN بر براکت را محاسبه کنید. اصطکاک در شیار ناچیز است.

حل:



$\circlearrowright + \sum M_A = ۰ \qquad B\sin ۳۰^\circ(۱۵۰) - ۱٫۵(۱۲۰\cos ۳۰^\circ) = ۰$

$B = ۲٫۰۷۸۵\,kN$

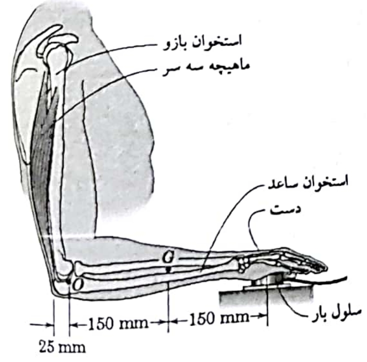
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad A_x + ۱٫۵ - ۲٫۰۷۸۵(\cos ۳۰^\circ) = ۰$

$A_x = ۰٫۳\,kN$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad A_y - ۲٫۰۷۸۵(\sin ۳۰^\circ) = ۰$

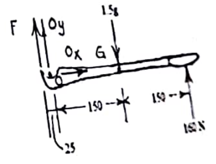
$A_y = ۱٫۰۳۹۳\,kN$

$A = \sqrt{۰٫۳^۲ + ۱٫۰۳۹۳^۲} = ۱٫۰۸۲\,kN$



۳-۳۹. در یک روش برای اندازه‌گیری قدرت ماهیچه سه سر، مطابق شکل شخصی با کف دست یک سلول بار را فشار می‌دهد. مقدار خوانده شده سلول بار، ۱۶۰N است. نیروی کششی قائم F را که توسط ماهیچه سه سر تولید شده است، تعیین کنید. جرم ساعد ۱٫۵kg و مرکز ثقل آن در G قرار دارد. فرضیات را توضیح دهید.

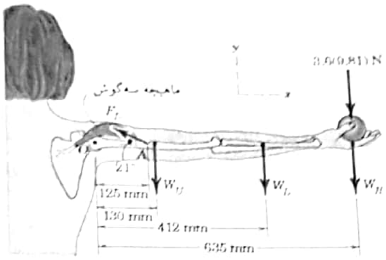
حل:



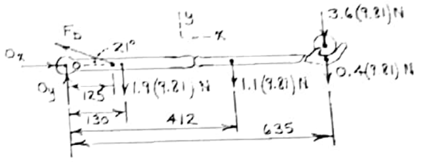
$\circlearrowright + \sum M_o = ۰ \qquad -F(۲۵) - ۱٫۵ \times ۹٫۸۱(۱۵۰) + ۱۶۰(۳۰۰) = ۰$

$F = ۱۸۳۲\,N$

۳-۴۰. مطابق شکل زنی بازوی خود را به صورت افقی نگه داشته و کره‌ای به جرم $۳/۶kg$ را در دستش گرفته است. یک نیروی کششی در ماهیچه سه گوش مانع از چرخیدن بازو حول مفصل O می‌شود. مطابق شکل این نیرو با زاویه‌ی ۲۱° عمل می‌کند. نیروی اعمال شده توسط ماهیچه سه گوش بازو در A و مؤلفه‌ی x و y عکس‌العمل در مفصل O را تعیین کنید. جرم بازوی بالایی $m_U = ۱/۹kg$ و جرم بازوی پایینی $m_L = ۱/۱kg$ و جرم دست $m_H = ۰/۴kg$ است. تمام نیروهای مربوطه در شکل نشان داده شده است.



حل:



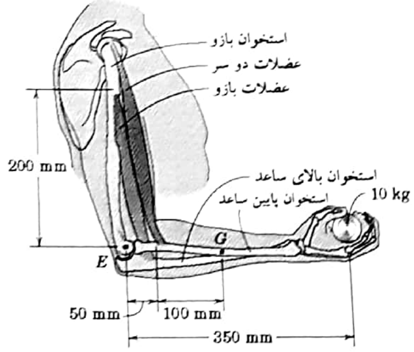
$$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \qquad F_D \sin ۲۱^\circ (۱۲۵) - ۱/۹(۹/۸۱)(۱۳۰) - ۱/۱(۹/۸۱)(۴۱۲) - (۳/۶ + ۰/۴)(۹/۸۱)(۶۳۵) = ۰$$

$$F_D = ۷۱۰ N$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad O_x - ۷۱۰ \cos ۲۱^\circ = ۰ \qquad , \qquad O_x = ۶۶۲ N$$

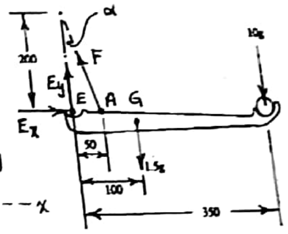
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad O_y - ۷۱۰ \sin ۲۱^\circ - (۱/۹ + ۱/۱ + ۳/۶ + ۰/۴)۹/۸۱ = ۰ \qquad , \qquad O_y = -۱۸۵/۶ N$$

۳-۴۱. مطابق شکل شخصی با وزنه‌ای به جرم $۱۰kg$ در حال اعمال پیچش‌های کوچک بازو است. گروه عضلات بازو (شامل عضلات دو سر و عضلات بازو) فاکتور اصلی در این تمرین است. مطابق شکل نیروی F گروه عضلات بازو و عکس‌العمل آرنج در نقطه‌ی E را تعیین کنید. برای تعیین نقاط مؤثر دو گروه عضله به اندازه‌ها توجه کنید و این نقاط دقیقاً $۲۰۰\ mm$ بالای E و $۵۰۰mm$ در راست E واقع است. جرم ساعد $۱/۵kg$ و مرکز ثقل آن در G قرار دارد. فرضیات را توضیح دهید.



حل:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۵۰}{۲۰۰}\right) = ۱۴/۰۴^\circ$$



$$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ \qquad F \cos ۱۴/۰۴ (۵۰) - ۱/۵ \times ۹/۸۱ \times (۱۵۰) - ۱۰ \times (۹/۸۱)(۳۵۰) = ۰$$

$$F = ۷۵۳ N$$

فرض کنید A و E روی یک خط افقی قرار دارند.

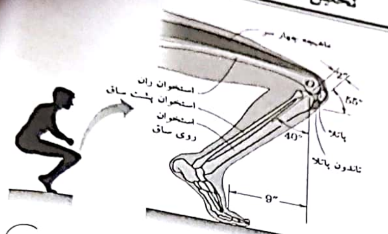
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad -۷۵۳ \sin ۱۴/۰۴^\circ + E_x = ۰ \qquad , \qquad E_x = ۱۸۲/۶۸ N$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad ۷۵۳ \cos ۱۴/۰۴^\circ - (۱۰ + ۱/۵)(۹/۸۱) + E_y = ۰ \qquad , \qquad E_y = -۶۱۷/۶۹ N$$

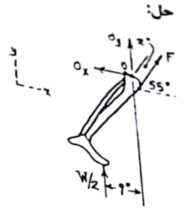
$$E = \sqrt{۱۸۲/۶۸^۲ + ۶۱۷/۶۹^۲} = ۶۴۴ N$$

Scanned by CamScanner

۳-۴۲. مردی با وزن W، که به طور مساوی روی پاهایش توزیع شده است، به آرامی از حالت چمباتمه بلند می‌شود. در وضعیت نشان داده شده، نیروی کششی F در تاندون پاتلا و عکس‌العمل در نقطه‌ی O، که محل اتصال ساق پا و استخوان ران است، را تعیین کنید. توجه کنید خط اثر نیروی تاندون پاتلا در امتداد خط وسط آن است. وزن ساق پا ناچیز است.



حل:



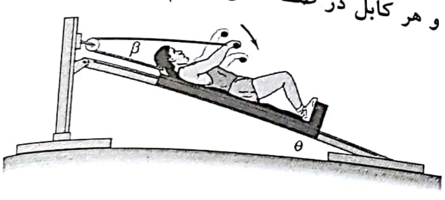
$$\circlearrowright + \sum M_o = ۰ \qquad F(۲) - \frac{W}{۲}(۹) = ۰ \quad , \quad F = ۲/۲۵W$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \qquad -O_x + ۲/۲۵W\cos ۵۵° = ۰ \quad , \quad O_x = ۱/۲۹۱W$$

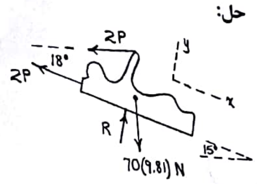
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \qquad \frac{W}{۲} + O_y + ۲/۲۵W\sin ۵۵° = ۰ \quad , \quad O_y = -۲/۳۴W$$

$$O = \sqrt{(۱/۲۹۱W)^۲ + (۲/۳۴W)^۲} = ۲/۶۷W$$

۳-۴۳. دستگاهی برای تمرین طراحی شده است. در این دستگاه، یک ارابه سبک روی قرقره‌ای کوچک نصب شده است و می‌تواند آزادانه روی سطح شیب‌دار حرکت کند. دو کابل به ارابه وصل شده است، برای هر کدام از دست‌ها. اگر دست‌ها کنار هم و کابل‌ها موازی باشند و هر کابل در صفحه‌ای قائم قرار بگیرد، در حالت تعادل نیروی P که هر دست به کابل نظیرش وارد می‌کند، را تعیین کنید. جرم شخص $۷۰kg$، زاویه‌ی سطح شیب‌دار $\theta = ۱۵°$ و زاویه‌ی $\beta = ۱۸°$ است. به علاوه نیروی R که سطح شیب‌دار به ارابه وارد می‌کند، را حساب کنید.



حل:



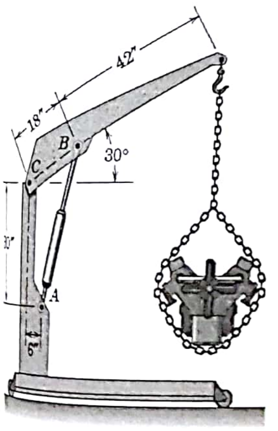
$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۷۰(۹/۸۱)\sin ۱۵° - ۲P - ۲P\cos ۱۸° = ۰$$

$$P = ۴۵/۵\ N$$

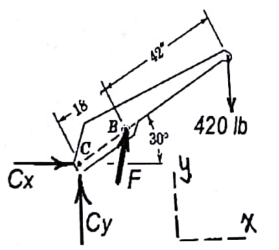
$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad R - ۷۰(۹/۸۱)\cos ۱۵° - ۲(۴۵/۵)\sin ۱۸° = ۰$$

$$R = ۶۹۱N$$

۳-۴۴. جرثقیل زمینی در کارخانه خودرو، موتوری به وزن $۴۲۰lb$ را بلند می‌کند. برای حالت نشان داده شده، عکس‌العمل لولای C و فشار روغن P بر پیستون استوانه‌ی هیدرولیکی AB به قطر $۳/۲in$ را محاسبه کنید.



حل:



Scanned by CamScanner

زاویه‌ی F با محور x $= \tan^{-1}\left(\dfrac{۳۰+۱۸\sin ۳۰^\circ}{۱۸\cos ۳۰^\circ - ۶}\right) = ۷۶/۱۵^\circ$

$\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \qquad F\sin ۷۶/۱۵^\circ(۱۸\cos ۳۰^\circ) - F\cos ۷۶/۱۵^\circ(۱۸\sin ۳۰^\circ) - ۴۲۰(۶۰\cos ۳۰^\circ) = ۰$

$F = ۱۶۸۰/۳\ lb$

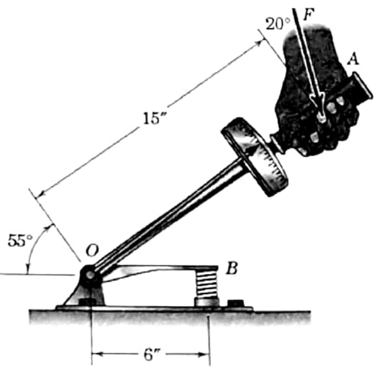
$\sum F_x = ۰ \qquad F\cos ۷۶/۱۵^\circ - C_x = ۰ \quad , \quad C_x = ۴۰۲/۲۳\,lb$

$\sum F_y = ۰ \qquad F\sin ۷۶/۱۵^\circ - C_y - ۴۲۰ = ۰ \quad , \quad C_y = ۱۲۱۱/۴۵\,lb$

$C = \sqrt{۴۰۲/۲۳^۲ + ۱۲۱۱/۴۵^۲} = ۱۲۷۶\ lb$

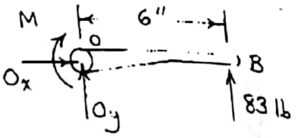
$A = \dfrac{\pi}{۴}d^۲ = \dfrac{\pi}{۴}\times(۳/۲)^۲ = ۸/۰۴\ in^۲$

$P = \dfrac{F}{A} = \dfrac{۱۶۸۰/۳}{۸/۰۴} = ۲۰۹\ \dfrac{lb}{in^۲}$



۳-۴۵. دستگاه نشان داده شده برای آزمایش فنر سوپاپ موتور اتومبیل استفاده می‌شود. آچار گردنده مستقیماً به بازوی OB متصل می‌شود. ویژگی فنر سوپاپ اتومبیل این است که با نیروی $۸۳lb$، طولش از $۲in$ (طول کشیده نشده) به $۱\frac{۱۱}{۱۶}in$ کاهش می‌یابد. مقدار M خوانده شده روی آچار گردنده، و مقدار نیروی F اعمالی بر دسته‌ی آچار جهت تولید مقدار خوانده شده، چقدر است؟ تغییر زاویه‌ی بازوی OB ناچیز است.

حل:

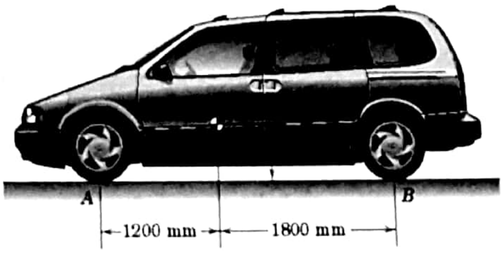


$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \quad : \quad ۸۳(۶) - M = ۰$

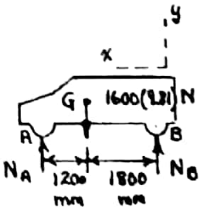
$M = ۴۹۸\ lb - in$ یا $۴۱/۵\ lb - ft$

$F\cos ۲۰^\circ(۱۵) = M = ۴۹۸ \quad , \quad F = ۳۵/۵\,lb$

۳-۴۶. نیروهای عمودی مربوط به جفت چرخ‌های جلو و عقب از یک خودروی ون با جرم $۱۶۰۰kg$ را محاسبه کنید. محاسبات را برای حالاتی که ون با سرعت ثابت: (الف) از شیب ۱۰ درصد بالا می‌رود و (ب) از شیب ۱۰ درصد پایین می‌رود، تکرار کنید. درصد تغییر n_A و n_B در نیروهای عمودی در مقایسه با مقادیر پیش‌بینی شده را محاسبه کنید. نیروهای جلوبرنده و ترمز را در موارد الف و ب درنظر بگیرید.



حل:



$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۶۰۰(۹/۸۱)(۱/۲) - N_B(۳) = ۰ \quad , \quad N_B = ۶۲۸۰N$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A + N_B - ۱۶۰۰(۹/۸۱) = ۰ \quad , \quad N_A = ۹۴۲۰N$

الف)

$\alpha = \tan^{-1}(۰/۱) = ۵/۷۱^\circ$

Scanned by CamScanner

$\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۶۰۰(۹/۸۱)(۱/۲\cos\alpha) + ۱۶۰۰(۹/۸۱)(۰/۶۶)\sin\alpha - ۲N_B = ۰$

$N_B = ۶۵۹۰N$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A + N_B - ۱۶۰۰(۹/۸۱)\cos\alpha = ۰ \quad , \quad N_A = ۹۰۳۰N$

$n_A = \frac{۹۰۳۰ - ۹۴۲۰}{۹۴۲۰} = -۴/۱۴\% \quad , \quad n_B = \frac{۶۵۹۰ - ۶۲۷۸}{۶۲۷۸} = ۴/۹۸\%$

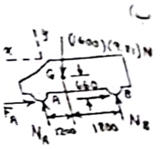
ب)

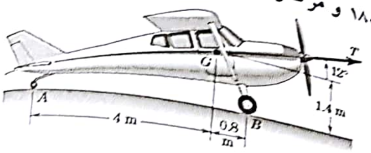
$\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۶۰۰(۹/۸۱)(۱/۲\cos\alpha) - ۱۶۰۰(۹/۸۱)(۰/۶۶)\sin\alpha - ۲N_B = ۰$

$N_B = ۵۹۰۰N$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A + N_B - ۱۶۰۰(۹/۸۱)\cos\alpha = ۰ \quad , \quad N_A = ۹۷۱۰N$

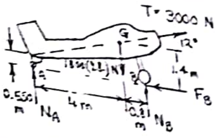
$n_A = \frac{۹۷۱۰ - ۹۴۲۰}{۹۴۲۰} = ۳/۱۵\% \quad , \quad n_B = \frac{۵۹۰۰ - ۶۲۸۰}{۶۲۸۰} = -۵/۹۷\%$





۳-۴۷. در طول انجام آزمایش روی موتور هواپیمایی به جرم ۱۸۰۰kg و مرکز ثقل G روی زمین، نیروی پروانه $T = ۲۰۰۰N$ تولید شده است. چرخ‌های اصلی B قفل شده‌اند و نمی‌لغزند: چرخ کوچک عقب A ترمز ندارد. درصد تغییر n نیروهای عمودی A و B در مقایسه با مقادیر حالت خاموش بودن موتور، را حساب کنید.

حل:



موتور خاموش $\Rightarrow \quad T = ۰ \quad , \quad F_B = ۰$

$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۸۰۰(۹/۸۱)۴ - N_B(۴/۸) = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A + ۱۴۷۲۰ - ۱۸۰۰(۹/۸۱) = ۰ \quad , \quad N_B = ۱۴۷۲۰N$

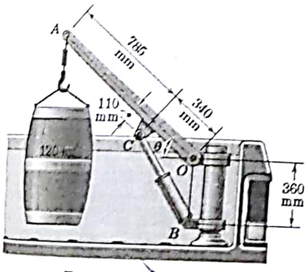
موتور روشن $\Rightarrow \quad T = ۲۰۰۰N \quad , \quad N_A = ۲۹۴۰N$

$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۸۰۰(۹/۸۱)۴ - N'_B(۴/۸) + ۲۰۰۰\cos۱۲^\circ(۰/۵۵) = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N'_A۱ + ۱۵۰۵۵ - ۱۸۰۰(۹/۸۱) + ۲۰۰۰\sin۱۲^\circ = ۰ \quad , \quad N'_B = ۱۵۰۵۰N$

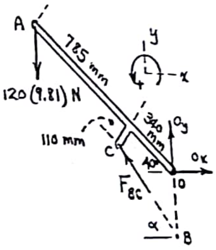
$n_A = \frac{N'_A - N_A}{N_A}(۱۰۰) = -۳۲/۶\% \quad , \quad N'_A = ۱۹۸۳N$

$n_B = \frac{N'_B - N_B}{N_B}(۱۰۰) = ۲/۲۸\%$



۳-۴۸. جرثقیل کوچکی در یک طرف کف وانتی نصب شده است. در حالت $\theta = ۴۰^\circ$، نیرویی که لولای O تحمل می‌کند و فشار روغن p وارد بر پیستون استوانه‌ی هیدرولیکی BC به قطر ۵۰mm را تعیین کنید.

حل:



$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{۳۶۰ + ۳۴۰\sin۴۰^\circ - ۱۱۰\cos۴۰^\circ}{۳۴۰\cos۴۰^\circ + ۱۱۰\sin۴۰^\circ}\right] = ۵۶/۲^\circ$

$\sum M_O = ۰ \quad : \quad ۱۲۰(۹/۸۱)(۷۸۵ + ۳۴۰)\cos۴۰^\circ - F_{BC}\cos\alpha(۳۶۰) = ۰$

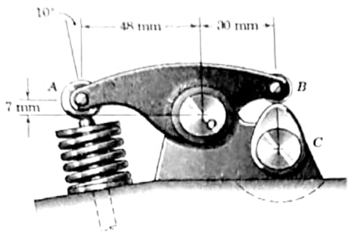
$F_{BC} = ۵۰۶۰N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x - ۵۰۶۰\cos\alpha = ۰ \quad , \quad O_x = ۲۸۲۰N$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y - ۱۱۰(۹/۸۱) + ۵۰۶۰\sin\alpha = ۰ \quad , \quad O_y = -۳۰۲۰N$

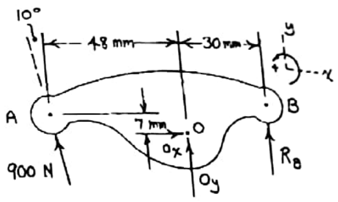
$O = \sqrt{O_x^۲ + O_y^۲} = ۴۱۲۰N$

$p = \frac{F_{BC}}{\pi d^۲/۴} = \frac{۵۰۶۰}{\pi \frac{۵۰^۲}{۴}} = ۲/۵۸\frac{N}{mm^۲}(۲/۵۸(۱۰^۶)Pa)$



۴۹-۳ مطابق شکل یک اهرم خودکار برای حرکت سوپاپ با غلتک‌های A و B نشان داده شده، برای حالتی که سوپاپ باز است و فنر سوپاپ کاملاً فشرده شده است. در این وضعیت نیروی فنر $۹۰۰N$ است. نیروی وارده توسط اهرم به شفت بادامی C را تعیین کنید. همچنین نیروی تکیه‌گاه O را محاسبه کنید.

حل:



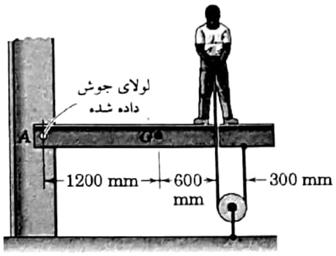
$\sum M_o = ۰ \quad : \quad -۹۰۰\cos۱۰°(۴۸) + ۹۰۰\sin۱۰°(۷) + R_B(۳۰) = ۰$

$R_B = ۱۳۸۲N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x - ۹۰۰\sin۱۰° = ۰ \quad , \quad O_x = ۱۵۶/۳N$

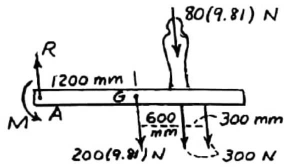
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۹۰۰\cos۱۰° + ۱۳۸۲ + O_y = ۰ \quad , \quad O_y = -۲۲۷۰N$

$O = \sqrt{O_x^۲ + O_y^۲} = ۲۲۷۰N$



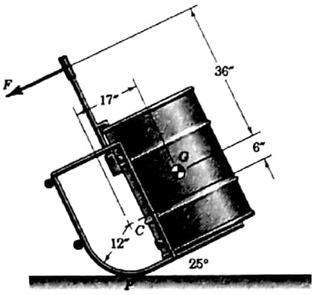
۵۰-۳. لولای A که تیر فولادی به جرم $۲۰۰kg$ و مرکز ثقل G را به ستون قائم متصل می‌کند، به هر دوی تیر و ستون جوش داده شده است. برای آزمایش جوش، مطابق شکل شخصی به جرم $۸۰kg$ به طنابی که از حفره‌ای درون تیر عبور کرده است، نیرویی معادل $۳۰۰N$ وارد می‌کند. گشتاور M لولا را محاسبه کنید.

حل:



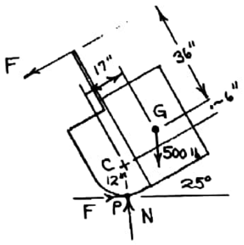
$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۸۰(۹/۸۱)(۱۸۰۰) + ۲۰۰(۹/۸۱)(۱۲۰۰)$
$\quad + ۳۰۰(۱۸۰۰ + ۲۱۰۰) - M = ۰$

$M = ۴/۹۴ \; kN.m$ پادساعتگرد



۵۱-۳. وسیله‌ی نشان داده شده برای نگه داشتن بشکه‌ای به حجم ۵۵ گالن کاربرد دارد. نیروی F برای نگه داشتن بشکه در وضعیت موردنظر را تعیین کنید. از وزن دستگاه درمقایسه با وزن بشکه‌ی $۵۰۰lb$ با مرکز ثقل G صرف‌نظر کنید. اصطکاک کافی برای جلوگیری از لغزش در نقطه‌ی P وجود دارد.

حل:

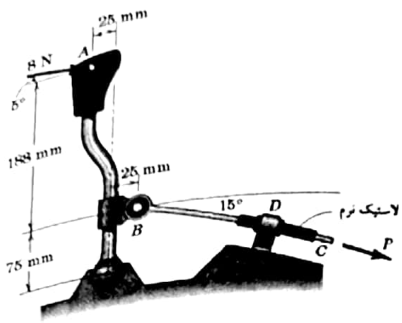


$+\sum M_p = ۰ \quad : \quad F(۳۶ + ۶ + ۱۲\cos۲۵°) - ۵۰۰(۱۷\cos۲۵°)$
$\quad + ۵۰۰(۶\sin۲۵°) = ۰$

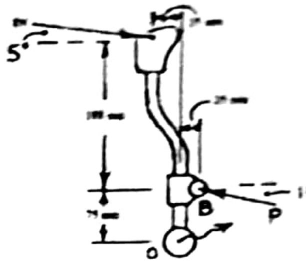
$F = ۱۲۱/۷lb$

Scanned by CamScanner

۳-۵۲ در شکل قسمتی از دستگاه انتقال یک ماشین انتقال دستی نشان داده شده است. برای نیروی اعمالی $۸N$ روی دسته، نیروی P که میله‌ی BC بر ماشین انتقال وارد می‌کند را تعیین کنید. اصطکاک در مفصل O و در مفصل B و در مجرای لغزشی نزدیک تکیه‌گاه D ناچیز است. توجه کنید که یک لایه‌ی نرم لاستیکی در d اجازه‌ی هم تراز شدن میله BC و مجرای لغزشی را می‌دهد.



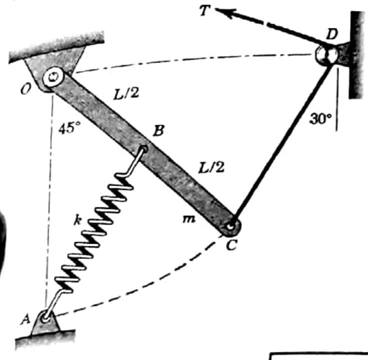
حل:



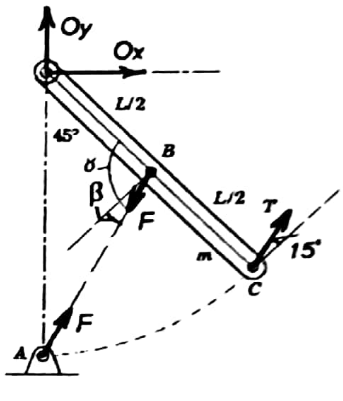
$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \quad : \quad -۸\cos ۵°(۲۶۳) + ۸\sin ۵°(۲۵) + P\cos ۱۵°(۷۵) + P\sin ۱۵°(۲۵) = ۰$$

$$P = ۲۶/۳\,N$$

۳-۵۳. میله‌ی یکنواخت OC به طول L حول محور O آزادانه می‌چرخد. اگر فنری به مدول k هنگام انطباق C بر A در حالت کشیده نشده باشد، مطابق شکل نیروی کششی T موردنیاز برای نگه داشتن میله در زاویه‌ی ۴۵° را تعیین کنید. قطر قرقره D ناچیز است.



حل:



طول اولیه فنر $L_۱ = \dfrac{L}{۲}$

طول ثانویه فنر $L_۲ = \sqrt{L^۲ + \dfrac{L^۲}{۴} - ۲\dfrac{L^۲}{۲}\cos ۴۵°} = ۰/۷۳۶۸L$

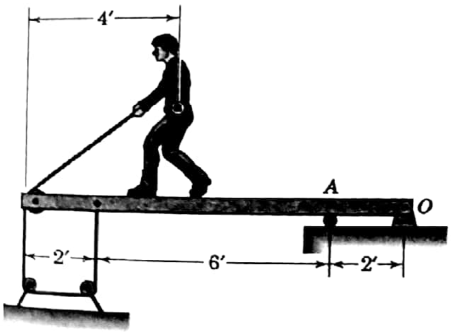
$$\frac{OA}{\sin\gamma} = \frac{AB}{\sin ۴۵°} \Rightarrow \frac{L}{\sin\gamma} = \frac{۰/۷L}{\sin ۴۵°} \Rightarrow \sin\gamma = ۰/۹۵۹۷$$

$$\gamma = ۱۰۶/۳۲° \quad , \quad \beta = \gamma - ۹۰° = ۱۶/۳۲°$$

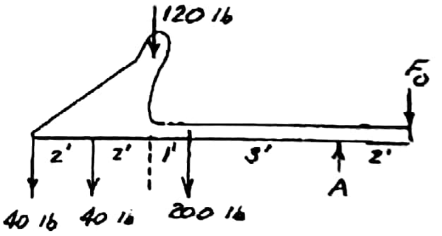
$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \quad : \quad F\cos\beta\left(\frac{L}{۲}\right) + mg\cos ۴۵°\left(\frac{L}{۲}\right) - T\cos ۱۵°(L) = ۰$$

$$T\cos ۱۵° = \frac{۰/۲۳۶۸}{۲}kL(\cos ۱۶/۳۲°) + \frac{mg}{۲}\cos ۴۵° \quad , \quad T = ۰/۱۱۷۶kL + ۰/۳۶۶mg$$

۳-۵۴. برای آزمایش تیر یکنواختی به وزن $۲۰۰lb$، مطابق شکل شخصی با وزن $۱۲۰lb$ نیرویی معادل $۴۰lb$ را به طناب وارد می‌کند. عکس‌العمل لولای O را محاسبه کنید.



حل:

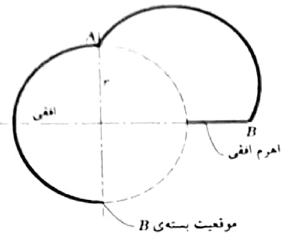


$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۴۰(۸) + ۴۰(۶) + ۱۲۰(۴) + ۲۰۰(۳) - ۲F_O = ۰$$

$$F_O = ۸۲۰lb$$

Scanned by CamScanner

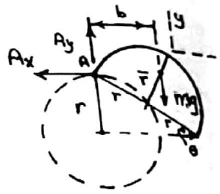
۳-۵۵. درب باریک هواپیما با بدنه مدور شامل یک حفاظ نیم‌دایره‌ای AB به جرم m می‌باشد. نیروی فشاری C در اهرم افقی B برای باز نگه داشتن در را تعیین کنید. همچنین عبارتی برای عکس‌العمل لولای A بیابید (از جدول $D/3$ پیوست D برای موقعیت مرکز جرم حفاظ کمک بگیرید.)



حل:

از جدول $D/3$: $\bar{r} = \frac{2r}{\pi}$

در اینجا



$$b = r\cos\theta + \bar{r}\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

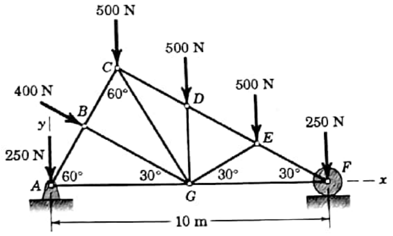
$$b = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad mg\frac{r}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{2}{\pi}\right) - Cr = 0$$

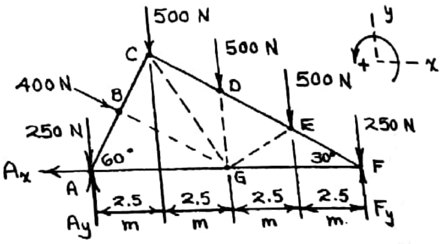
$$C = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \ : \ A_x = C \\ \sum F_y = 0 \ : \ A_y = mg \end{array}\right\} F_A = \sqrt{C^2 + (mg)^2} = 1.55\,mg$$

۳-۵۶. مطابق شکل عکس‌العمل‌های خارجی A و F برای خرپای سقف بارگذاری شده را تعیین کنید. نیروهای قائم نشان‌دهنده‌ی تأثیر مصالح بام است، درحالی که نیروی $400N$ بیانگر نیروی باد است.



حل:



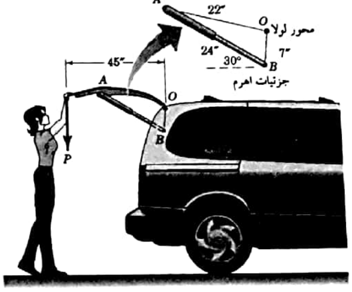
$$\sum F_x = 0 \ : \ -A_x + 400\cos 30° = 0 \quad , \quad A_x = 346N$$

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad 400\left(\frac{10}{4}\right) + 500(2.5) + 500(5) + 500(7.5) + 250(10) - 10F_y = 0$$

$$F_y = 1100N$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad -250 - 400\sin 30° - 500(3) - 250 + 1100 + A_y = 0 \quad , \quad A_y = 1100N$$

۳-۵۷. مطابق شکل شخصی با نیروی قائم P معادل $10lb$ می‌خواهد درب پشتی ون را از حالت باز نشان داده شده ببندد. نیروی لازم در هر کدام از دو اهرم هیدرولیکی AB را تعیین کنید. وزن درب $90lb$ و مرکز ثقل آن به فاصله‌ی $1.5in$ ریز نقطه‌ی A واقع است. مسئله را دوبعدی درنظر بگیرید.



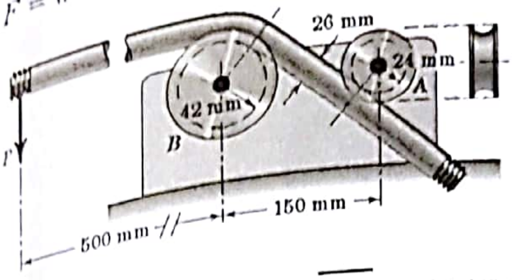
حل:

Scanned by CamScanner

$$۱^۲ = ۲۲^۲ + ۲۴^۲ - ۲(۲۲)(۲۴)\cos\alpha \Rightarrow \alpha = ۱۶/۷۹°$$

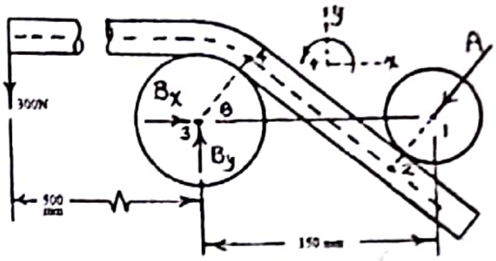
$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_o = ۰$ $\quad ۱۰(۲۵) - ۲F(۲۲\sin\alpha) + ۹۰(۲۲\cos(۳۰-\alpha)) = ۰$

$F = ۱۸۷/۱lb$



۳-۵۸ یک لوله خم‌کن از دو قرقره‌ی شیاردار تشکیل شده که روی یک قاب ثابت نصب شده‌اند و آزادانه می‌چرخند. لوله‌ی مطابق شکل توسط نیروی $P = ۳۰۰N$ خم شده است. عکس‌العمل یاتاقان قرقره‌ها را محاسبه کنید.

حل:



$\overline{۱-۲} = ۲۴ + ۱۳ = ۳۷\,mm$

$\overline{۱-۳} = ۱۵۰\,mm \quad , $

$\overline{۳-۴} = ۴۲ + ۱۳ = ۵۵\,mm$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{۳۷ + ۵۵}{۱۵۰}\right) = ۵۲/۱۷°$$

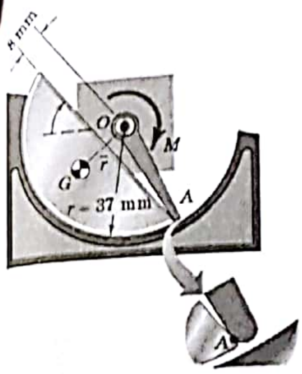
$\overline{۲-۴} = ۱۵۰\sin ۵۲/۱۷° = ۱۱۸/۴۷\,mm$

$\sum M_۲ = ۰ \quad : \quad ۳۰۰(۵۰۰) - ۱۱۸/۴۷A = ۰ \quad , \quad A = ۱۲۶۶N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad B_x - ۱۲۶۶\cos ۵۲/۱۷° = ۰ \quad , \quad B_x = ۷۷۶/۴۶lb$

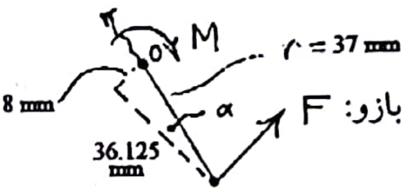
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad B_y - ۳۰۰ - ۱۲۶۶\sin ۵۲/۱۷° = ۰ \quad , \quad B_y = ۱۲۹۹/۹۳lb$

$$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = ۱۵۱۴lb$$



۳-۵۹. مطابق شکل، قطعه‌ی خاصی از یخ‌ساز یخچال نشان داده شده است. (یک «مکعب» ظاهری مشابه مقطعی از استوانه دارد) هنگامی که مکعب‌ها یخ زدند و یک گرمکن کوچک، لایه‌ی نازکی از آب بین مکعب و سطح اتکا تشکیل داد، یک موتور بازوی OA را می‌چرخاند و مکعب خارج می‌شود اگر ۸ مکعب و ۸ بازو وجود داشته باشد، گشتاور M موردنیاز را به صورت تابعی از θ تعیین کنید. جرم ۸ مکعب $۰/۲۵kg$ و مرکز جرم آن در فاصله‌ی $\bar{r} = ۰/۵۵r$ واقع است. اصطکاک ناچیز است و فرض کنید برآیند نیروهای عمودی روی مکعب‌ها از نقطه‌ی O می‌گذرد.

حل:

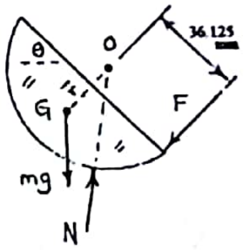


$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{۸}{۳۷}\right) = ۱۲/۴۹°$$

مکعب: $\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_o = ۰ \quad : \quad mg\bar{r}\sin\theta - F(۳۶/۱۲۵) = ۰$

$(۰/۲۵)(۹/۸۱)(۰/۵۵ \times ۳۷)(\sin\theta) - F(۳۶/۱۲۵) = ۰$

$F = ۱/۳۸۲\sin\theta$

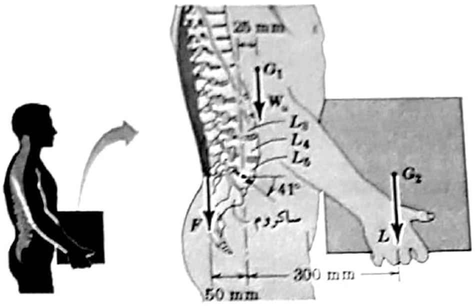


بازو: $\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_o = ۰ \quad : \quad -M + ۱/۳۸۲\sin\theta(۳۶/۱۲۵) = ۰$

$M = ۴۹/۹\sin\theta\,(N.mm)$ ساعتگرد

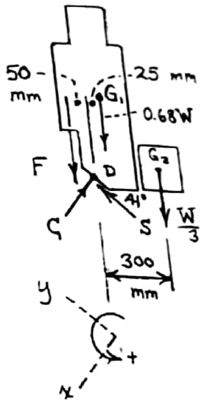
Scanned by CamScanner

۳-۶۰. و بخش کمر ستون فقرات انسان، وزن نیم‌تنه بالایی و نیروی وارده بر آن را تحمل می‌کند. ما در اینجا دیسکی (قرمز تیره) بین پایین‌ترین مهره از ناحیه‌ی کمر ($L_۵$) و بالاترین مهره از ساکروم درنظر می‌گیریم. (الف) برای حالت $L = ۰$، نیروی فشاری C و نیروی برشی S که توسط این دیسک تحمل می‌شود را، تعیین کنید، اگر وزن بدن W باشد. وزن نیم‌تنه بالایی W_u (بالای دیسک موردنظر) ۶۸ درصد وزن کل بدن W است و در G عمل می‌کند. مطابق شکل نیروی قائم F را ماهیچه‌ی پشت به نیم‌تنه بالایی اعمال می‌کند. (ب) مجدداً برای حالتی که شخص مطابق شکل وزنه‌ای معادل $L = \frac{W}{۲}$ را نگه داشته است، محاسبات را تکرار کنید. فرضیات را توضیح دهید.



حل:

الف)



$$\sum M_D = ۰ \quad : \quad F(۵۰) - ۰/۶۸W(۲۵) = ۰ \quad , \quad F = ۰/۳۴W$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad S - ۰/۶۸W \sin ۴۱^\circ - F \sin ۴۱^\circ = ۰ \quad , \quad S = ۰/۶۶۹W$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -C - ۰/۶۸W \cos ۴۱^\circ - F \cos ۴۱^\circ = ۰ \quad , \quad C = ۰/۷۷W$$

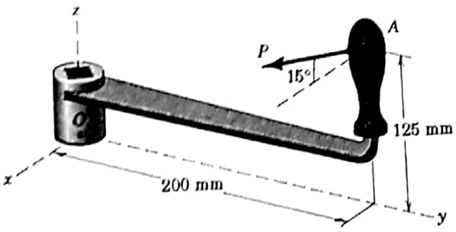
ب) با $L = \frac{W}{۲}$:

$$\sum M_D = ۰ \quad : \quad F(۵۰) - ۰/۶۸W(۲۵) - \frac{W}{۳}(۳۰۰) = ۰ \quad , \quad F = ۲/۳۴W$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad S - ۰/۶۸W \sin ۴۱^\circ - F \sin ۴۱^\circ - \frac{W}{۳} \sin ۴۱^\circ = ۰ \quad , \quad S = ۲/۲W$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -C + ۰/۶۸W \cos ۴۱^\circ + F \cos ۴۱^\circ + \frac{W}{۳} \cos ۴۱^\circ = ۰ \quad , \quad C = ۲/۵۳W$$

۳-۶۱. مطابق شکل نیروی $P = ۱۸۰N$ به دسته‌ی ماشین ثابتی وارد شده است. عکس‌العمل‌های O را به صورت برداری بنویسید. وزن مجموعه‌ی دسته را نادیده بگیرید.



حل:

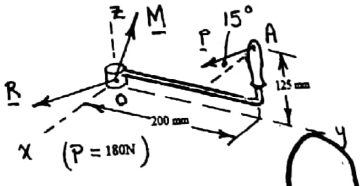
$P = ۱۸۰N$

$$\sum \mathbf{F} = ۰ \; : \quad \mathbf{R} + \mathbf{P} = ۰ \; , \quad \mathbf{R} = -\mathbf{P} = -۱۸۰[\cos ۱۵^\circ \mathbf{i} + \sin ۱۵^\circ \mathbf{k}] = -۱۷۳/۹\mathbf{i} - ۴۶/۶\mathbf{k} \quad N$$

$$\sum \mathbf{M} = ۰ \quad : \quad \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{P} = ۰$$

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = -(۲۰۰\mathbf{j} + ۱۲۵\mathbf{k}) \times (۱۷۳/۹\mathbf{i} + ۴۶/۶\mathbf{k}) \quad N.m$$

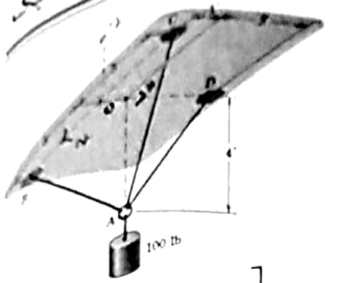
$$= -۹/۳۲\mathbf{i} - ۲۱/۷\mathbf{j} + ۳۴/۸\mathbf{k} \quad N.m$$



۳-۶۲. کشش کابل‌های AB، AC و AD را تعیین کنید.

Scanned by CamScanner

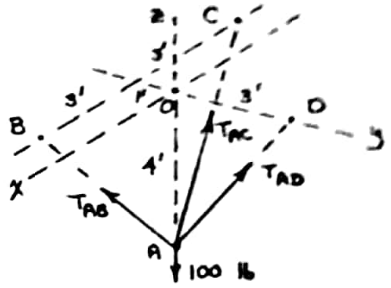
حل:



$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\left[\frac{۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۴\mathbf{k}}{\sqrt{۳^۲+۱^۲+۴^۲}}\right] = T_{AB}[۰/۵۸۸\mathbf{i}-۰/۱۹۶۲\mathbf{j}+۰/۷۸۴\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\left[\frac{-۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۴\mathbf{k}}{\sqrt{۳^۲+۱^۲+۴^۲}}\right] = T_{AC}[-۰/۵۸۸\mathbf{i}-۰/۱۹۶۲\mathbf{j}+۰/۷۸۴\mathbf{k}]$$

$$T_{AD} = T_{AD}\left[\frac{۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}\right] = T_{AD}[۰/۶\mathbf{j}+۰/۸\mathbf{k}]$$

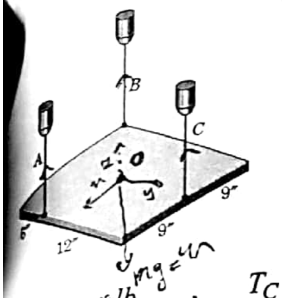


$$\begin{cases}\sum F_x = ۰ : & ۰/۵۸۸T_{AB} - ۰/۵۸۸T_{AC} = ۰ & (۱)\\ \sum F_y = ۰ : & -۰/۱۹۶۲T_{AB} - ۰/۱۹۶۲T_{AC} + ۰/۶T_{AD} = ۰ & (۲)\\ \sum F_z = ۰ : & ۰/۷۸۴T_{AB} + ۰/۷۸۴T_{AC} + ۰/۸T_{AD} - ۱۰۰ = ۰ & (۳)\end{cases}$$

پاسخ : $\begin{cases} T_{AB} = ۴۷/۸\,lb \\ T_{AC} = ۴۷/۸\,lb \\ T_{AD} = ۳۱/۲\,lb \end{cases}$

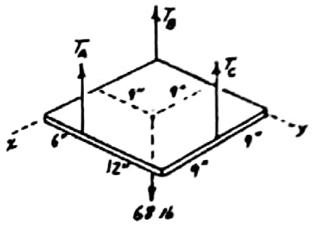
۳-۶۳. مطابق شکل یک صفحه‌ی فولادی مربعی به ضلع $۱۸in$ و وزن $۶۸lb$ در حالت افقی به وسیله‌ی ۳ سیم معلق است. کشش در هر سیم را حساب کنید.

حل:



$$\sum M_x = ۰ : ۶T_A + ۱۸T_C - ۶۸(۹) = ۰\ ,\ T_A + ۳T_C = ۱۰۲$$

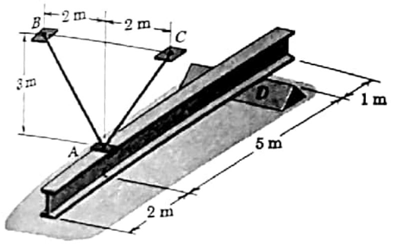
$$\sum M_y = ۰ : -۱۸T_A - ۹T_C + ۶۸(۹) = ۰\ ,\ ۲T_A + T_C = ۶۸$$



$$T_A = ۲۰/۴\,lb\ ,\quad T_C = ۲۷/۲\,lb$$

$$\sum F_z = ۰ : \quad ۲۰/۴ + ۲۷/۲ + T_B - ۶۸ = ۰\ ,\quad T_B = ۲۰/۴\,lb$$

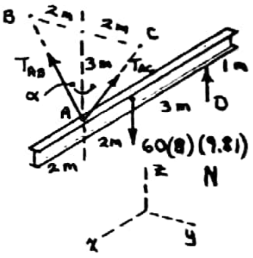
۳-۶۴. تیر یکنواخت I شکل، جرمی معادل $۶۰kg$ در هر متر طولش دارد. کشش در دو کابل تکیه‌گاهی و عکس‌العمل D را تعیین کنید.



حل:

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{۲}{۳} = ۳۳/۷^\circ$$

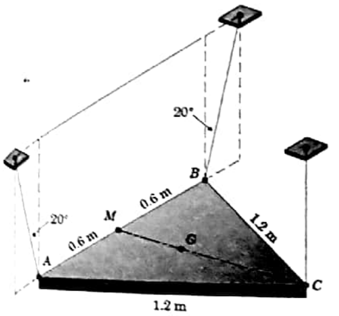
$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad T_{AB} = T_{AC} = T$$



$$\sum M_{A_y} = ۰ \quad : \quad -۶۰(۸)(۹/۸۱)(۲) + D(۵) = ۰\ ,\quad D = ۱۸۸۴N$$

$$\sum F_z = ۰ : \ ۲T\cos\alpha + D - ۶۰(۸)(۹/۸۱) = ۰\ ,\ T = ۱۶۹۸ = T_{AB} = T_{AC}\ \ N$$

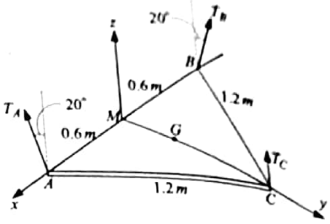
۳-۶۵. سه کابل، صفحه‌ای یکنواخت به جرم $۸۰kg$ و به شکل متساوی‌الاضلاع را تحمل می‌کنند. کشش در هر کابل را تعیین کنید. مرکز ثقل صفحه G در فاصله‌ی یک سوم طول $\overline{MC}$ از M واقع است.



حل:

$$\overline{MC} = \sqrt{۱/۲^۲ - ۰/۶^۲} = ۱/۰۴m\ ,\quad \overline{MG} = \frac{۱/۰۴}{۳} = ۰/۳۴۶۷m$$

Scanned by CamScanner



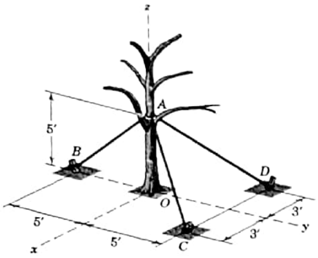
$mg = ۸۰(۹/۸۱) = ۷۸۴/۷\,N$

$\sum \mathbf{M_x} = ۰ \quad : \quad \mathbf{T}_C \times \mathbf{MC} - \mathbf{mg} \times \mathbf{MG} = ۰$

$T_C = \dfrac{۷۸۴/۸ \times ۰/۲۴۶۷}{۱/۰۴} = ۲۶۲\,N$

$\sum \mathbf{F_x} = ۰ \quad : \quad \mathbf{T}_A \sin ۲۰° - \mathbf{T}_B \sin ۲۰° = ۰ \quad , \quad T_A = T_B$

$\sum \mathbf{F_z} = ۰ \quad : \quad \mathbf{T}_A \cos ۲۰° + \mathbf{T}_B \cos ۲۰° + \mathbf{T}_C - \mathbf{mg} = ۰ \quad , \quad T_A = T_B = ۲۷۸\,N$

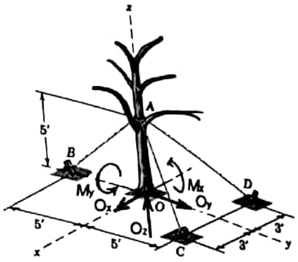


۳-۶۶. درخت جوانی که در ابتدا خم بوده است، به وسیله‌ی سه سیم با کشش‌های $AB = ۰$، $AC = ۱۰lb$ و $AD = ۱۵lb$ به حالت قائم آورده شده است. عکس‌العمل‌های نیرو و گشتاور در پایین تنه‌ی O را تعیین کنید. از وزن درخت صرف‌نظر کنید.

حل:

$\mathbf{T}_{AC} = \dfrac{T_{AC}}{\sqrt{۵۹}}(۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})$

$\mathbf{T}_{AD} = \dfrac{T_{AD}}{\sqrt{۵۹}}(-۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})$



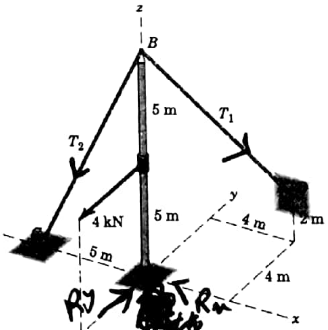
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x - \dfrac{۱۵ \times ۳}{\sqrt{۵۹}} + \dfrac{۳ \times ۱۰}{\sqrt{۵۹}} = ۰ \quad , \quad O_x = ۱/۹۵۳\,lb$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -O_y + \dfrac{۵ \times ۱۰}{\sqrt{۵۹}} + \dfrac{۵ \times ۱۵}{\sqrt{۵۹}} = ۰ \quad , \quad O_y = ۱۶/۲۷\,lb$

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad O_z - \dfrac{۵ \times ۱۰}{\sqrt{۵۹}} - \dfrac{۵ \times ۱۵}{\sqrt{۵۹}} = ۰ \quad , \quad O_z = ۱۶/۲۷\,lb$

$\sum M_x = ۰ \quad , \quad -\dfrac{۵ \times ۱۰}{\sqrt{۵۹}} \times ۵ - \dfrac{۵ \times ۱۵}{\sqrt{۵۹}} \times ۵ + M_x = ۰ \quad , \quad M_x = ۸۱/۴\,lb.ft$

$\sum M_y = ۰ \quad , \quad M_y + \dfrac{۳ \times ۱۰}{\sqrt{۵۹}} \times ۵ - \dfrac{۳ \times ۱۵}{\sqrt{۵۹}} \times ۵ = ۰ \quad , \quad M_y = ۹/۷۶\,lb.ft$

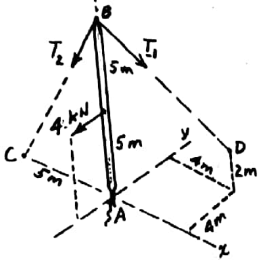


۳-۶۷. دکل قائمی توسط دو کابل ثابت BC و BD و مفصل کاسه-ساچمه‌ای A حمایت می‌شود و نیرویی معادل $۴kN$ را تحمل می‌کند. کشش $T_۱$ در BD را حساب کنید. آیا این مسئله را می‌توان تنها با به کار بردن یک معادله تعادل حل کرد؟

حل:

$\overline{BD} = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲ + (-۸)^۲} = ۴\sqrt{۶}\,m$

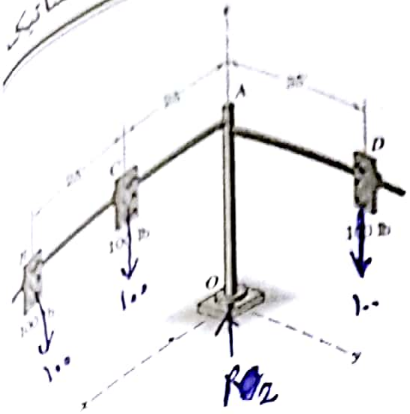
$\mathbf{T}_۱ = \dfrac{T_۱}{۴\sqrt{۶}}(۴\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۸\mathbf{k}) = \dfrac{T_۱}{\sqrt{۶}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۲\mathbf{k})$



$\sum M_x = ۰ \quad : \quad ۱۰\mathbf{k} \times \dfrac{T_۱}{\sqrt{۶}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۲k) \cdot \mathbf{i} + ۵\mathbf{k} \times (-۴\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = ۰$

$-\dfrac{۱۰}{\sqrt{۶}} T_۱ + ۲۰ = ۰ \quad , \quad T_۱ = ۲\sqrt{۶}\,kN \quad$ یا $\quad T_۱ = ۴/۹\,kN$

Scanned by CamScanner

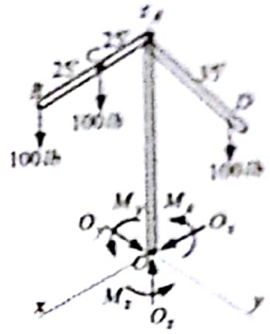


۳-۶۸. تیر چراغ برق در حالت افقی و قائم به صورت مجموعه‌ای واحد ساخته شده است. عکس‌العمل‌های نیرویی و گشتاوری تکیه‌گاه O ناشی از سه چراغ واقع در A، C و D که هر کدام وزنی معادل ۱۰۰ lb دارند را تعیین کنید. پاسخ‌ها را به صورت یک مقدار نیرو و یک مقدار گشتاور گزارش کنید.

حل:

$$\sum F_z=۰ \quad : \quad O_z-۲(۱۰۰)k=۰ \quad , \quad O_z=۲۰۰k$$

$$\sum F_x=۰ \quad : \quad O_x=۰$$

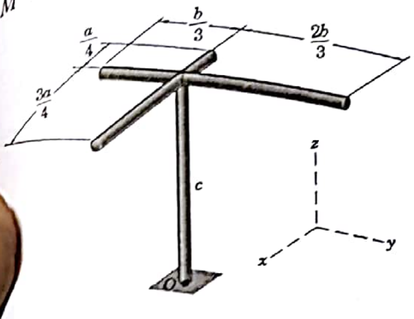


$$\sum F_y=۰ \quad : \quad O_y=۰ \quad , \quad O=۲۰۰lb$$

$$\sum M_o=۰ \quad : \quad -M_y\mathbf{j}+M_x\mathbf{i}+(۲۵\mathbf{i})\times(-۱۰۰\mathbf{k})+(۵۰\mathbf{i})\times(-۱۰۰\mathbf{k})+(۲۵\mathbf{j})\times(-۱۰۰\mathbf{k})=۰$$

$$M_x=۲۵۰۰lb.ft \quad , \quad M_y=۷۵۰۰lb.ft$$

$$M=\sqrt{۷۵۰۰^۲+۲۵۰۰^۲}=۸۲۸۰lb.ft$$



۳-۶۹. جسمی از میله‌ی باریک یکنواخت با جرم واحد طول ρ ساخته شده است. مقادیر عکس‌العمل‌های نیرویی و گشتاوری در تکیه‌گاه O را تعیین کنید.

حل:

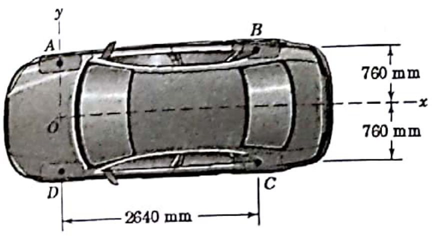
$$\sum F_z=۰ \quad : \quad O_z-\rho g(a+b+c)=۰ \quad , \quad O_z=\rho g(a+b+c)$$

$$\sum F_x=۰ \quad : \quad O_x=۰$$

$$\sum F_y=۰ \quad : \quad O_y=۰ \quad , \quad O=\rho g(a+b+c)$$

$$\sum M_o=۰ \quad : \quad -M_y\mathbf{j}+M_x\mathbf{i}+\left(\frac{a}{۴}\mathbf{i}\right)\times(-\rho ga\mathbf{k})+\left(\frac{b}{۶}\mathbf{j}\right)\times(-\rho gb\mathbf{k})=۰$$

$$M_x=\frac{۱}{۶}\rho gb^۲ \quad , \quad M_y=\frac{۱}{۴}\rho ga^۲ \quad , \quad M=\sqrt{\left(\frac{۱}{۶}\rho gb^۲\right)^۲+\left(\frac{۱}{۴}\rho ga^۲\right)^۲}=\frac{\rho g}{۲}\sqrt{\frac{a^۴}{۴}+\frac{b^۴}{۹}}$$



۳-۷۰. ماشینی روی زمین است درحالی که زیر هر لاستیک آن ترازوی مستقلی قرار داده شده است. مقدار خوانده شده از ترازوی A ‏۴۳۰۰N، از B ‏۲۹۰۰N، از C ‏۳۰۰۰N و از D ‏۴۶۰۰N است. مؤلفه‌ی x و y مرکز جرم G و جرم ماشین را تعیین کنید.

حل:

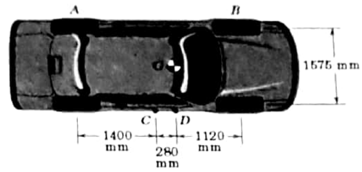
$$\sum F=۰ \quad : \quad ۴۳۰۰+۲۹۰۰+۳۰۰۰+۴۶۰۰-W=۰ \quad , \quad W=۱۴۸۰۰N \quad , \quad m=۱۵۰۹kg$$

$$\sum M_x=۰ \quad : \quad (۴۳۰۰+۲۹۰۰)۷۶۰-(۱۴۸۰۰)y-(۳۰۰۰+۴۶۰۰)۷۶۰=۰ \quad , \quad y=-۲۰٫۵mm$$

$$\sum M_y=۰ \quad : \quad (۲۹۰۰+۳۰۰۰)۲۶۴۰-(۱۴۸۰۰)x=۰ \quad , \quad x=۱۰۵۲mm$$

۳-۷۱. در تصویر، نمای فوقانی یک خودرو نشان داده شده است. دو موقعیت متفاوت C و D برای جک در

Scanned by CamScanner



نظر گرفته شده است. در هر دو مورد، تمامی قسمت راست خودرو از زمین بلند می‌شود. عکس‌العمل‌های عمودی در A و B و نیروی قائم موردنیاز جک در هر دو حالت قرارگیری جک را، تعیین کنید. جرم ماشین به صورت صلب ۱۶۰۰kg است. مرکز جرم G در وسط ماشین واقع است.

حل:

ماشین با یک صفحه مدل‌سازی شده است. اندازه‌ها به mm

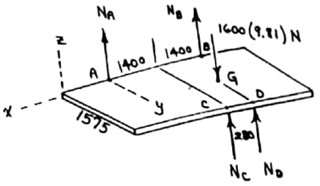
جک در C $(N_D=0)$:

$$\sum M_x=0 \quad : \quad -1600(9.81)\left(\frac{1575}{2}\right)+N_C(1575)=0 \quad , \quad N_C=7850N$$

$$\sum M_y=0 \quad : \quad -1600(9.81)(1680)+N_B(2800)+N_C(1400)=0$$

$$\sum F_z=0 \quad : \quad N_A+N_B+N_C-1600(9.81)=0$$

$$\Rightarrow \quad N_A=2350N \quad , \quad N_B=5490N$$



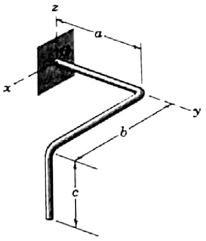
جک در D $(N_C=0)$: $N_D=7850\ N \Rightarrow N_C$ به صورت مشابه

$$\sum M_y=0 \quad : \quad -1600(9.81)(1680)+N_B(2800)+N_D(1680)=0$$

$$\sum F_z=0 \quad : \quad N_A+N_B+N_D-1600(9.81)=0$$

$$\Rightarrow \quad N_A=3140N \quad , \quad N_B=4710N$$

۳-۷۲. جسمی از میله‌ی باریک با جرم واحد طول ρ ساخته شده است. عکس‌العمل‌های نیرو و گشتاور در O را تعیین کنید.



حل:

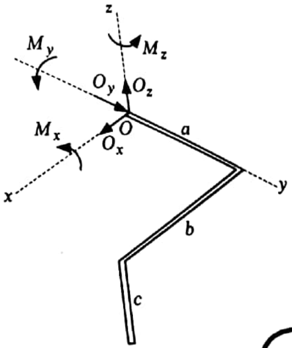
$$\sum F_x=0 \quad : \quad O_x=0$$

$$\sum F_y=0 \quad : \quad O_y=0$$

$$\sum F_z=0 \quad : \quad O_z-\rho g(a+b+c)=0 \quad , \quad O_z=\rho g(a+b+c)$$

$$\sum M_{o_x}=0 \quad : \quad M_x-\rho g\, a\left(\frac{a}{2}\right)-\rho g b(a)-\rho g c(a)=0$$

$$M_x=\rho g a\left(\frac{a}{2}+b+c\right)$$



$$\sum M_{o_y}=0 \quad : \quad M_y+\rho g\, b\left(\frac{b}{2}\right)+\rho g c(b)=0$$

$$M_y=-\rho g b\left(\frac{b}{2}+c\right)$$

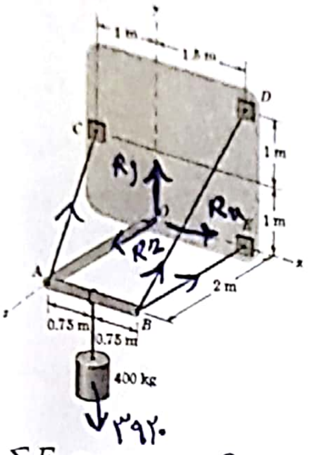
$$\sum M_{o_z}=0 \quad : \quad M_z=0$$

۳-۷۳. میله‌ی پیوسته‌ی زاویه‌دار سبکی که استوانه‌ای به جرم ۴۰۰kg را تحمل می‌کند، به وسیله‌ی سه کابل و یک مفصل کاسه- ساچمه‌ای، که به صفحه‌ی قائم $x-y$ می‌رسند، حمایت می‌شود. عکس‌العمل‌ها در O و

Scanned by CamScanner

کشش کابل‌ها را تعیین کنید.

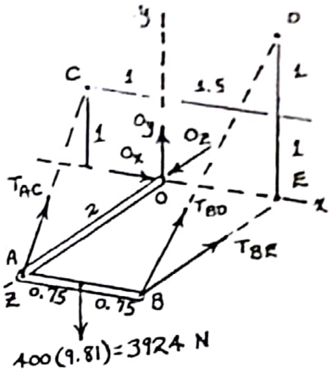
حل:



$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\left[\frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}}{\sqrt{۱^۲+۱^۲+۲^۲}}\right] = T_{AC}(-۰/۴۰۸\mathbf{i}+۰/۴۰۸\mathbf{j}-۰/۸۱۶\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}(۰/۷۰۷\mathbf{j}-۰/۷۰۷\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{BE} = -T_{BE}\,\mathbf{k}$$



$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x - ۰/۴۰۸T_{AC} = ۰$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y + ۰/۴۰۸T_{AC} + ۰/۷۰۷T_{BD} - ۳۹۲۴ = ۰$$

$$\sum F_z = ۰ \quad : \quad O_z - ۰/۸۱۶T_{AC} - ۰/۷۰۷T_{BD} - T_{BE} = ۰$$

$$\sum M_{o_x} = ۰ \quad : \quad -۰/۴۰۸T_{AC}(۲) - ۰/۷۰۷T_{BD}(۲) + ۳۹۲۴(۲) = ۰$$

$$\sum M_{o_y} = ۰ \quad : \quad -۰/۴۰۸T_{AC}(۲) + ۰/۷۰۷T_{BD}(۱/۵) + T_{BE}(۱/۵) = ۰$$

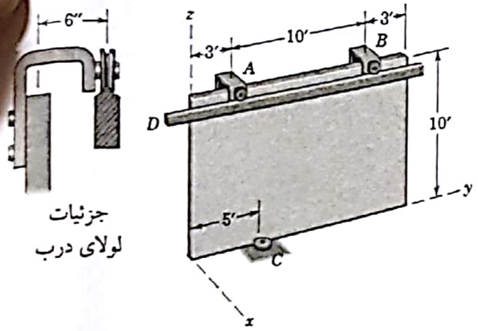
$$\sum M_{o_z} = ۰ \quad : \quad -۳۹۲۴(۰/۷۵) + ۰/۷۰۷T_{BD}(۱/۵) = ۰$$

جواب : $O_x = ۱۹۶۲N$, $T_{AC} = ۴۸۱۰N$

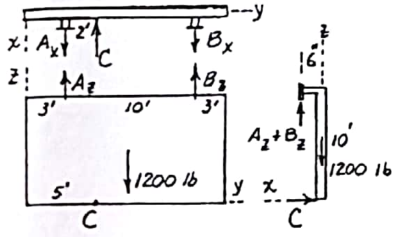
$O_y = ۰(\sum M_{AB} = ۰)$, $T_{BD} = ۲۷۷۰N$

$O_z = ۶۵۴۰N$, $T_{BE} = ۶۵۴N$

۳-۷۴. درب صنعتی زیر یک صفحه‌ی مستطیلی یکنواخت به وزن $۱۲۰۰lb$ است که توسط چرخ‌های آویز A و B در امتداد ریل ثابت D می‌غلتد. درب توسط غلتک هادی نصب شده در کف C، در صفحه‌ی قائم نگه داشته شده است. به گونه‌ای که به لبه‌ی پایین تکیه زده است. مطابق شکل، نیروی جانبی افقی در هر کدام از چرخ‌های A و B که باید در طراحی بست‌ها درنظر گرفته شود، را محاسبه کنید.



حل:

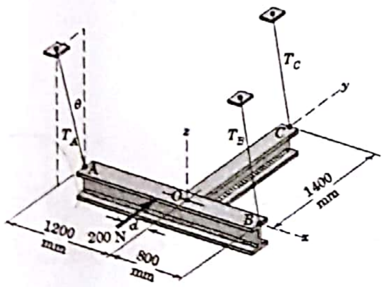


$$x-z : \sum M_{AB} = ۰ \quad : \quad ۱۰C - ۱۲۰۰\left(\frac{۶}{۱۲}\right) = ۰ \quad , \quad C = ۶۰lb$$

$$x-y : \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۲(۶۰) - ۱۰B_x = ۰ \quad , \quad B_x = ۱۲lb$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x + ۱۲ - ۶۰ = ۰ \quad , \quad A_x = ۴۸lb$$

۳-۷۵. دو تیر I شکل به یکدیگر جوش داده شده‌اند درحالی که در ابتدا به وسیله‌ی ۳ کابل با طول‌های مساوی حمایت می‌شدند، به طوری که کابل‌ها به صورت قائم از تکیه‌گاه‌ها درست بالای A، B و C آویزان بوده‌اند. مطابق شکل، وقتی نیروی $۲۰۰\,N$ با فاصله‌ی مشخص d وارد می‌شود، سیستم به حالت تعادل جدیدی می‌رسد. تمامی کابل‌ها به طور مشابه در صفحه‌هایی موازی صفحه‌ی $y-z$ با زاویه‌ی θ از



راستای قائم منحرف شده‌اند. میزان انحراف θ و فاصله‌ی صحیح d را تعیین کنید. تیرهای AB و OC به ترتیب دارای جرم‌های ۷۲kg و ۵۰kg هستند. مؤلفه‌ی y مرکز جرم تیر OC، ۷۲۵mm است.

حل:

$\sum M_y = ۰ \quad : \quad T_A \cos\theta(۱۲۰۰) - T_B \cos\theta(۸۰۰) = ۰ \quad , \quad ۱٫۵T_A = T_B$ (۱)

$\sum M_x = ۰ \quad : \quad T_C \cos\theta(۱۴۰۰) - ۵۰(۹٫۸۱)(۷۲۵) = ۰ \quad , \quad T_c \cos\theta = ۲۵۴\,N$ (۲)

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad T_C \cos\theta + T_A \cos\theta + T_B \cos\theta - (۵۰+۷۲)۹٫۸۱ = ۰$

$(۲),(۱) \Rightarrow ۲۵۴ + T_A \cos\theta + ۱٫۵T_A \cos\theta = ۱۲۲(۹٫۸۱) \quad , \quad T_A \cos\theta = ۳۷۷٫۱۲۸$ (۳)

$(۲),(۳) \Rightarrow \dfrac{T_C \cos\theta}{T_A \cos\theta} = \dfrac{۲۵۴}{۳۷۷٫۱۲۸} = ۰٫۶۷ \quad , \quad T_C = ۰٫۶۷T_A$ (۴)

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۲۰۰ - T_A \sin\theta - T_B \sin\theta - T_C \sin\theta = ۰ \quad , \quad (T_A + T_B + T_C)\sin\theta = ۲۰۰$

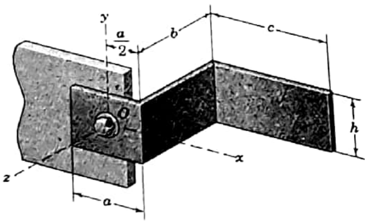
$(۱),(۴) \Rightarrow (T_A + ۱٫۵T_A + ۰٫۶۷T_A)\sin\theta = ۲۰۰ \quad , \quad T_A \sin\theta = ۶۳٫۰۲\,N$ (۵)

$(۳),(۵) \Rightarrow \dfrac{T_A \sin\theta}{T_A \cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{۶۳٫۰۲}{۳۷۷٫۱۲۸} \quad , \quad \theta = ۹٫۴۹^\circ$

$\sum M_{A_z} = ۰ \quad : \quad ۲۰۰(۱۲۰۰ - d) - T_C \sin\theta(۱۲۰۰) - T_B \sin\theta(۲۰۰۰) = ۰$

$d = ۰$

۳-۷۶. بست بزرگی از صفحات سنگین با جرم واحد سطح ρ ساخته شده است. عکس‌العمل‌های نیرو و گشتاور پیچ O را تعیین کنید.



حل:

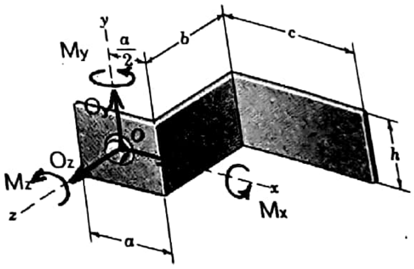
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y - \rho g(ah + bh + ch) = ۰ \quad , \quad O_y = \rho gh(a+b+c)$

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad O_z = ۰$

$\sum M_{o_z} = ۰ \quad : \quad M_z - \rho ghb\left(\dfrac{a}{۲}\right) - \rho ghc\left(\dfrac{a}{۲} + \dfrac{c}{۲}\right) = ۰$

$M_z = \dfrac{\rho gh}{۲}(ab + ac + c^۲)$

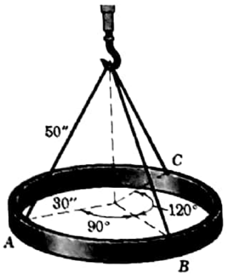


$\sum M_{o_x} = ۰ \quad : \quad M_x - \rho ghb\left(\dfrac{b}{۲}\right) - \rho ghc(b) = ۰$

$M_x = \rho ghb\left(\dfrac{b}{۲} + c\right)$

$\sum M_{o_y} = ۰ \quad , \quad M_y = ۰$

۳-۷۷. مطابق شکل، یک حلقه‌ی فولادی یکنواخت به قطر ۶۰in و وزن ۶۰۰lb با سه کابل متصل به نقاط A، B و C، هر کدام به طول ۵۰in، بلند شده است. کشش در هر کابل را حساب کنید.



حل:

$\mathbf{A} = \dfrac{A}{۵}(-۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{k})$

$B=\frac{B}{۵}(-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})$

$C=\frac{C}{۵}(۳\mathbf{i}\cos ۳۰^\circ+۳\mathbf{j}\sin ۳۰^\circ+۴\mathbf{k})$

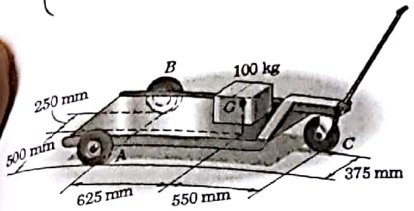
$W=-۴۰۰\mathbf{k}\ lb$

$$\sum F=۰:\frac{۱}{۵}\left(-۳A+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}C\right)\mathbf{i}+\frac{۱}{۵}\left(-۳B+\frac{۳}{۲}C\right)\mathbf{j}+\frac{۱}{۵}(۴A+۴B+۴C-۵(۴۰۰))\mathbf{k}=۰$$

$$A=\frac{\sqrt{۳}}{۲}C \quad , \quad B=\frac{C}{۲} \quad , \quad ۴(A+B+C)=۲۰۰۰$$

$$۴C\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}+۱\right)=۲۰۰۰ \quad , \quad A=۲۱۷lb \quad , \quad B=۱۵۸/۵lb \quad , \quad C=۲۷۵lb$$

۳-۷۸. مطابق شکل باربر سه چرخی برای حمل جعبه‌ای به جرم $۱۰۰kg$ استفاده شده است. تغییرات عکس‌العمل‌های عمودی چرخ‌ها را به علت وزن جعبه محاسبه کنید.



حل:

$\sum M_x=۰ \quad : \quad -۱۰۰(۹/۸۱)(۶۲۵)+\Delta N_c(۱۱۷۵)=۰$

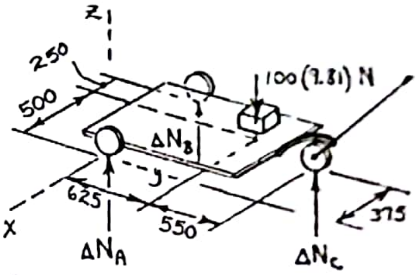
$\Delta N_c=۵۲۲N$

$\sum M_y=۰ \quad : \quad \Delta N_B(۷۵۰)-۱۰۰(۹/۸۱)(۵۰۰)+۵۲۲(۳۷۵)=۰$

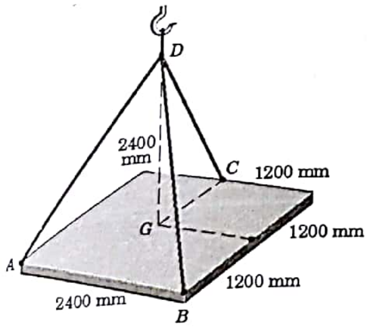
$\Delta N_B=۲۹۳N$

$\sum F_z=۰ \quad : \quad ۵۲۲+۲۹۳+\Delta N_A-۱۰۰(۹/۸۱)=۰$

$\Delta N_A=۶۶/۱N$



۳-۷۹. صفحه‌ای مربعی از جنس فولاد با مرکز جرم G، جرمی معادل $۱۸۰۰kg$ دارد. کشش در هر کدام از سه کابلی که صفحه را به صورت افقی بلند کرده‌اند، محاسبه کنید.



حل:

$$\overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{۲/۴^۲+(۱/۲\sqrt{۲})^۲}=۱/۲\sqrt{۶}\,m$$

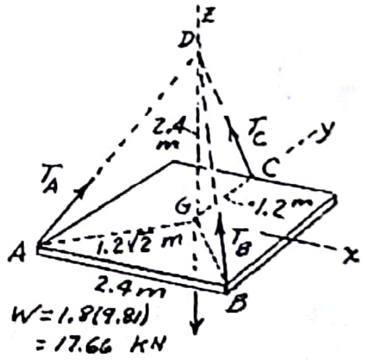
$$\overline{CD}=\sqrt{۱/۲^۲+۲/۴^۲}=۱/۲\sqrt{۵}\,m$$

$$\mathbf{T}_A=\frac{T_A}{۱/۲\sqrt{۶}}(۱/۲\mathbf{i}+۱/۲\mathbf{j}+۲/۴\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_B=\frac{T_B}{۱/۲\sqrt{۶}}(-۱/۲\mathbf{i}+۱/۲\mathbf{j}+۲/۴\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_C=\frac{T_C}{۱/۲\sqrt{۵}}(-۱/۲\mathbf{j}+۲/۴\mathbf{k})$$

$$\sum \mathbf{F}=۰ \quad : \quad \mathbf{T}_A+\mathbf{T}_B+\mathbf{T}_C+\mathbf{W}=۰$$



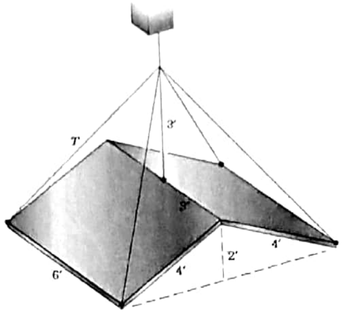
Scanned by CamScanner

$$\mathbf{i}\left(\frac{T_A}{\sqrt{۶}}-\frac{T_B}{\sqrt{۶}}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{T_A}{\sqrt{۶}}+\frac{T_B}{\sqrt{۶}}-\frac{T_C}{\sqrt{۵}}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{۲T_A}{\sqrt{۶}}+\frac{۲T_B}{\sqrt{۶}}+\frac{۲T_C}{\sqrt{۵}}-۱۷/۶۶\right)=۰$$

$$T_A=T_B \quad , \quad \frac{۲T_A}{\sqrt{۶}}+\frac{۲T_C}{\sqrt{۵}}=۱۷/۶۶ \quad , \quad \frac{۲T_A}{\sqrt{۶}}=\frac{T_C}{\sqrt{۵}}$$

$$T_A=T_B=۵/۴۱\,kN \quad , \quad T_C=۹/۸۷\,kN$$

۳-۸۰ دو صفحه‌ی مستطیلی یکنواخت هر کدام با وزن $۸۰۰lb$ آزادانه، پیرامون لبه‌ی مشترک خود لولا شده‌اند و توسط یک کابل مرکزی و چهار کابل متقارن گوشه‌ای آویزان شده‌اند. کشش T در هر کدام از کابل‌های کنج و کشش $T_۰$ در کابل مرکزی را محاسبه کنید.



حل: یکی از نیروهای T را به صورت برداری می‌نویسیم:

$$\mathbf{T}=\frac{T}{\sqrt{۴۶}}(۴\cos ۳۰\,\mathbf{i}+۳\,\mathbf{j}+۵\,\mathbf{k})$$

$$\sum F_z=۰ \quad : \quad \frac{۴T}{\sqrt{۴۶}}(۵)+T_۰-۱۶۰۰=۰ \qquad (۱)$$

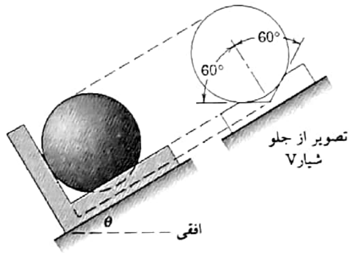
یکی از صفحات را درنظر گرفته و حول لبه‌ی مشترک دو صفحه گشتاور می‌گیریم:

$$۲\frac{۵T}{\sqrt{۴۶}}(۴\cos ۳۰^\circ)-۲\frac{۴T\cos ۳۰^\circ}{\sqrt{۴۶}}(۲)-۱۶۰۰\cos ۳۰=۰$$

$$\frac{۲۴T}{\sqrt{۴۶}}=۱۶۰۰ \quad , \quad T=۴۵۲\,lb$$

$$(۱) \Rightarrow ۴\frac{۴۵۲(۵)}{\sqrt{۴۶}}+T_۰=۱۶۰۰ \quad , \quad T_۰=۲۶۷\,lb$$

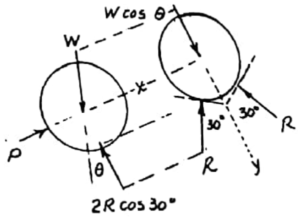
۳-۸۱ کره‌ای همگن و صیقلی در شیار ۱۲۰° قرار گرفته است و بر صفحه‌ی انتهایی، که بر راستای شیار عمود است، تکیه زده است. زاویه‌ی θ با راستای افق، درصورتی که عکس‌العمل هر لبه‌ی شیار با عکس‌العمل صفحه‌ی انتهایی برابر باشد را تعیین کنید.



حل:

$$\sum F_y=۰ \quad : \quad ۲R\cos ۳۰^\circ-W\cos\theta=۰ \quad , \quad R\sqrt{۳}=W\cos\theta$$

$$\sum F_x=۰ \quad : \quad P-W\sin\theta=۰ \quad , \quad P=W\sin\theta$$



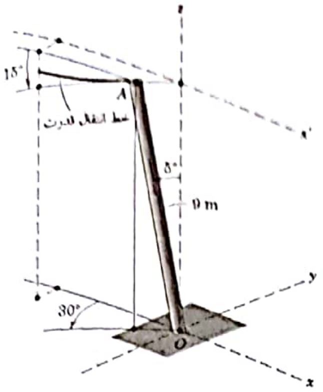
$$\Rightarrow \frac{P}{R\sqrt{۳}}=\tan\theta$$

$$P=R \Rightarrow \theta=\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)=۳۰^\circ$$

۳-۸۲ به خاطر ترکیب عواملی چون شرایط تکیه‌گاهی و کشش کابل انتقال قدرت، تیر چراغ برق به اندازه‌ی ۵° خم شده است. طول تیر یکنواخت $۹m$ و جرم واحد طول آن $۲۵kg/m$ است، کشش در کابل انتقال قدرت $۹۰۰N$ است. عکس‌العمل‌ها در پایه‌ی O را تعیین کنید. توجه کنید که کابل انتقال قدرت در صفحه‌ی قائمی موازی صفحه‌ی x-z قرار دارد.

Scanned by CamScanner

حل:



$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۹۰۰\cos ۱۵^\circ - O_x = ۰ \quad , \quad O_x = ۸۶۹ N$

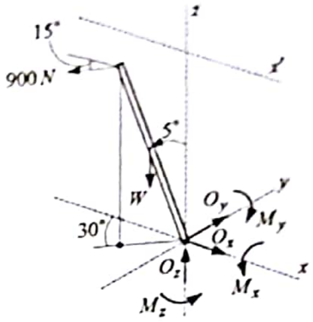
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y = ۰$

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad O_z - mg - ۹۰۰ \sin ۱۵^\circ = ۰$

$O_z = ۹۰۰ \sin ۱۵^\circ + (۲۵ \times ۹) ۹/۸۱ = ۲۴۴۰ N$

$\sum M_x = ۰ \quad : \quad ۴/۵ \sin ۵^\circ (\sin ۳۰^\circ)(۲۵ \times ۹) ۹/۸۱$
$+ ۹۰۰ \sin ۱۵^\circ (۹ \sin ۵^\circ) \sin ۳۰^\circ + M_x = ۰$

$M_x = -۵۲۴ N.m$

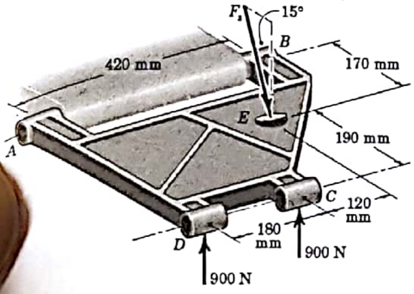


$\sum M_y = ۰ \quad : \quad ۴/۵ \sin ۵^\circ (\cos ۳۰^\circ)(۲۵ \times ۹) ۹/۸۱ + ۹۰۰ \sin ۱۵^\circ (۹ \sin ۵^\circ) \cos ۳۰^\circ$
$+ ۹۰۰ \cos ۱۵^\circ (۹ \cos ۵^\circ) - M_y = ۰$

$M_y = ۸۷۰۰ N.m$

$\sum M_z = ۰ \quad : \quad ۹۰۰ \cos ۱۵^\circ (۹ \sin ۵^\circ) \sin ۳۰^\circ - M_z = ۰ \quad , \quad M_z = ۳۴۱ N.m$

۳-۸۳ به عنوان قسمتی از بررسی در یک طراحی، بازوی تحتانی A (قسمتی از سیستم تعلیق خودرو) توسط یاتاقانی در A و B حمایت می‌شود و تحت نیروهای $۹۰۰ N$ در C و D قرار گرفته است. فنر سیستم تعلیق، که برای وضوح بیشتر نشان داده نشده، مطابق شکل نیروی F_S را در E وارد می‌کند، که E در صفحه‌ی $ABCD$ واقع است. مقدار نیروی F_S و مقادیر F_A و F_B، مربوط به نیروهای تکیه‌گاهی در A و B عمود بر راستای محور لولای AB را تعیین کنید.



حل:

$\sum M_x = ۰ \quad : \quad ۲(۹۰۰)(۳۶۰) - F_s \cos ۱۵^\circ (۱۷۰) = ۰ \quad , \quad F_s = ۳۹۵۰ N$

$\sum M_y = ۰ \quad : \quad B_z (۴۲۰) + ۹۰۰(۱۸۰) - ۳۹۵۰ \cos ۱۵^\circ (۳۰۰) = ۰ \quad , \quad B_z = ۲۳۴۰ N$

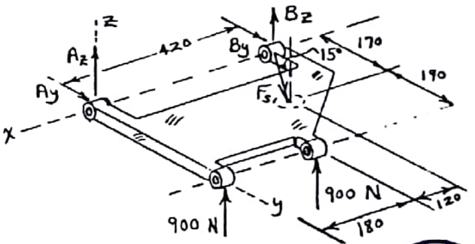
$\sum M_z = ۰ \quad : \quad -B_y (۴۲۰) - ۳۹۵۰ \sin ۱۵^\circ (۳۰۰) = ۰ \quad , \quad B_y = -۷۳۰ N$

$\sum F_y = ۰ \; : \; A_y - ۷۳۰ + ۳۹۵۰ \sin ۱۵^\circ = ۰ \quad , \quad A_y = -۲۹۲ N$

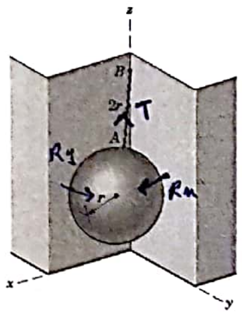
$\sum F_z = ۰ \; : \; A_z + ۲۳۴۰ - ۳۹۵۰ \cos ۱۵^\circ + ۱۸۰۰ = ۰ \quad , \quad A_z = -۳۲۵ N$

$F_A = \sqrt{A_y^۲ + A_z^۲} = ۴۳۷ N$

$F_B = \sqrt{B_y^۲ + B_z^۲} = ۲۴۵۰ N$



۳-۸۴ کره‌ای همگن و صیقلی به جرم m و شعاع r توسط سیم AB به طول $۲r$ از نقطه‌ی B، روی فصل مشترک دو دیوار قائم عمود بر هم، آویزان شده است. عکس‌العمل R که هر دیوار بر دیواره وارد می‌کند را تعیین کنید.



حل:

$\mathbf{T} = \frac{T}{۲}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \sqrt{۷}\mathbf{k})$

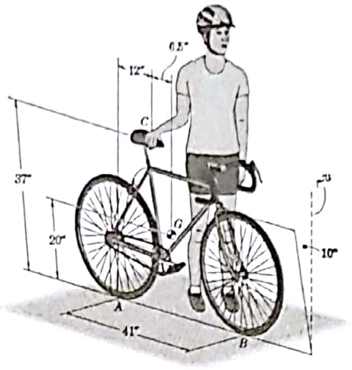
$\sum \mathbf{F} = ۰$

Scanned by CamScanner

$$\frac{T}{۲}(-i - j + \sqrt{۷}k) + Ri + Rj - mgk = ۰$$

$$-\frac{T}{۲} + R = ۰ \quad , \quad \frac{\sqrt{۷}}{۲}T - mg = ۰$$

$$R = \frac{mg}{\sqrt{۷}}$$



۳-۸۵ مطابق شکل یک دوچرخه‌سوار با نیرویی که عمود بر صفحه‌ی تنه‌ی دوچرخه وارد می‌کند، دوچرخه را در زاویه‌ی ۱۰° نگه داشته است. اصطکاک در A و B برای جلوگیری از لغزش جانبی کافی است. نیرویی که دوچرخه‌سوار بر دوچرخه وارد می‌کند و نیروی عمودی رو به بالا در A و B و نیروهای اصطکاک جانبی در A و B را تعیین کنید. اگرچه دسته‌ی دوچرخه برای چرخش آزاد است، فرض کنید نمی‌چرخد. وزن دوچرخه $۲۹lb$ و مرکز ثقل آن در G قرار دارد.

حل:

$$\sum M_{AB} = ۰ \quad : \quad ۲۹(۲۰\sin ۱۰^\circ) - ۳۷P = ۰$$

$$P = ۲/۷۲ lb$$

$$\sum M_x = ۰ \quad : \quad P\sin ۱۰^\circ(۱۲) - ۲۹(۱۸/۵) + N_B(۴۱) = ۰$$

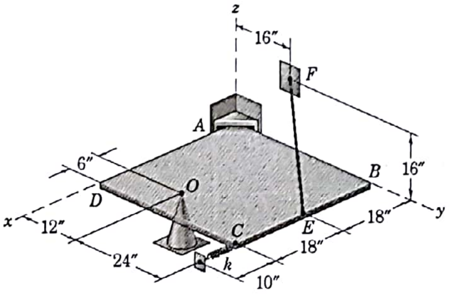
$$N_B = ۱۲/۹۵ lb$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A + ۱۲/۹۵ - ۲۹ + P\sin ۱۰^\circ = ۰$$

$$N_A = ۱۵/۵۸ lb$$

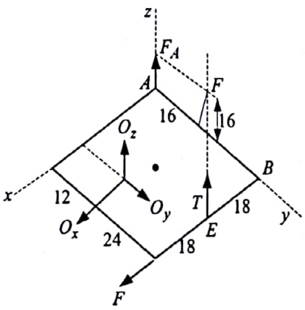
$$\sum M_{B_z} = ۰ \quad : \quad -P\cos ۱۰^\circ(۲۹) + F_A(۴۱) = ۰ \quad , \quad F_A = ۱/۸۹۶ lb$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۱/۸۹۶ + F_B - P\cos ۱۰^\circ = ۰ \quad , \quad F_B = ۰/۷۸۵ lb$$



۳-۸۶ صفحه‌ی یکنواختی به شکل مربع به وزن $۱۰۰lb$، توسط یک مفصل کاسه- ساچمه‌ای در O، یک کابل در E و یک قید در A، که فقط می‌تواند نیروی قائم تحمل کند و یک فنر طولی در C حمایت می‌شود. اگر طول کشیده نشده‌ی فنر $۶in$ باشد، ثابت فنر k موردنیاز برای تعادل در وضعیت نشان داده شده را تعیین کنید.

حل:



اندازه‌ها به in

زاویه‌ی T با صفحه‌ی x-y $\quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۱۶}{۳۶/۹۰۷}\right) = ۳۰/۷۴^\circ$

زاویه‌ی T در x-y با راستای BC $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{۲۰}{۱۸}\right) = ۴۸/۰۱^\circ$

$$\sum M_{E_z} = ۰ \quad : \quad ۲۴(O_x) + ۱۲(O_y) = ۰ \quad , \quad O_y = -۲O_x \qquad (۱)$$

Scanned by CamScanner

$\sum M_{O_x}=0 \quad : \quad -100(6)-F_A(12)+T\sin\alpha(24)=0$ (۲)

$\sum M_{O_y}=0 \quad : \quad -100(12)+F_A(20)+T\sin\alpha(12)=0$ (۳)

$\sum F_x=0 \quad : \quad O_x-T\cos\alpha(\cos\theta)+F=0$ (۴)

$\sum F_y=0 \quad : \quad O_y-T\cos\alpha(\sin\theta)=0$ (۵)

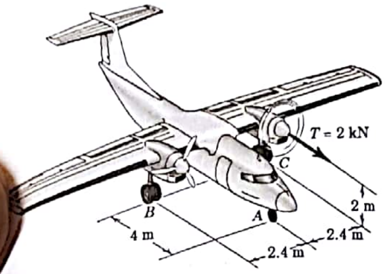
$\sum F_z=0 \quad : \quad O_y+F_A+T\sin\alpha-100=0$ (۶)

$(2),(3) \rightarrow F_A=25lb \quad , \quad T=73.4lb$

$(5) \rightarrow O_y=46.9lb \quad , \quad O_x=-23.44lb \leftarrow$ از رابطه‌ی (۱)

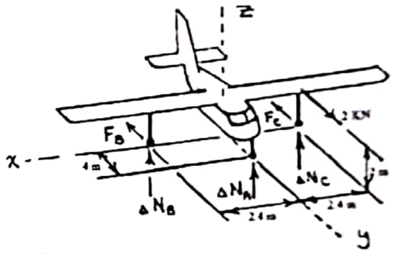
$(4) \rightarrow F=65.64lb$

$k=\frac{65.64}{4}=16.41\frac{lb}{in}$



۳-۸۷ در طول یک آزمایش، موتور چپ یک هواپیمای دو موتوره دور برداشته و نیرویی معادل $2kN$ تولید کرده است. برای جلوگیری از حرکت، چرخ‌های اصلی B و C قفل شده‌اند. تغییرات در عکس‌العمل‌های A، B و C (در مقایسه با حالتی که موتور خاموش است) را تعیین کنید.

حل:



$\sum M_x=0 \quad : \quad \Delta N_A(4)-2000(2)=0 \quad , \quad \Delta N_A=1kN$

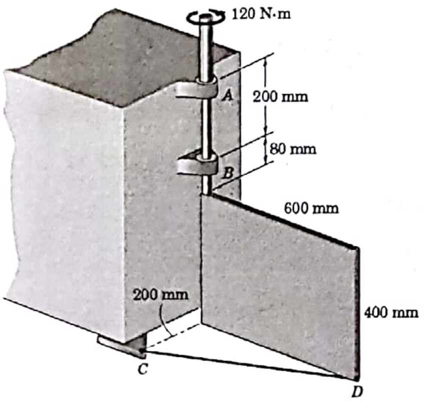
$\sum F_z=0 \quad : \quad \Delta N_A+\Delta N_B+\Delta N_C=0$

$\sum M_y=0 \quad : \quad \Delta N_C(2.4)-\Delta N_B(2.4)=0$

$\Delta N_B=\Delta N_C=-500N$

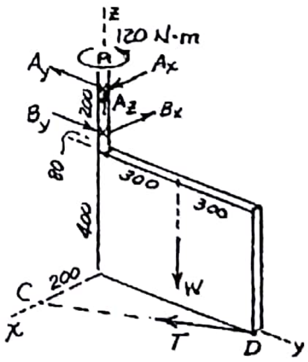
برای به دست آوردن F_B و F_C اطلاعات بیشتری موردنیاز است.

می‌توان مؤلفه‌ی x اصطکاک در B و C را به دست آورد.



۳-۸۸ صفحه‌ای یکنواخت به جرم $15kg$ به میله‌ای قائم جوش داده شده است. میله‌ی قائم توسط یاتاقان‌های A و B مقید شده است. مقدار نیرویی که یاتاقان B در اثر اعمال کوپل $120N.m$ بر میله، تحمل می‌کند را محاسبه کنید. کابل CD از چرخش میله و صفحه جلوگیری می‌کند. وزن مجموعه به طور کامل توسط یاتاقان A تحمل می‌شود.

حل:



$\mathbf{W}=15(9.81)(-\mathbf{k}) \quad N=-147.2\mathbf{k} \quad N$

$\overline{CD}=\sqrt{0.2^2+0.6^2}=0.632m$

$\mathbf{T}=\frac{T}{0.632}(0.2\mathbf{i}-0.6\mathbf{j})$

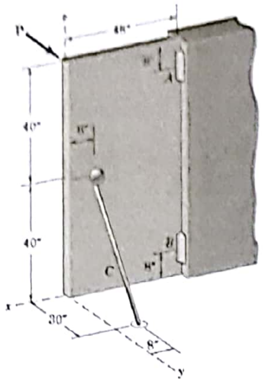
$\sum M_z=0 \quad : \quad 120-\frac{0.2}{0.632}T(0.6)=0 \quad , \quad T=632N$

$\sum M_{A_x}=0 \quad : \quad 0.2B_y-147.2(0.3)-632\frac{0.6}{0.632}(0.68)=0 \quad , \quad B_y=2260N$

Scanned by CamScanner

$\sum M_{A_x} = ۰ \quad : \quad ۰/۲ B_x - ۶۲۲ \frac{۰/۲}{۰/۶۲۲}(۰/۶۸) = ۰ \quad , \quad B_x = ۶۸۰ N$

$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = ۲۲۶۰ N$



۸۹-۳. میله‌ی C از باز شدن درب مستطیلی به وزن $۶۰lb$ جلوگیری کرده است. میله‌ی C یک عضو سبک دو نیرویی است که انتهای بالای آن به دستگیره‌ی در محکم شده و انتهای پایین آن روی یک فنجان لاستیکی قرار گرفته تا روی کف نلغزد. از لولاهای A و B فقط لولای B می‌تواند نیروی قائم در راستای z تحمل کند. مطابق شکل، هنگامی که نیروی افقی $P = ۵۰lb$ عمود بر صفحه‌ی درب اعمال می‌شود، نیروی فشاری C در میله و مؤلفه‌های افقی عکس‌العمل تکیه‌گاهی در لولاهای A و B را محاسبه کنید.

حل:

زاویه‌ی میله با راستای z $\quad \theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۳۰}{۴۰}\right) = ۳۶/۸۷°$

$\sum M_{AB} = ۰ \quad : \quad P(۴۸) - C\sin\theta(۴۰) = ۰ \quad , \quad C = ۱۰۰lb$

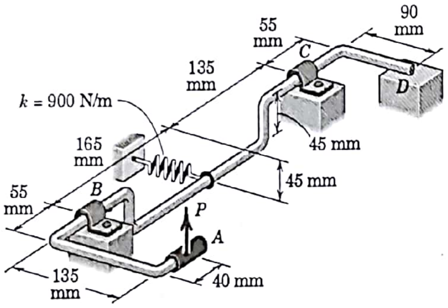
$\sum M_{B_x} = ۰ \quad : \quad P(۷۲) + A_y(۶۴) - ۱۰۰\sin\theta(۳۲) = ۰ \quad , \quad A_y = -۲۶/۲۵lb$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad A_y + B_y + ۵۰ - ۱۰۰\sin\theta = ۰ \quad , \quad B_y = ۳۶/۲۵$

$\sum M_{B_y} = ۰ \quad : \quad ۶۰(۲۴) - C\cos\theta(۴۰) + A_x(۶۴) = ۰ \quad , \quad A_x = ۲۷/۵lb$

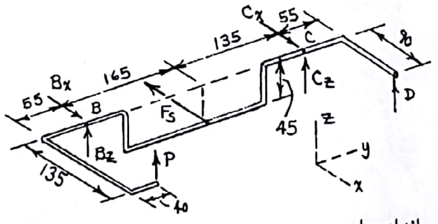
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x - B_x = ۰ \quad , \quad A_x = B_x \quad , \quad B_x = ۲۷/۵lb$

$A_{xy} = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۳۸lb \quad , \quad B_{xy} = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = ۴۵/۵lb$



۹۰-۳. برای مکانیزم زیر در موقعیت موردنظر، فنر با مدول $k = ۹۰۰N/m$ به اندازه‌ی $۶۰mm$ کشیده شده است. نیروی P_{min} موردنیاز برای شروع چرخش حول محور لولای BC را حساب کنید و مقدار نیروهای یاتاقان‌ها در راستای عمود بر BC را تعیین کنید. چنانچه $P = P_{min}/۲$ باشد، عکس‌العمل عمودی در D چقدر است؟

حل:



اندازه‌ها به mm

$F_s = k\delta = ۹۰۰(۰/۰۶) = ۵۴N$

$D = ۰ \quad :$

$\sum M_{BC} = ۰ \quad : \quad -P(۱۳۵) + ۵۴(۴۵) = ۰ \quad , \quad P_{min} = ۱۸N$

$\sum M_{B_x} = ۰ \quad : \quad -۱۸(۱۵) + C_z(۳۰۰) = ۰ \quad , \quad C_z = ۰/۹N$

$\sum M_{B_z} = ۰ \quad : \quad ۵۴(۱۶۵) - C_x(۳۰۰) = ۰ \quad , \quad C_x = ۲۹/۷N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۲۹/۷ + B_x - ۵۴ = ۰ \quad , \quad B_x = ۲۴/۳N$

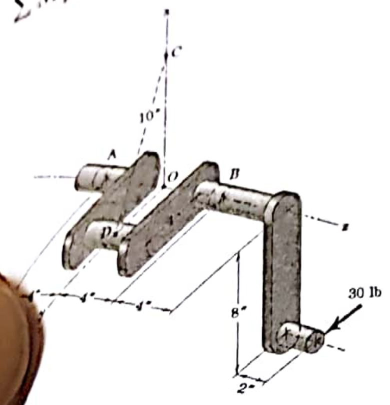
$\sum F_z = ۰ \quad : \quad ۰/۹ + B_z + ۱۸ = ۰ \quad , \quad B_z = -۱۸/۹N$

Scanned by CamScanner

$B=\sqrt{B_x^۲+B_z^۲}=۲۰/۸\,N$, $C=\sqrt{C_x^۲+C_z^۲}=۲۹/۷\,N$

اگر $P=\frac{P_{min}}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹N$, $(D\neq ۰)$

$\sum M_{BC}=۰$: $-۹(۱۲۵)+۵۲(۲۵)-D(۹۰)=۰$, $D=۱۲/۵N$



۳-۹۱. برای حفظ تعادل میل‌لنگ یک موتور تک‌سیلندر در برابر نیروی فشاری شاتون $۱۰in$ در امتداد CD، نیرویی معادل $۳۰lb$ باید بر دسته وارد شود. نیروی وارده بر یاتاقان‌های A و B را تعیین کنید.

حل:

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{۴}{۱۰}\right)=۶۶/۴°$$

$\sum M_z=۰$: $F\sin\theta(۴)-۳۰(۸)=۰$, $F=۶۵/۴۶۵lb$

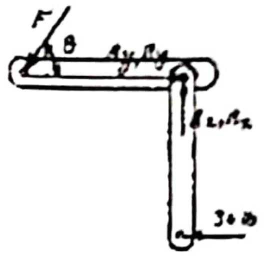
$\sum M_{A_y}=۰$: $B_x(۸)-F\sin\theta(۴)=۰$, $B_x=۳۰lb$

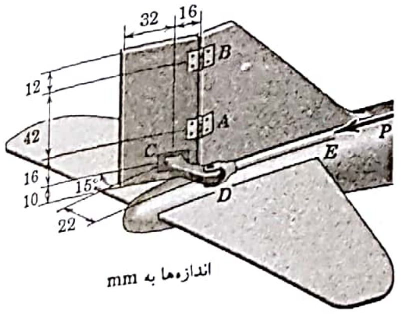
$\sum F_x=۰$: $A_x+B_x-F\sin\theta=۰$, $A_x=۳۰lb$

$\sum M_{A_x}=۰$: $B_y(۸)-F\cos\theta(۴)-۳۰(۱۴)=۰$, $B_y=۶۵/۶lb$

$\sum F_y=۰$: $۳۰+F\sin\theta-A_y-B_y=۰$, $A_y=-۹/۴lb$

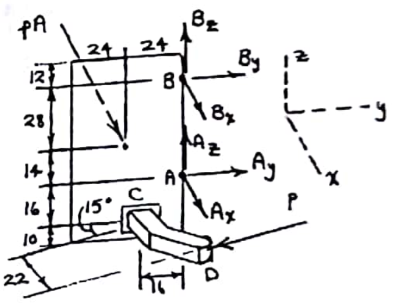
$A=\sqrt{A_x^۲+A_y^۲}=۳۱/۴lb$, $B=\sqrt{B_x^۲+B_y^۲}=۷۲/۱\,lb$





۳-۹۲. مجموعه‌ی سکان یک هواپیمای کنترلی را درنظر بگیرید. مطابق شکل در موقعیت ۱۵°، فشار خالص اعمالی بر طرف چپ سطح مستطیلی بال $p=۴(۱۰^{-۵})N/mm^۲$ است. نیروی P موردنیاز در میله‌ی کنترل DE و مؤلفه‌های افقی عکس‌العمل‌های لولای A و B، در راستای موازی سطح بال را تعیین کنید.

حل:

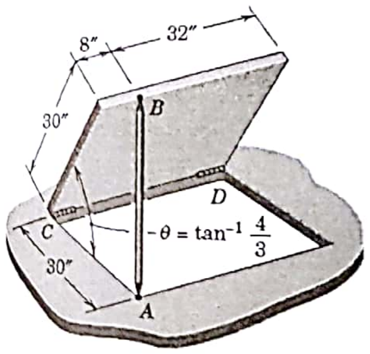


$pA=۴(۱۰^{-۵})(۴۸)(۸۰)=۰/۱۵۳۶N$

$\sum M_{AB}=۰$: $-P(۲۲-۱۶\sin۱۵°)+۰/۱۵۳۶(۲۴)=۰$, $P=۰/۲۰۶N$

$\sum M_{B_x}=۰$: $A_y(۴۲)-۰/۲۰۶\cos۱۵°(۵۸)=۰$, $A_y=۰/۲۷۵N$

$\sum M_{A_x}=۰$: $-B_y(۴۲)-۰/۲۰۶\cos۱۵°(۱۶)=۰$, $B_y=-۰/۰۷۶N$



۳-۹۳. از درب یکنواختی به ابعاد $۳۰\times۴۰in^۲$ و وزن $۲۰۰lb$ برای تله‌ای استفاده شده و توسط میله‌ی سبک AB در زاویه‌ی $\theta=\tan^{-1}(\frac{۴}{۳})$ باز نگه داشته شده است. نیروی فشاری F_B در میله و عکس‌العمل لولای D در راستای عمود بر محور لولا را محاسبه کنید. فرض کنید لولاها در منتهی‌الیه لبه‌ی پایینی اثر می‌کنند.

حل:

Scanned by CamScanner

$\overline{AB}=\sqrt{۸^۲+۱۲^۲+۲۴^۲}=۲۸ in$

$\mathbf{B}=\frac{B}{۲۸}(-۱۲\mathbf{i}+۸\mathbf{j}+۲۴\mathbf{k})=\frac{B}{۷}(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۶\mathbf{k})$

$\mathbf{W}=-۲۰۰\mathbf{k}\ lb$

$\sum M_{CD}=۰ \quad : \quad (\mathbf{r}_{CA}\times\mathbf{B}+\mathbf{r}_{CE}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{j}=۰$

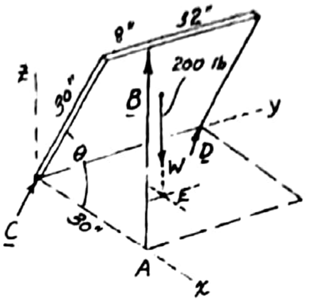
$\left[۲۰\mathbf{i}\times\frac{B}{۷}(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۶\mathbf{k})+(۹\mathbf{i}+۲۰\mathbf{j})\times(-۲۰۰\mathbf{k})\right]\cdot\mathbf{j}=۰$

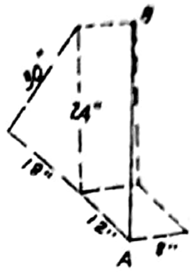
$\left(-۴۰۰۰\mathbf{i}+۱۸۰\left(۱۰-\frac{B}{۷}\right)\mathbf{j}+۶۰\left(\frac{B}{۷}\right)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{j}=۰$

$\frac{B}{۷}-۱۰=۰ \quad , \quad B=F_B=۷۰ lb$

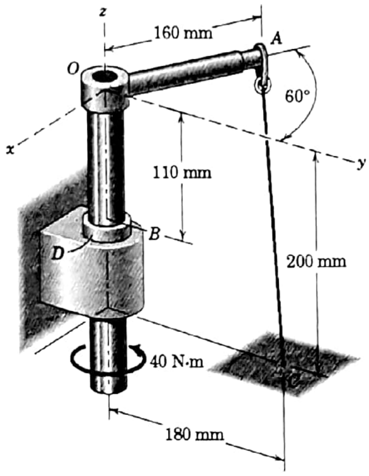
$\sum M_x=۰ \quad : \quad ۴۰D_z-۲۰۰(۲۰)=۰ \quad , \quad D_z=۱۰۰ lb$

$\sum M_z=۰ \quad : \quad ۳۰B_y-۴۰D_x=۰ \quad , \quad D_x=\frac{۳}{۴}۲۰=۱۵ lb$





$D_n=\sqrt{۱۰۰^۲+۱۵^۲}=۱۰۱٫۱ lb$



۳-۹۴. بر اثر اعمال گشتاور $۴۰ N.m$ بر میله‌ی قائمی، کابل بازدارنده AC چرخش بازوی OA را محدود کرده و میله حداکثر به زاویه‌ی ۶۰° نسبت به محور y می‌رسد. طوقه‌ی D متصل به میله، از حرکت رو به پایین میله جلوگیری می‌کند. گشتاور خمشی M، نیروی فشاری P و نیروی برشی V در مقطع B را محاسبه کنید. (تذکر: گشتاور خمشی به عنوان یک بـردار و نیروی برشی، بر محور میله عمود است.)

حل:

$(\overline{AC})_x=۰٫۱۶\sin ۶۰^\circ=۰٫۱۳۸۶ m$

$(\overline{AC})_y=(۰٫۱۸-۰٫۱۶\cos ۶۰^\circ)=۰٫۱ m$

$(\overline{AC})_z=۰٫۲ m$

$\overline{AC}=\sqrt{۰٫۱۳۸۶^۲+۰٫۱^۲+۰٫۲^۲}=۰٫۲۶۳ m \quad , \quad \mathbf{BC}=۰٫۱۸\mathbf{j}-۰٫۰۹\mathbf{k}\ \ m$

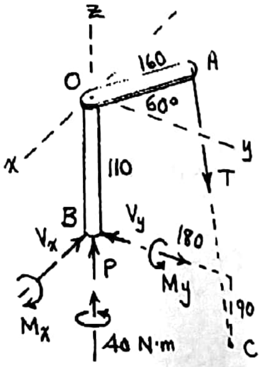
$\mathbf{T}=\frac{T}{۰٫۲۶۳}(۰٫۱۳۸۶\mathbf{i}+۰٫۱\mathbf{j}-۰٫۲\mathbf{k})$

$\sum \mathbf{M}_B=۰ \quad : \quad \mathbf{BC}\times\mathbf{T}-M_x\mathbf{i}+M_y\mathbf{j}+۴۰\mathbf{k}=۰$

$(-۰٫۱۰۲۶T-M_x)\mathbf{i}+(-۰٫۰۴۷۴T+M_y)\mathbf{j}+(-۰٫۰۹۴۸T+۴۰)\mathbf{k}=۰$

$T=۴۲۲N \quad , \quad M_x=-۴۳٫۳ N.m \quad , \quad M_y=۲۰ N.m$

گشتاور خمشی $\quad M=\sqrt{M_x^۲+M_y^۲}=۴۷٫۷ N.m$



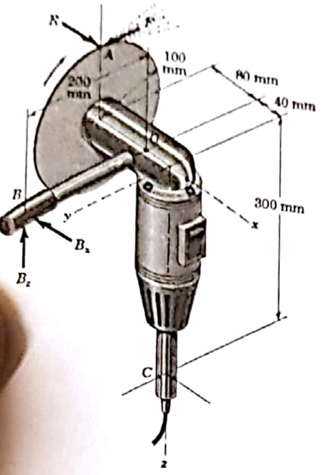
$\sum F_x=۰ \quad : \quad ۴۲۲\frac{۰٫۱۳۸۶}{۰٫۲۶۳}-V_x=۰ \quad , \quad V_x=۲۲۲ N$

$\sum F_y=۰ \quad : \quad ۴۲۲\frac{۰٫۱}{۰٫۲۶۳}-V_y=۰ \quad , \quad V_y=۱۶۰ N$

Scanned by CamScanner

$$V=\sqrt{V_x^{۲}+V_y^{۲}}=۲۷۳\,N$$

$$\sum F_z=۰ \quad : \quad -۲۲۲\left(\frac{۰/۲}{۰/۲۶۳}\right)+P=۰ \quad , \quad P=۲۲۱\,N$$



۳-۹۵. یک سمباده برقی با جرمی معادل $۳kg$ و مرکز جرم G، کمی مورب نگه داشته شده تا دیسک سمباده درنقطه‌ی فوقانی A با سطح سمباده‌زنی تماس برقرار کند. سمباده به وسیله‌ی دسته‌های B و C گرفته شده است. اگر نیروی عمود بر دیسک R، $۲۰N$ باشد $(C_x=۰)$، که البته کاملاً ناشی از مؤلفه‌ی نیروی B_x است و اگر نیروی اصطکاک معادل ۶۰ درصد R باشد، مؤلفه‌های گشتاور M اعمال شده بر دسته، به جهت نگه داشتن سمباده در موقعیت موردنظر را تعیین کنید. فرض کنید نیمی از وزن در C تحمل می‌شود.

حل:

فرض مسئله $C_z=\frac{mg}{۲}$

$$\sum F_z=۰ \quad : \quad B_z-mg+C_z=۰$$

$$B_z=\frac{mg}{۲}=\frac{۳}{۲}(۹/۸۱)=۱۴/۷۲\,N$$

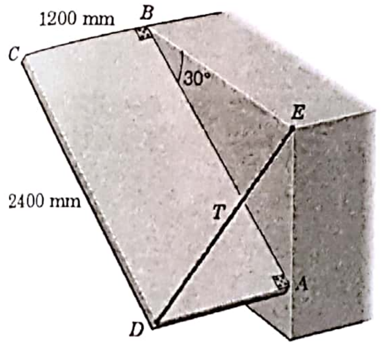
$$\sum M_y=۰ \quad : \quad R(۰/۱)+B_z(۰/۰۴)-mg\,(۰/۰۴)+M_y=۰ \quad , \quad M_y=۱/۴۱۱\,N.m$$

$$\sum F_y=۰ \quad : \quad -C_y-F=۰ \xrightarrow{F=۰/۶R} C_y=-۱۲N$$

$$\sum M_x=۰ \quad : \quad -C_y(۰/۳)+F(۰/۱)-B_z\,(۰/۲)+M_x=۰ \quad , \quad M_x=-۱/۸۵۷\,N.m$$

$$\sum F_x=۰ \quad : \quad R-B_x=۰ \quad , \quad B_x=۲۰N$$

$$\sum M_z=۰ \quad : \quad F(۰/۰۸)-C_y(۰/۰۴)+B_x(۰/۲)-M_z=۰ \quad , \quad M_z=-۲/۵۶\,N.m$$

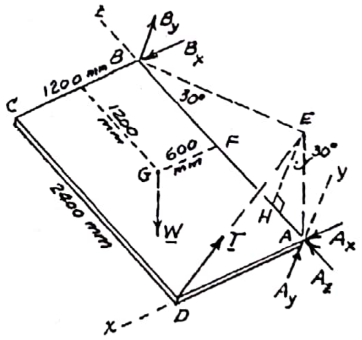


۳-۹۶. صفحه‌ی یکنواخت مستطیلی $ABCD$ جرمی معادل $۴۰kg$ داشته و در گوشه‌های A و B به سطح ثابت قائمی لولا شده است. سیمی از E به D لبه‌های BC و AD را افقی نگه داشته است. لولای A توانایی تحمل نیرو در راستای AB را هم دارد، ولی لولای B فقط نیروهای عمود بر راستای محور لولا را تحمل می‌کند. کشش T و مقدار عکس‌العمل لولای B را بیابید.

حل:

$$\overline{AE}=۲۴۰۰\sin ۳۰^\circ=۱۲۰۰\,mm \quad , \quad \overline{AH}=۶۰۰\,mm$$

$$\overline{HE}=۱۲۰۰\cos ۳۰^\circ=۶۰۰\sqrt{۳}\,mm$$



$$\mathrm{T}=\frac{T}{\sqrt{۲}}\left(-\mathbf{i}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathbf{j}+\frac{۱}{۲}\mathbf{k}\right)$$

$$\sum M_z=۰ \quad : \quad T_y\overline{AD}-W_y\overline{GF}=۰$$

$$\frac{T\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}(۱۲۰۰)=۴۰(۹/۸۱)\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶۰۰) \quad , \quad T=۲۷۷\,N$$

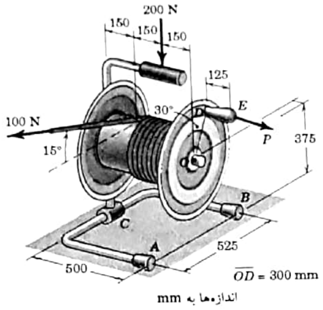
Scanned by CamScanner

$$\Sigma M_x = ۰ \quad : \quad -B_y\overline{AB} + W_y\overline{FA} = ۰ \quad , \quad ۲۴۰۰B_y = ۲۰(۹/۸۱)\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱۲۰۰) \quad , \quad B_y = ۱۶۹/۹N$$

$$\Sigma M_y = ۰ \quad : \quad B_x\overline{AB} + W_z\overline{GF} - T_z\overline{AD} = ۰$$

$$۲۴۰۰B_x + ۴۰(۹/۸۱)۰/۵(۶۰۰) - \frac{۲۷۷}{۲\sqrt{۲}}(۱۲۰۰) = ۰ \quad , \quad B_x = ۰$$

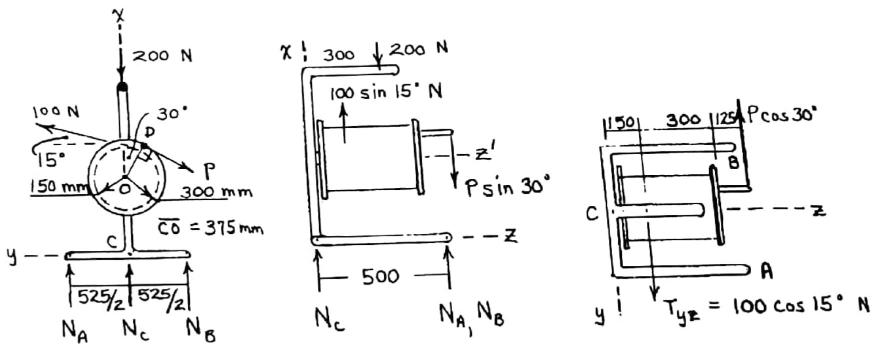
$B = B_y = ۱۶۹/۹N$



۳-۹۷. یک قرقره‌ی قابل حمل برای جمع کردن شلنگ هوا استفاده می‌شود. کشش در شلنگ $۱۰۰N$ است. نیروی قائم $۲۰۰N$ برای ثابت ماندن بدنه‌ی قرقره بر دسته وارد می‌شود. حداقل نیروی P که باید عمود بر دسته‌ی DE وارد شود و مؤلفه‌های قائم عکس‌العمل پایه‌های A، B و C را تعیین کنید. قطر قرقره‌ی شلنگ $۳۰۰mm$ و وزن قرقره و تنه‌ی آن ناچیز است. درنظر داشته باشید که نیروی P بر راستای OD عمود است. تمامی فرضیات را لحاظ کنید.

حل:

اصطکاک در A، B و C نشان داده نشده است.



$\Sigma M_{z'} = ۰ \quad \Rightarrow$ برای قرقره به تنهایی

$۱۰۰(۱۵۰) - P(۳۰۰) = ۰ \quad , \quad P = ۵۰N$

$\Sigma M_{AB} = ۰ \quad : \quad N_C(۵۰۰) - ۲۰۰(۲۰۰) + ۱۰۰\sin ۱۵^\circ(۲۵۰) + ۵۰\sin ۳۰^\circ(۷۵) = ۰$

$N_C = ۵۸/۱N$

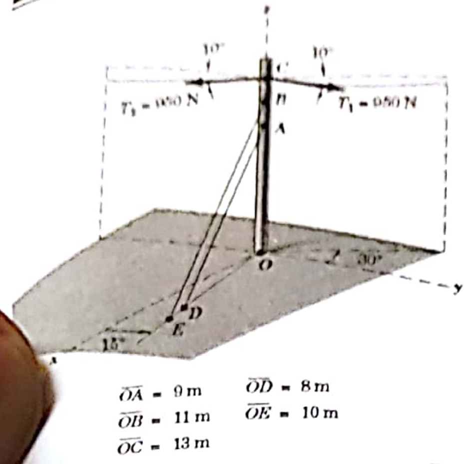
$\Sigma F_x = ۰ \quad : \quad N_A + N_B + N_C - ۲۰۰ - ۵۰\sin ۳۰^\circ + ۱۰۰\sin ۱۵^\circ = ۰$ (۱)

$\Sigma M_{C_z} = ۰ \quad : (N_A - N_B)\frac{۵۲۵}{۲} + ۱۰۰(۱۵۰) - ۵۰(۳۰۰) + ۱۰۰\cos ۱۵^\circ(۳۷۵) - ۵۰\cos ۳۰^\circ(۳۷۵) = ۰$ (۲)

حل دستگاه معادله‌ی (۱) و (۲) $\Rightarrow \begin{cases} N_A = ۱۰۸/۶N \\ N_B = ۳۲/۴N \end{cases}$

۳-۹۸. صفحه‌ی قائم شامل کابل تأسیساتی به اندازه‌ی ۳۰° حول دکل قائم OC چرخیده است. کشش $T_۱$ و $T_۲$ هر دو $۹۵۰N$ هستند. برای جلوگیری از خم شدن طولانی مدت دکل، سیم‌های AD و BE مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اگر این دو سیم به گونه‌ای تنظیم شده باشند که کشش مساوی T را تحمل کنند و گشتاور در O را

Scanned by CamScanner



به صفر کاهش دهند، عکس‌العمل خالص افقی در O و مقدار موردنیاز T را تعیین کنید. از وزن دکل صرف‌نظر کنید.

حل:

$\overline{OA}=۹m \quad , \quad \overline{OB}=۱۱m \quad , \quad \overline{OC}=۱۳m$

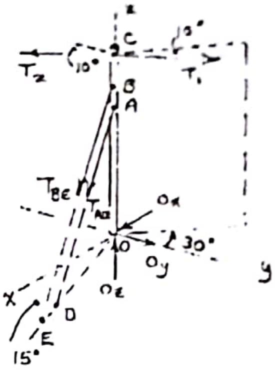
$\overline{OD}=۸m \quad , \quad \overline{OE}=۱۰m$

$$\mathbf{T}_۱ = ۹۵۰(-\sin ۳۰^\circ \cos ۱۰^\circ \mathbf{i} + \cos ۳۰^\circ \cos ۱۰^\circ \mathbf{j} - \sin ۱۰^\circ \mathbf{k}) \ N$$

$$\mathbf{T}_۲ = ۹۵۰(-\cos ۱۰^\circ \mathbf{j} - \sin ۱۰^\circ \mathbf{k}) \ N$$

$$\mathbf{T}_{BE} = T\left[\frac{۱۰\cos ۱۵^\circ \mathbf{i} + ۱۰\sin ۱۵^\circ \mathbf{j} - ۱۱\mathbf{k}}{\sqrt{۲۲۱}}\right]$$

$$\mathbf{T}_{AD} = T\left[\frac{۸\cos ۱۵^\circ \mathbf{i} + ۸\sin ۱۵^\circ \mathbf{j} - ۹\mathbf{k}}{\sqrt{۱۴۵}}\right]$$



$$\sum \mathbf{M}_o = ۰ \quad : \quad \mathbf{r}_{OC} \times (\mathbf{T}_۱ + \mathbf{T}_۲) + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{T}_{BE} + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{T}_{AD} = ۰$$

$$\mathbf{r}_{OC} = ۱۳\mathbf{k} \ m \quad , \quad \mathbf{r}_{OB} = ۱۱\mathbf{k} \ m \quad , \quad \mathbf{r}_{OA} = ۹\mathbf{k} \ m$$

از حل هر کدام از معادلات در راستای $\mathbf{i}$ یا $\mathbf{j}$ می‌توان به مقدار T رسید

$$T = ۴۷۱ N$$

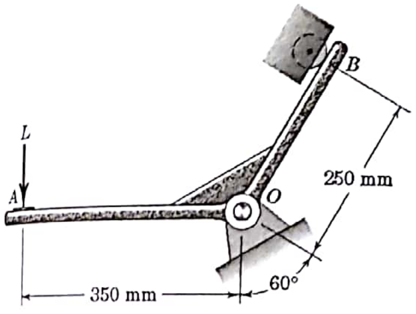
$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۹۵۰\sin ۳۰^\circ \cos ۱۰^\circ + ۴۷۱\frac{۱۰\cos ۱۵^\circ}{\sqrt{۲۲۱}} + ۴۷۱\frac{۸\cos ۱۵^\circ}{\sqrt{۱۴۵}} + O_x = ۰$$

$$O_x = -۱۴۰ N$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۹۵۰\cos ۳۰^\circ \cos ۱۰^\circ - ۹۵۰\cos ۱۰^\circ + ۴۷۱\frac{۱۰\sin ۱۵^\circ}{\sqrt{۲۲۱}} + ۴۷۱\frac{۸\sin ۱۵^\circ}{\sqrt{۱۴۵}} + O_y = ۰$$

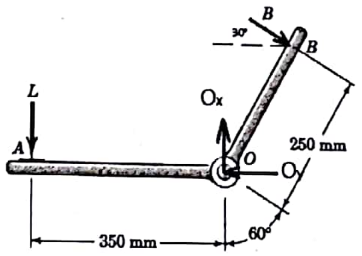
$$O_y = -۳۷/۵ N$$

$$O = \sqrt{O_x^۲ + O_y^۲} = ۱۴۴/۹ N$$



۳-۹۹. لولای O حداکثر نیرویی معادل $۳/۵kN$ را می‌تواند تحمل کند. حداکثر بار L که می‌توان بر بست زاویه‌دار AOB وارد کرد، چقدر است؟

حل:



$$\overset{+}{\circlearrowright} \sum M_o = ۰ \quad : \quad ۳۵۰L - ۲۵۰B = ۰ \quad , \quad ۷L = ۵B \qquad (۱)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \quad : \quad B\cos ۳۰^\circ - O_x = ۰ \quad , \quad O_x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}B \qquad (۲)$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y - L - B\sin ۳۰^\circ = ۰ \quad , \quad O_y = L + \frac{B}{۲} \qquad (۳)$$

Scanned by CamScanner

(۴) با توجه به فرض مسئله $O=\sqrt{O_x^۲+O_y^۲}=۳/۵kN$

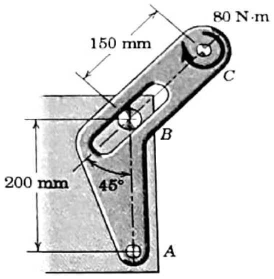
(۱)، (۲)، (۳) و (۴):

$$O^۲=O_x^۲+O_y^۲=\frac{۳}{۴}B^۲+L^۲+\frac{B^۲}{۴}+LB=L^۲+B^۲+LB=L^۲+۱/۹۶L^۲+۱/۴L^۲$$

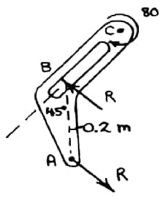
$$O^۲=۱۲/۲۵$$

$$۴/۳۶L^۲=۱۲/۲۵ \quad , \quad L=۱/۶۷۶\ kN$$

۳-۱۰۰. بست مبک ABC آزادانه در A لولا شده است و به وسیله‌ی پین ثابتی در شیار صاف B مقید شده است. مقدار R عکس‌العمل لولای A تحت کوپل اعمالی $۸۰N.m$ را محاسبه کنید.



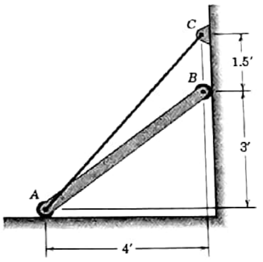
حل:



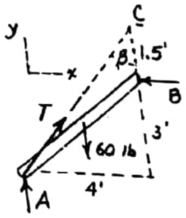
نیروها در A و B باید تشکیل یک کوپل بدهند.

$$\circlearrowleft + \sum M=۰ \quad ۸۰-R(۰/۲\cos۴۵°)=۰ \quad , \quad R=۵۶۶N$$

۳-۱۰۱. میله‌ی یکنواخت دو سر غلتکی به وزن $۶۰lb$ به دو سطح قائمه و افقی تکیه‌زده و توسط سیم AC حمایت می‌شود. کشش T سیم و عکس‌العمل غلتک‌های A و B را محاسبه کنید.



حل:

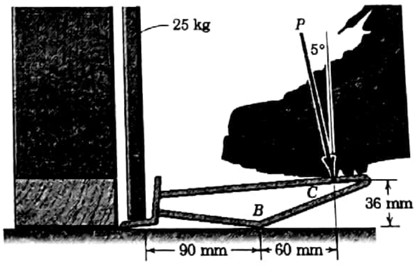


$$\sum M_A=۰ \ : \ ۶۰(۲)-۳B=۰ \quad , \quad B=۴۰lb$$

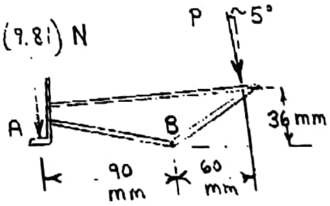
$$\sum F_x=۰ \ : \ T\sin\beta-۴۰=۰ \quad , \quad T=۴۰\frac{\sqrt{۴^۲+۴/۵^۲}}{۴}=۶۰/۲lb$$

$$\sum F_y=۰ \ : \ T\cos\beta+A-۶۰=۰ \quad , \quad A=۶۰-۶۰/۲\frac{۴/۵}{\sqrt{۴^۲+۴/۵^۲}}=۱۵lb$$

۳-۱۰۲. دستگاهی مطابق شکل برای بلند کردن قطعات دیوار کاذب به حالت قبل از محکم کردن دیوار کاربرد دارد. مقدار P موردنیاز برای بلند کردن قطعه‌ای به جرم $۲۵kg$ را برآورد کنید. فرضیات را لحاظ کنید.



حل:

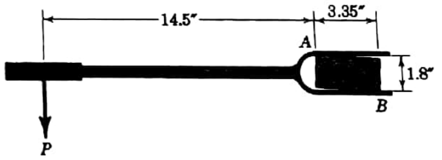


$$\circlearrowleft + \sum M_B=۰ \ : \ ۲۵(۹/۸۱)(۹۰)-P\cos۵°(۶۰)-P\sin۵°(۳۶)=۰$$

$$P=۳۵۱N$$

فرضیات: وزن قطعه دیوار در فاصله‌ی $۹۰mm$ مطابق شکل اثر می‌کند و قطعه نمی‌لغزد.

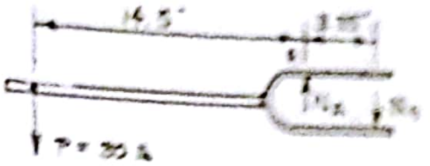
۳-۱۰۳. مطابق شکل ابزاری برای صاف کردن قطعات پیچ‌خورده، کاملاً از جنس چوب، مورد استفاده قرار می‌گیرد. چنانچه مطابق شکل نیروی $P=۳۰lb$ بر دسته وارد شود، نیروهای عمودی وارد



Scanned by CamScanner

...شده بر قطعه در نقاط A و B را تعیین کنید اصطکاک ناچیز است.

حل:

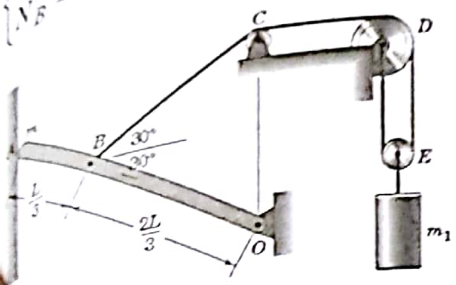


$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \; : \; ۲۰(۱۲/۵) - N_B(۲/۳۵) = ۰ \quad , \quad N_B = ۱۲۹/۹ lb$

$+\uparrow \sum F = ۰ \; : \; -۲۰ + N_A - ۱۲۹/۹ = ۰ \quad , \quad N_A = ۱۵۹/۹ lb$

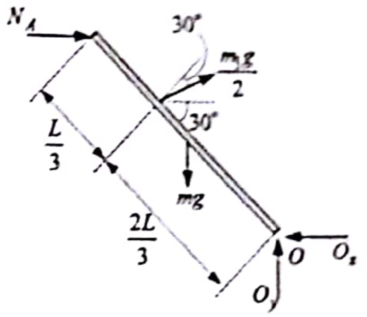
بنابراین نیروهای وارده بر قطعه این گونه‌اند

$\begin{cases} N_A = ۱۵۹/۹ lb \downarrow \\ N_B = ۱۲۹/۹ lb \uparrow \end{cases}$



۱۰۴-۳. میله‌ی باریک یکنواخت به جرم m و طول L مفروض است. یک تعریف کلی برای نیروی عمودی N_A، که دیوار صاف قائم بر میله وارد می‌کند، تعیین کنید. جرم استوانه $m_۱$ و تمامی یاتاقان‌ها ایده‌آل هستند. مقدار $m_۱$ را تعیین کنید اگر: (الف) $N_A = \frac{mg}{۲}$ و (ب) $N_A = ۰$.

حل:

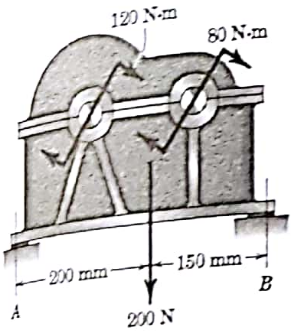


$$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \; : \; mg\left(\frac{L}{۲}\cos ۳۰^\circ\right) - \frac{m_۱ g}{۲}\cos ۳۰^\circ\left(\frac{۲L}{۳}\right) - N_A(L\sin ۳۰^\circ) = ۰$$

$$N_A = \sqrt{۳}g\left(\frac{m}{۲} - \frac{m_۱}{۳}\right)$$

(الف) $N_A = \frac{mg}{۲} \Rightarrow m_۱ = ۰/۶۳۴ m$

(ب) $N_A = ۰ \Rightarrow m_۱ = \frac{۳}{۲} m$

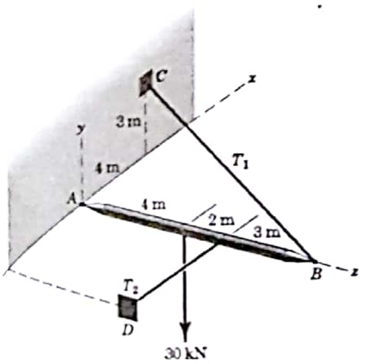


۱۰۵-۳. مطابق شکل یک دستگاه کاهنده‌ی چرخدنده تحت دو کوپل و وزن خود معادل $۲۰۰N$ قرار گرفته است. برای طراحی پایه‌های مناسب، نیروهای قائم که توسط هر یک از پایه‌های A و B تحمل می‌شود را تعیین کنید.

حل:

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \; : \; ۲۰۰(۰/۲) + ۱۲۰ + ۸۰ - F_B(۰/۳۵) = ۰ \; , \; F_B = ۶۸۶N$ به طرف بالا

$\sum F_y = ۰ \; : \; ۶۸۶ - ۲۰۰ - F_A = ۰ \quad , \quad F_A = ۴۸۶N$ به طرف پایین

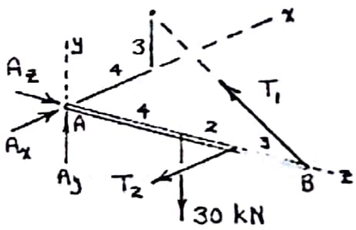


۱۰۶-۳. چنانچه وزن تیر در مقایسه با بار $۳۰kN$ ناچیز باشد، کشش کابل‌های $T_۱$ و $T_۲$ و عکس‌العمل مفصل O را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{T}_۱ = T_۱\left[\frac{۴\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۹\mathbf{k}}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲ + ۹^۲}}\right] = T_۱(۰/۳۸۹\mathbf{i} + ۰/۲۹۱\mathbf{j} - ۰/۸۷۴\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_۲ = -T_۲\mathbf{i}$$



$\sum M_x = ۰ \; : \; ۳۰(۴) - ۰/۲۹۱T_۱(۹) = ۰ \quad , \quad T_۱ = ۴۵/۸ kN$

$\sum M_y = ۰ \; : \; -T_۲(۶) + ۰/۳۸۹T_۱(۹) = ۰ \quad , \quad T_۲ = ۲۶/۷ kN$

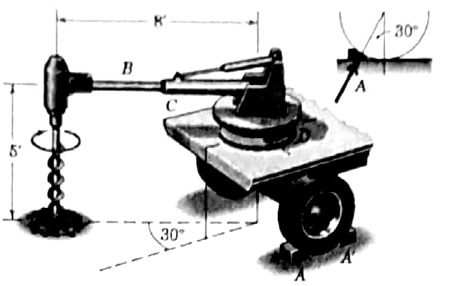
$\sum \mathbf{F} = ۰ \; : \; \mathbf{A} + ۴۵/۸(۰/۳۸۹\mathbf{i} + ۰/۲۹۱\mathbf{j} - ۰/۸۷۴\mathbf{k}) - ۲۶/۷\mathbf{i} - ۳۰\mathbf{j} = ۰$

Scanned by CamScanner

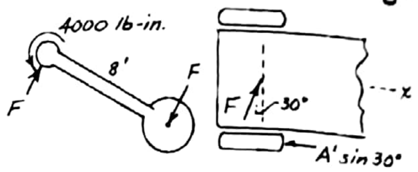
$\mathbf{A} = ۸/۸۹\mathbf{i} + ۱۶/۶۷\mathbf{j} + ۲۰\mathbf{k}\ kN$

$A = ۲۲/۲\ kN$

۳-۱۰۷. یک دستگاه حفاری گشتاوری معادل $۴۰۰۰ lb.in$ را در مته‌ی خود ایجاد می‌کند. بازوی B می‌تواند آزادانه درون کلاهک نگه دارنده C بلغزد، ولی نمی‌تواند آزادانه حول محور افقی C بچرخد. اگر دستگاه در چرخش حول پایه‌ی D آزاد باشد، نیروی اعمال شده بر چرخ عقب سمت راست به وسیله‌ی بلوک A (یا A')، که مانع از غلتیدن چرخ‌های بدون ترمز دستگاه می‌شود را تعیین کنید. (تذکر: سیستم را از بالا ببینید.)



حل:

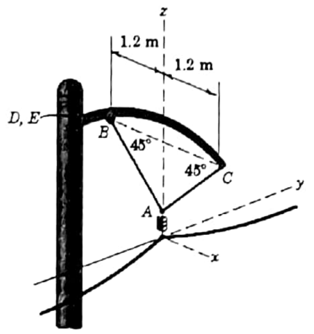


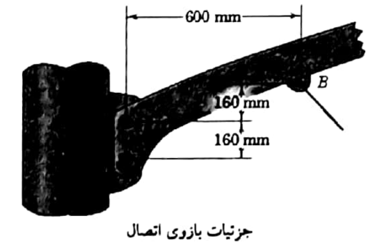
گشتاور روی مته در خلاف جهت گشتاور اعمال شده است.

بازو : $\sum M = ۰ : ۸(۱۲)F - ۴۰۰۰ = ۰ \ , \ F = ۴۱/۷ lb$

دستگاه : $\sum F_x = ۰ \ , \ A' \sin ۳۰° - ۴۱/۷ \sin ۳۰° = ۰ \ , \ A' = ۴۱/۷ lb$

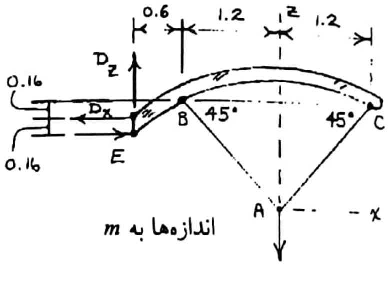
۳-۱۰۸. بازوی منحنی BC و کابل‌های متصل AB و AC، یک خط انتقال قدرت را که در صفحه‌ی قائم $y-z$ قرار دارد، حمایت می‌کنند. مماس بر خط انتقال قدرت درعایق زیر A با محور افقی y زاویه‌ی $۱۵°$ می‌سازد. چنانچه کشش در قسمت عایق خط انتقال قدرت $۱/۲ kN$ باشد. کل نیرویی را که توسط پیچ D در بست تیر چراغ برق تحمل می‌شود، محاسبه کنید. وزن بازوی BC در مقایسه با دیگر نیروها ناچیز است و همچنین فرض کنید که پیچ E فقط می‌تواند نیروی افقی تحمل کند.





جزئیات بازوی اتصال

حل:



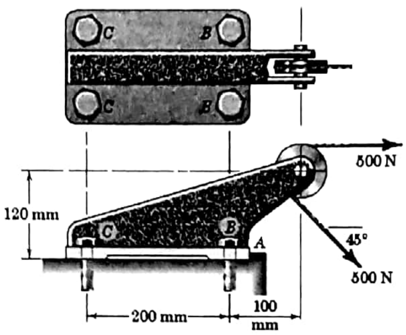
$R = ۲(۱/۲)\sin ۱۵° = ۰/۶۲۱ kN$

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad D_z - ۰/۶۲۱ = ۰ \quad , \quad D_z = ۰/۶۲۱ kN$

$+\circlearrowright \sum M_E = ۰ \quad : \quad ۰/۱۶ D_x - ۰/۶۲۱(۱/۸) = ۰ \quad , \quad D_x = ۷/۵۷ kN$

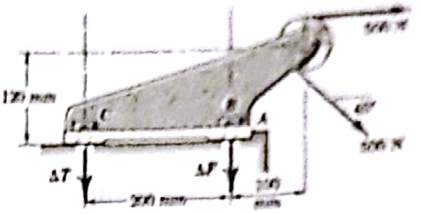
$D = \sqrt{D_z^۲ + D_x^۲} = ۷/۶ kN$

۳-۱۰۹. پایه‌ی قرقره به وسیله‌ی دو پیچ B و دو پیچ C به فونداسیون خود محکم شده است. درحالی که قبل از اعمال کشش $۵۰۰N$ در کابل، یک کشش اولیه در هر کدام از چهار پیچ وجود داشته است. مقدار افزایش ΔT در نیروی کشش هر یک از پیچ‌های C و مقدار افزایش ΔF در نیروی زیر هر طرف پایه‌ی موردنظر در B را تعیین کنید. فرض کنید که سوراخ پیچ‌ها به اندازه‌ای بزرگ است که تمامی نیروهای افقی توسط لبه‌ی A تحمل می‌شود. همچنین عکس‌العمل‌های قائم در امتداد خط مرکزی پیچ‌ها متمرکز شده است. این فرضیات جزو ملاحظات کلی طراحی می‌باشد.



Scanned by CamScanner

حل:

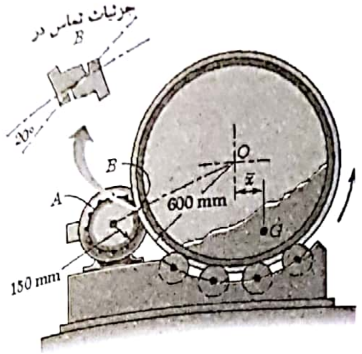


$$\sum M_{C\text{-}C}=0 \quad : \quad ۵۰۰\sin ۴۵^\circ(۰/۳)+۵۰۰(۱+\cos ۴۵^\circ)(۰/۱۲)-۲\Delta F(۰/۲)=۰$$

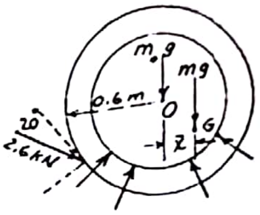
$$\Delta F=۵۲۱N$$

$$\sum F_y=0 \quad : \quad ۲\Delta F-۲\Delta T-۵۰۰\sin ۴۵^\circ=۰ \quad , \quad \Delta T=۳۴۴N$$

۳-۱۱۰. مطابق شکل یک استوانه متقارن توسط یک موتور گیربکس‌دار برای خشک کردن ماسه به کار می‌افتد. اگر جرم ماسه $۷۵۰kg$ باشد و دندانه‌های پینیون A نیروی متوسط $۲/۶kN$ را به صورت عمود بر سطوح تماس B بر استوانه وارد کنند، فاصله‌ی $\bar{x}$ مرکز جرم ماسه از خط قائم مرکزی را محاسبه کنید. اصطکاک در غلتک‌های تکیه‌گاهی را نادیده بگیرید.



حل:

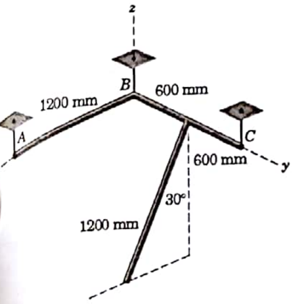


$$mg=۷۵۰(۹/۸۱)(۱۰^{-۳})=۷/۳۵۸kN$$

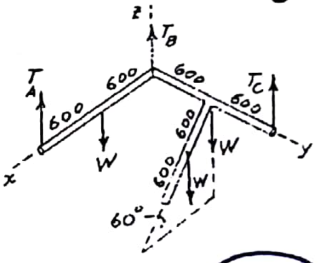
$$\sum M_O=0 \quad : \quad ۲/۶\cos ۲۰^\circ(۶۰۰)-۷/۳۵۸\bar{x}=۰$$

$$\bar{x}=۱۹۹/۲\ mm$$

۳-۱۱۱. طول هر سه میله $۱۲۰۰mm$ و جرم هر کدام $۲۰kg$ است. میله‌ها مطابق شکل به هم جوش داده شده‌اند و از سه سیم قائم آویزان شده‌اند. میله‌های AB و BC در صفحه‌ی افقی x-y و میله‌ی سوم در صفحه‌ای موازی صفحه‌ی x-z قرار دارند. کشش در هر سیم را حساب کنید.



حل:



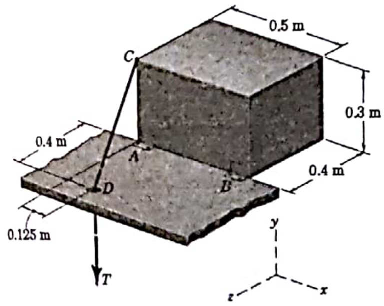
$$W=۲۰(۹/۸۱)=۱۹۶/۲N$$

$$\sum M_x=0 \quad : \quad ۱۲۰۰T_C-۲(۱۹۶/۲)۶۰۰=۰ \quad , \quad T_C=۱۹۶/۲N$$

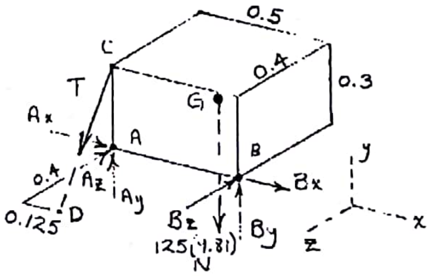
$$\sum M_y=0 \quad : \quad ۱۹۶/۲(۶۰۰+۶۰۰\cos ۶۰^\circ)-۱۲۰۰T_A=۰ \quad , \quad T_A=۱۴۷/۲N$$

$$\sum F_z=0 \quad : \quad T_B+۱۴۷/۲+۱۹۶/۲-۳(۱۹۶/۲)=۰ \quad , \quad T_B=۲۴۵N$$

۳-۱۱۲. نیروی کششی T موردنیاز برای نگه داشتن مکعب مستطیل صلب در موقعیت موردنظر را تعیین کنید. مکعب مستطیل همگن بوده و جرمی معادل $۱۲۵kg$ دارد. اصطکاک در D ناچیز است.



حل:



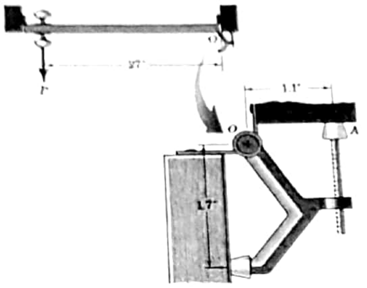
$$\mathbf{T}=T\mathbf{n}_{CD}=T\frac{\mathbf{CD}}{CD}=T\left[\frac{۰/۱۲۵\mathbf{i}-۰/۳\mathbf{j}+۰/۴\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۱۲۵^۲+۰/۳^۲+۰/۴^۲}}\right]$$

$$=T(۰/۲۴۲\mathbf{i}-۰/۵۸۲\mathbf{j}+۰/۷۷۶\mathbf{k})$$

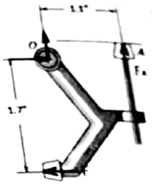
$$\sum M_{A_x}=0 \quad : \quad ۰/۷۷۶T(۰/۳)-۱۲۵(۹/۸۱)(۰/۲)=۰ \quad , \quad T=۱۰۵۳N$$

Scanned by CamScanner

۳-۱۱۳. مطابق شکل یک دستگاه متوقف‌کننده‌ی درب قابل تنظیم، روی لولا نصب شده است. درب نشان داده شده در نمای عادی بسته است ولی در نمای بزرگ شده دستگاه در حالت °۹۰ و باز است. اگر فردی دستگیره‌ی در را با نیروی $P = ۱lb$ به صورت عمود بر درب بکشد، در موقعیت °۹۰ کاملاً باز، نیروی F_A که ضربه‌گیر A به دیوار وارد می‌کند را تعیین کنید. مسئله را به صورت دوبعدی درنظر بگیرید.



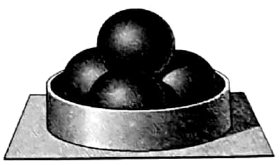
حل:



درب در حالت باز:

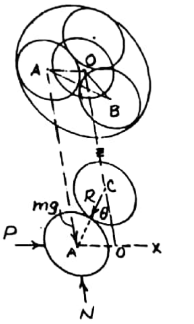
$\sum M_o = ۰ \quad : \quad P(۲۷) - F(۱/۷) = ۰ \quad , \quad F = ۱۵/۸۸ lb$

$\sum M_o = ۰ \quad : \quad F(۱/۷) - F_A(۱/۱) = ۰ \quad , \quad F_A = ۲۴/۵ lb$



۳-۱۱۴. سه گوی یکسان فولادی، هر کدام به جرم m روی سطح افقی درون یک حلقه‌ی استوانه‌ای قرار گرفته‌اند و ارتفاع حلقه کمی از شعاع گوی‌ها بیشتر است. قطر حلقه به گونه‌ای است که گوی‌ها تقریباً یکدیگر را لمس می‌کنند. گوی مشابه چهارم روی سه گوی دیگر قرار داده شده است. نیروی P که حلقه بر سه گوی پایین وارد می‌کند، تعیین کنید.

حل:



$\angle OAB = \angle OBA = ۳۰^\circ$

$\overline{AB} = ۲r \quad , \quad r =$ شعاع دایره

$\overline{AO} = \frac{r}{\cos ۳۰^\circ} = \frac{۲r}{\sqrt{۳}} \quad , \quad \overline{AC} = ۲r$

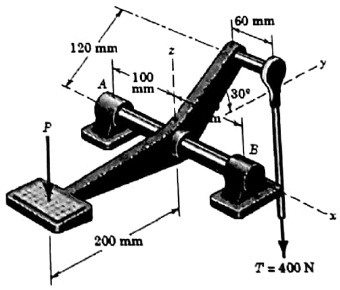
$\overline{OC} = r\sqrt{۲^۲ - \left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^۲} = ۲r\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

تعادل در توپ بالایی $\Rightarrow \sum F_z = ۰ \quad : \quad ۳R\cos\theta - mg = ۰$

$۳R\frac{۲r\sqrt{\frac{۲}{۳}}}{۲r} = mg \quad ; \quad R = \frac{mg}{\sqrt{۶}}$

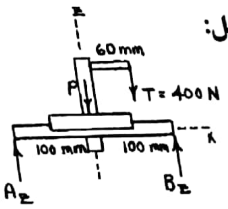
توپ پایینی : $\sum F_x = ۰ \quad : \quad P - R\sin\theta = ۰$

$P = \frac{mg}{\sqrt{۶}}\frac{\frac{۲r}{\sqrt{۳}}}{۲r} = \frac{mg}{۳\sqrt{۲}}$



۳-۱۱۵. برای تولید کشش $T = ۴۰۰N$ در میله‌ی کنترل قائم، نیروی P باید بر پدال وارد شود. عکس‌العمل یاتاقان‌های مربوطه در A و B را تعیین کنید.

حل:



$\sum M_x = ۰ : P(۲۰۰) - ۴۰۰(۱۲۰\cos ۳۰^\circ) = ۰$

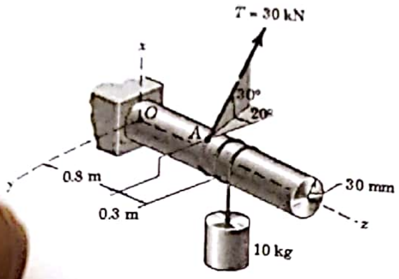
$P = ۲۰۷/۹N$

Scanned by CamScanner

$\sum M_{A_x} = ۰ \quad : \quad ۲۰۷/۹(۱۰۰) + ۴۰۰(۱۶۰) - B_z(۲۰۰) = ۰ \quad , \quad B_z = ۴۲۴\,N$

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad A_z + ۴۲۴ - ۲۰۷/۹ - ۴۰۰ = ۰ \quad , \quad A_z = ۱۸۳/۹\,N$

$A_y = B_y = ۰ \quad , \quad A = A_z = ۱۸۳/۹\,N \quad , \quad B = B_z = ۴۲۴\,N$



۳-۱۱۶. پس از مطالعه‌ی اصطکاک در فصل ششم خواهید دید که برای بالا کشیدن قطعه‌ای به جرم $۱۰kg$ نیروی بسیار بزرگ T موردنیاز است. اگر مطابق شکل کابل دور استوانه‌ی صاف و ثابتی پیچیده شده باشد، برای تعادل استاتیکی نشان داده شده، عکس‌العمل‌های نیرو و گشتاوری را در نقطه‌ی O تعیین کنید. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا جایی که کابل از استوانه جدا می‌شود، $۰/۳m$ است. از وزن استوانه‌ی ثابت صرف‌نظر کنید.

حل:

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y - (T\cos ۳۰°)\cos ۲۰° = ۰ \quad , \quad O_y = ۲۴۴۰۰\,N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x - mg + ۳۰\sin ۳۰° = ۰ \quad , \quad O_x = -۱۴۹۰۰\,N$

$\sum F_z = ۰ \quad : \quad O_z - (T\cos ۳۰°)\sin ۲۰° = ۰ \quad , \quad O_z = ۸۸۹۰\,N$

$\sum M_x = ۰ \quad : \quad T\cos ۳۰°(\cos ۲۰°)(۰/۸) - T\cos ۳۰°(\sin ۲۰°)(۰/۰۲\sin ۳۰°) + M_x = ۰$

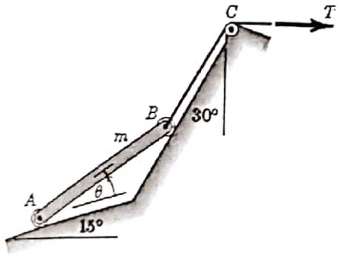
$M_x = -۱۹۳۹۰\,N.m$

$\sum M_y = ۰ \quad : \quad T\cos ۳۰°(\sin ۲۰°)(۰/۰۲\cos ۳۰°) + T\sin ۳۰°(۰/۸) - mg(۱/۱) + M_y = ۰$

$M_y = -۱۲۱۲۰\,N.m$

$\sum M_z = ۰ : \; ۱۰(۹/۸۱)(۰/۰۳) - T\cos ۳۰°(\cos ۲۰°)(۰/۰۳\cos ۳۰°) - T\sin ۳۰°(۰/۰۳\sin ۳۰°) + M_z = ۰$

$M_z = ۸۵۷\,N.m$



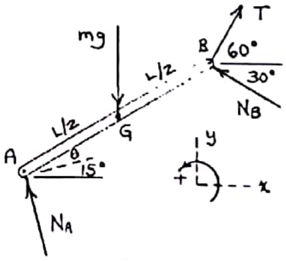
۳-۱۱۷. نسبت T/mg موردنیاز برای تعادل میله‌ی باریک در هر زاویه‌ای بین صفر تا $۴۵°$ را تعیین کرده و رسم کنید. میله‌ی AB به جرم m یکنواخت است.

حل:

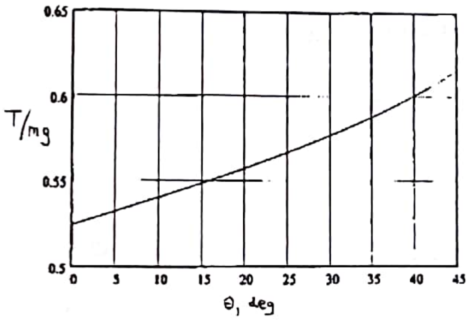
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -N_A \sin ۱۵° - N_B \cos ۳۰° + T\sin ۳۰° = ۰$

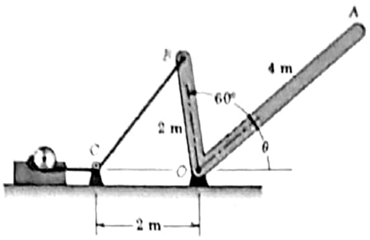
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad N_A \cos ۱۵° + N_B \sin ۳۰° + T\cos ۳۰° - mg = ۰$

$\sum M_B = ۰ \quad : \quad mg\frac{L}{۲}\cos(\theta + ۱۵°) - N_A \cos\theta(L) = ۰$



حل $\Rightarrow \quad T = mg\dfrac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\theta - \frac{\sqrt{۲}}{۴}\cos(\theta + ۱۵°)}{\cos\theta}$





۳-۱۱۸. نیروی کششی T را، که توسط یک گردنده تولید می‌شود تا عضو سازه‌ای، پیوسته حول تکیه‌گاه ثابت O دوران کند، بر حسب تابعی از θ تعیین کرده و رسم کنید (در محدوده‌ی $\theta_{max} \geq \theta \geq ۰$) θ_{max} مقداری از θ است که به ازای آن T صفر می‌شود. جرم واحد طول عضو سازه‌ای $۲۵kg/m$ است.

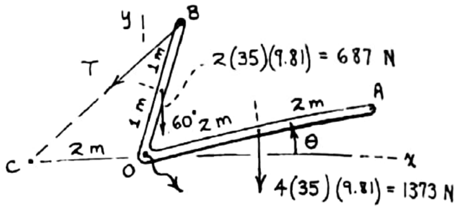
حل:

$$\mathbf{BC} = [-۲-۲\cos(\theta+۶۰°)]\mathbf{i} - [۲\sin(\theta+۶۰°)]\mathbf{j}$$

$$\overline{BC}^{۲} = \{۴+۸\cos(\theta+۶۰°)+۴\cos^{۲}(\theta+۶۰°)+۴\sin^{۲}(\theta+۶۰°)\}$$

$$\overline{BC} = \{۸+۸\cos(\theta+۶۰°)\}^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\mathbf{n}_{BC} = \frac{[-۲-۲\cos(\theta+۶۰°)]\mathbf{i} - [۲\sin(\theta+۶۰°)]\mathbf{j}}{\{۸+۸\cos(\theta+۶۰°)\}^{\frac{۱}{۲}}}$$



$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{BC}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \quad : \quad -۱۳۷۳(۲\cos\theta) - ۶۸۷(۱\cos(\theta+۶۰°)) + \frac{۲T\sin(\theta+۶۰°)}{\{۸+۸\cos(\theta+۶۰°)\}^{\frac{۱}{۲}}}(۲) = ۰$$

$$T = \left[\frac{۲۷۵۰\cos\theta + ۶۸۷\cos(\theta+۶۰°)}{۴\sin(\theta+۶۰°)}\right][۸+۸\cos(\theta+۶۰°)]^{\frac{۱}{۲}}$$

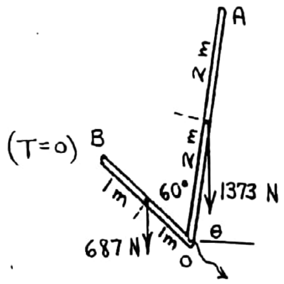
$$\sum M_o = ۰ \quad : \quad ۶۸۷(۱\cos(۱۲۰° - \theta)) = ۱۳۷۳(۲\cos\theta)$$

$$\cos(۱۲۰° - \theta) = ۴\cos\theta$$

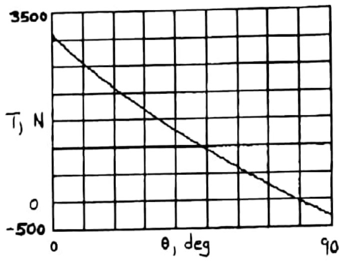
$$\cos ۱۲۰° \cos\theta + \sin ۱۲۰° \sin\theta = ۴\cos\theta$$

$$-\frac{۱}{۲}\cos\theta + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\theta = ۴\cos\theta$$

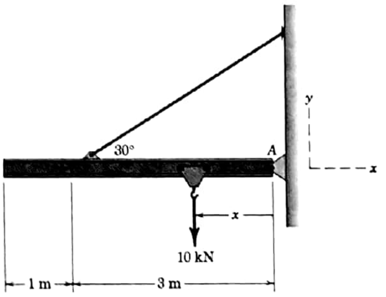
$$\tan\theta = \frac{۴/۵(۲)}{\sqrt{۳}} \quad \Rightarrow \quad \theta_{max} = ۷۹/۱°$$



بعد از $\theta = ۷۹/۱°$، T منفی می‌شود.

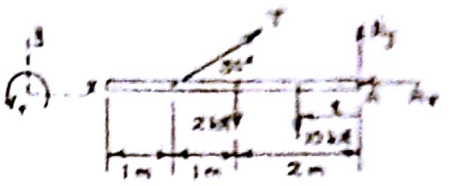


۳-۱۱۹. جرثقیل سقفی برای حداکثر ظرفیت $۱۰kN$ طراحی شده است و تیر I شکل یکنواخت جرمی معادل $۲۰۰kg$ دارد. (الف) مقدار R عکس‌العمل لولای A را به صورت تابعی از x برای محدوده‌ی $x = ۰/۲m$ تا $x = ۳/۸m$ رسم کنید. به صورت مشابه با توجه به جهت محورها، مؤلفه‌های x و y عکس‌العمل لولای A را رسم کنید. (ب) حداقل مقدار R و x مربوط به آن را تعیین کنید. (پ) لولای A برای چه مقدار R باید طراحی شود؟ $(g = ۱۰m/s^{۲})$



Scanned by CamScanner

حل:



وزن تیر $= ۲۰۰(۱۰)(۱۰^{-۲}) = ۲\,kN$

$\sum M_A = ۰ \;:\; ۱۰x + ۲(۲) - T\sin ۳۰^\circ(۲) = ۰ \;,\; T = \frac{۲}{۳}(۱۰x+۲)\;kN$

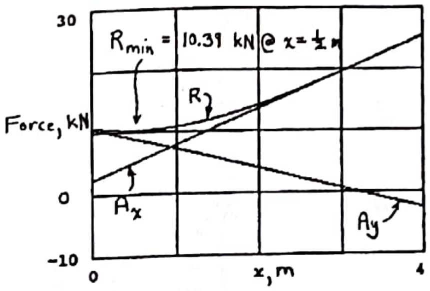
$\sum F_x = ۰ \;:\; T\cos ۳۰^\circ - A_x = ۰ \;,\; A_x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱۰x+۲)$

$\sum F_y = ۰ \;:\; T\sin ۳۰^\circ - ۲ - ۱۰ + A_y = ۰ \;,\; A_y = \frac{۱}{۳}(-۱۰x+۳۲)$

الف) $R = \{A_x^۲ + A_y^۲\}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}\{۴۰۰x^۲ - ۴۰۰x + ۱۰۷۲\}^{\frac{۱}{۲}}$

ب) $\frac{dR^۲}{dx} = ۰ \;:\; ۸۰۰x - ۴۰۰ = ۰ \;,\; x = \frac{۱}{۲}m$

$R_{min} = \frac{۱}{۳}\left\{۴۰۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۴۰۰\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۱۰۷۲\right\}^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰/۳۹\;kN$

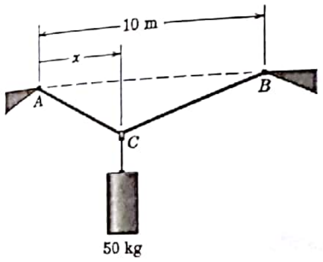


پ) نمودار A_x، A_y و R

$R_{max} = ۲۴/۳\,kN \;,\; x = ۳/۸m$

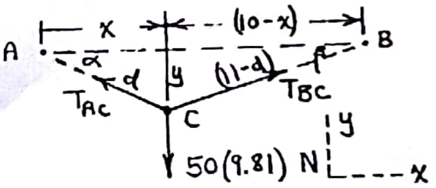
مقداری از R که باید در طراحی لولای A در نظر گرفته شود.

۳-۱۲۰. استوانه‌ای به جرم $۵۰kg$ از گیره‌ی C آویزان شده است و می‌تواند در هر موقعیت افقی x، بین تکیه‌گاه‌های ثابت A و B قرار بگیرد. طول کابل $۱۱m$ است. کشش در قسمت‌های AC و BC از کابل موردنظر را به صورت تابعی از x تعیین کرده و در محدوده‌ی $۰ \le x \le ۱۰$ رسم کنید. بیشترین کشش در هر کابل چقدر است و در چه فاصله‌ی x اتفاق می‌افتد؟



حل:

براساس هندسه:



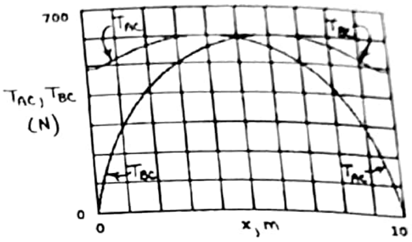
$y^۲ = d^۲ - x^۲ = (۱۱-d)^۲ - (۱۰-x)^۲$

$d = \frac{۱۰}{۱۱}x + \frac{۲۱}{۲۲}$

$$y=\sqrt{d^۲-x^۲}=\left[-\frac{۲۱}{۱۲۱}x^۲+\frac{۲۱۰}{۱۲۱}x+\frac{۴۴۱}{۴۸۴}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{[-\frac{۲۱}{۱۲۱}x^۲+\frac{۲۱۰}{۱۲۱}x+\frac{۴۴۱}{۴۸۴}]^{\frac{۱}{۲}}}{x}$$

$$\tan\beta=\frac{y}{۱۰-x}=\frac{[-\frac{۲۱}{۱۲۱}x^۲+\frac{۲۱۰}{۱۲۱}x+\frac{۴۴۱}{۴۸۴}]^{\frac{۱}{۲}}}{۱۰-x}$$



تعادل:

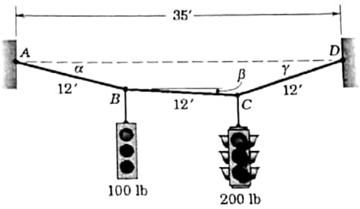
$$\sum F_x=۰\quad:\quad -T_{AC}\cos\alpha+T_{BC}\cos\beta=۰$$

$$\sum F_y=۰\quad:\quad T_{AC}\sin\alpha+T_{BC}\sin\beta-۵۰(۹/۸۱)=۰$$

حل همزمان دو معادله و رسم نمودار در فاصله‌ی $۰\le x\le ۱۰$:

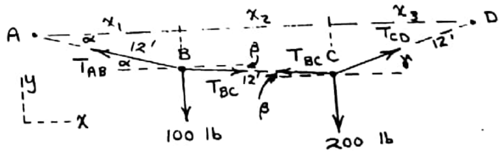
$(T_{AC})_{\max}=۶۰۰N \quad , \quad x=۳/۹۱m$

$(T_{BC})_{\max}=۶۰۰N \quad , \quad x=۶/۰۹m$



۳-۱۲۱. مطابق شکل دو چراغ راهنمایی رانندگی روی کابلی به طول ۳۶ ft در فواصل مساوی نصب شده‌اند. در حالت تعادل، زاویه‌های α، β و γ و همچنین کشش در هر قسمت کابل را تعیین کنید.

حل:



B:

$$\sum F_x=۰\quad:\quad -T_{AB}\cos\alpha+T_{BC}\cos\beta=۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_y=۰\quad:\quad T_{AB}\sin\alpha-T_{BC}\sin\beta-۱۰۰=۰ \qquad (۲)$$

C:

$$\sum F_x=۰\quad:\quad -T_{BC}\cos\beta+T_{CD}\cos\gamma=۰ \qquad (۳)$$

$$\sum F_y=۰\quad:\quad T_{BC}\sin\beta+T_{CD}\sin\gamma-۲۰۰=۰ \qquad (۴)$$

$$\cos\alpha=\frac{x_۱}{۱۲}\quad,\quad\cos\beta=\frac{x_۲}{۱۲}\quad,\quad\cos\gamma=\frac{x_۳}{۱۲}$$

بنابراین $\cos\alpha+۱۲\cos\beta+۱۲\cos\gamma=۳۵$ (۵)

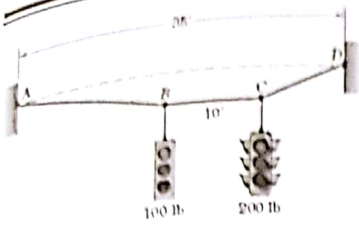
مطابق شکل $\sin\alpha+\sin\beta=\sin\gamma$ (۶)

حل همزمان معادلات

$$\begin{cases}\alpha=۱۴/۴۴^\circ & T_{AB}=۵۲۹lb\\ \beta=۳/۵۷^\circ & T_{BC}=۵۱۳lb\\ \gamma=۱۸/۱۶^\circ & T_{CD}=۵۳۹lb\end{cases}$$

۳-۱۲۲. دو چراغ راهنمایی رانندگی مسئله‌ی ۱۲۱ تغییر وضعیت داده، به طوری که بخش افقی BC از کل کابل، طولی معادل ۱۰ ft را به خود اختصاص داده است. طول موردنیاز AB و AC و کشش در هر سه بخش کابل را تعیین کنید.

Scanned by CamScanner



حل:

براساس هندسه

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=۳۶\,ft$ (۱)

$\overline{AB}\cos\alpha+\overline{BC}+\overline{CD}\cos\gamma=۳۵\,ft$ (۲)

$\overline{AB}\sin\alpha=\overline{CD}\sin\gamma$ (۳)

تعادل:

$$(B)\begin{cases}\sum F_x=۰ &: -T_{AB}\cos\alpha+T_{BC}=۰ \quad (۴)\\ \sum F_y=۰ &: T_{AB}\sin\alpha-۱۰۰=۰ \quad (۵)\end{cases}$$

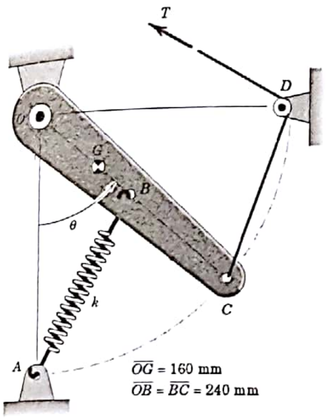
$$(C)\begin{cases}\sum F_x=۰ &: -T_{BC}+T_{CD}\cos\gamma=۰ \quad (۶)\\ \sum F_y=۰ &: T_{CD}\sin\gamma-۲۰۰=۰ \quad (۷)\end{cases}$$

با توجه به اینکه طول BC معادل $۱۰\,ft$ است پس ۷ معادله و ۷ مجهول.

بنابراین:

$\overline{AB}=۱۷/۰۱\,ft$	$\alpha=۱۱/۴۷°$	$T_{AB}=۵۰۲\,lb$
$\overline{CD}=۸/۹۹\,ft$	$\gamma=۲۲/۱°$	$T_{BC}=۴۹۳\,lb$
		$T_{CD}=۵۳۲\,lb$

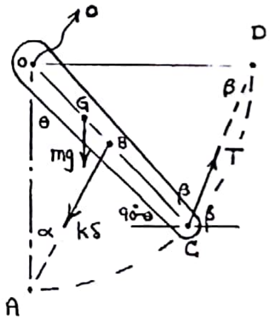
۳-۱۲۳. مرکز جرم بست OC با جرمی معادل $۱/۵\,kg$ در G قرار دارد. ثابت فنر $k=۲۵\,N/m$ بوده و فنر در $\theta=۰$ هنوز کشیده نشده است. در محدوده‌ی $۰\le\theta\le۹۰$، کشش T موردنیاز برای تعادل استاتیکی را رسم کرده و در $\theta=۴۵°$ و $\theta=۹۰°$ مقدار T را به دست آورید.



حل:

$$۲\beta+(۹۰°-\theta)=۱۸۰°$$

$$\beta=\frac{۹۰°+\theta}{۲}$$



با توجه به قانون کسینوس‌ها

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^۲+\overline{OB}^۲-۲(\overline{OA})(\overline{OB})\cos\theta}$$

تغییر طول فنر $\delta=\overline{AB}-\overline{BC}$ (۱)

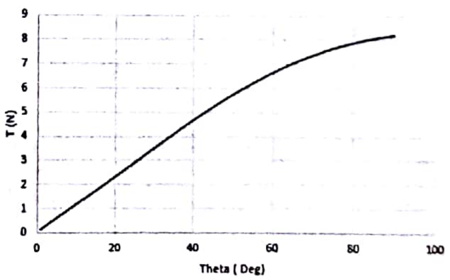
قانون سینوس‌ها : $\dfrac{\sin\alpha}{\overline{OB}}=\dfrac{\sin\theta}{\overline{AB}}$, $\alpha=\sin^{-۱}\left[\dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}\sin\theta\right]$ (۲)

$$\circlearrowright+\sum M_o=۰ : -(k\delta\sin\alpha)(\overline{OA})-mg(\overline{OG}\sin\theta)+T\sin\beta(\overline{OD})=۰$$

$$T=\frac{(k\delta\sin\alpha)(\overline{OA})+mg(\overline{OG}\sin\theta)}{\overline{OD}\sin\beta} \quad (۳)$$

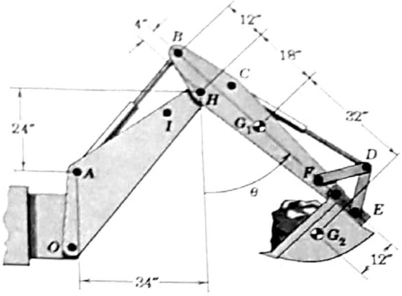
$$\delta=\sqrt{\overline{OA}^۲+\overline{OB}^۲-۲\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta}-۰/۲۴ \quad (۴)$$

$T_{۴۵°}=۵/۲۳\,N$, $T_{۹۰°}=۸/۲۲\,N$



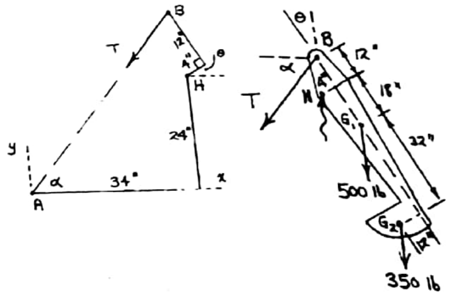
Scanned by CamScanner

۳-۱۲۴. قسمت‌های اصلی یک بلدوزر کوچک در تصویر نشان داده شده است. عضو BE (به طور کامل با استوانه‌ی هیدرولیکی CD و بست‌های کنترل DF و DE) با مرکز جرم G_1، وزنی معادل $500lb$ دارد. وزن بیل به همراه خاک درون آن $350lb$ بوده و مرکز جرم آن در G_2 قرار دارد. برای تعیین مشخصات مؤثر طراحی بلدوزر، نیروی کششی T در استوانه‌ی هیدرولیکی AB را برحسب تابعی از موقعیت عضو BE یعنی زاویه‌ی θ در محدوده‌ی $0 \le \theta \le 90°$ تعیین کرده و رسم کنید. برای چه مقدار θ، T صفر می‌شود؟ در این سؤال عضو OH ثابت است؛ توجه کنید که یک استوانه‌ی هیدرولیکی (پنهان) از نزدیک نقطه‌ی O تا لولای I وجود دارد که نقش کنترل را برعهده دارد. استوانه‌ی هیدرولیکی CD در یک طول ثابت نگه داشته شده است.



حل:

از لحاظ هندسی:



$$\text{مختصات } B:\quad \begin{cases} x = ۳۴ + ۴\cos\theta - ۱۲\sin\theta \\ y = ۲۴ + ۴\sin\theta + ۱۲\cos\theta \end{cases} \quad (in) \qquad (۱)$$

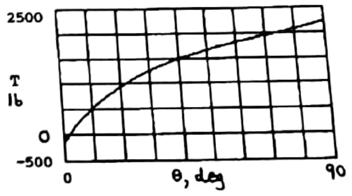
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{راستای } T) \qquad (۲)$$

$$\circlearrowleft + \sum M_H = ۰ \quad : \quad -(T\cos\alpha)(۲۴) + (T\sin\alpha)(۳۴) - ۵۰۰(۱۸\sin\theta + ۴\cos\theta) \qquad (۳)$$

$$- ۳۵۰(۴\cos\theta + (۱۸ + ۳۲)\sin\theta - ۱۲\cos\theta) = ۰$$

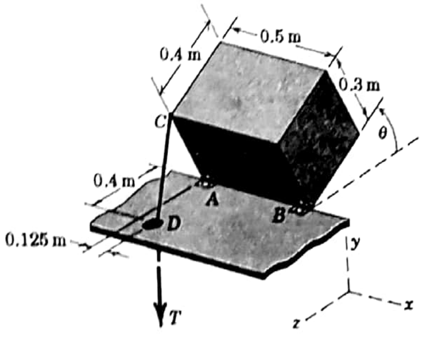
$$\Rightarrow \quad T = \frac{۲۶۵۰۰\sin\theta - ۸۰۰\cos\theta}{۳۴\sin\alpha - ۲۴\cos\alpha} \quad lb \qquad (\text{کشش در } AB \text{ مثبت است.})$$

حل همزمان (۱)، (۲) و (۳)



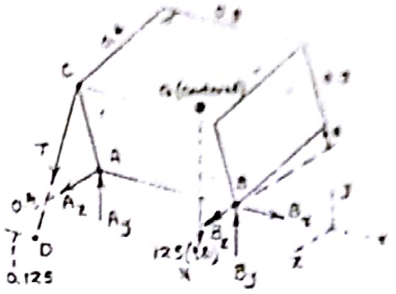
$$T = ۰ \quad \Rightarrow \quad \theta = ۱/۷۲۹°$$

۳-۱۲۵. سیستم مسئله ۱۱۲ دوباره در اینجا نشان داده شده است، با این تفاوت که مطابق شکل، مکعب مستطیل همگن به جرم $125kg$، به اندازه‌ی θ حول محور لولای AB دوران کرده است. مقادیر زیر را به صورت تابعی از θ برای محدوده‌ی $0 \le \theta \le 60°$ تعیین کرده و رسم کنید: T، A_y، A_z، B_z، B_y و B_z. لولای A نمی‌تواند نیروی محوری تحمل کند. تمامی مؤلفه‌های عکس‌العمل را در جهت مثبت دستگاه مختصات درنظر بگیرید.



حل:

Scanned by CamScanner



$$CD = ۰/۱۲۵\mathbf{i} - ۰/۲\cos\theta\,\mathbf{j} + (۰/۴ - ۰/۳\sin\theta)\mathbf{k}$$

$$T = T_{n_{CD}} = T\frac{\mathbf{CD}}{\overline{CD}}$$

$$T = T\left[\frac{۰/۱۲۵\mathbf{i} - ۰/۲\cos\theta\,\mathbf{j} + (۰/۴ - ۰/۳\sin\theta)\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۲۶۶ - ۰/۲۴\sin\theta}}\right]$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad \frac{۰/۱۲۵T}{\sqrt{۰/۲۶۶ - ۰/۲۴\sin\theta}} + B_x = ۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad \frac{-۰/۲T\cos\theta}{\sqrt{۰/۲۶۶ - ۰/۲۴\sin\theta}} + A_y + B_y - ۱۲۵(۹/۸۱) = ۰ \qquad (۲)$$

$$\sum F_z = ۰ \quad : \quad \frac{(۰/۴ - ۰/۳\sin\theta)T}{\sqrt{۰/۲۶۶ - ۰/۲۴\sin\theta}} + A_z + B_z = ۰ \qquad (۳)$$

$$\sum M_{D_x} = ۰ : \quad (A_y + B_y)(۰/۴) - ۱۲۵(۹/۸۱)(۰/۴ + ۰/۲\cos\theta - ۰/۱۵\sin\theta) = ۰ \qquad (۴)$$

$$\sum M_{D_y} = ۰ : \quad -B_x(۰/۴) + A_z(۰/۱۲۵) - B_z(۰/۳۷۵) = ۰ \qquad (۵)$$

$$\sum M_{D_z} = ۰ : \quad -A_y(۰/۱۲۵) + B_y(۰/۳۷۵) - ۱۲۵(۹/۸۱)(۰/۱۲۵) = ۰ \qquad (۶)$$

حل معادلات با کامپیوتر:

$$T = -۱۲/۷۷\frac{-۴\cos\theta + ۳\sin\theta}{\cos\theta}\sqrt{۴۲۵ - ۳۸۴\sin\theta}$$

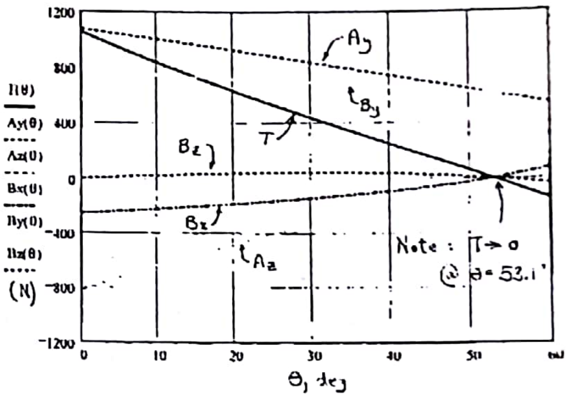
$$A_y = ۶۱۳ + ۴۶۰\cos\theta - ۳۴۵\sin\theta$$

$$A_z = -۱۲/۷۷\frac{۶۴\cos\theta - ۴۸\sin\theta - ۳۶\sin\theta\cos\theta + ۲۷\cos^۲\theta}{\cos\theta}$$

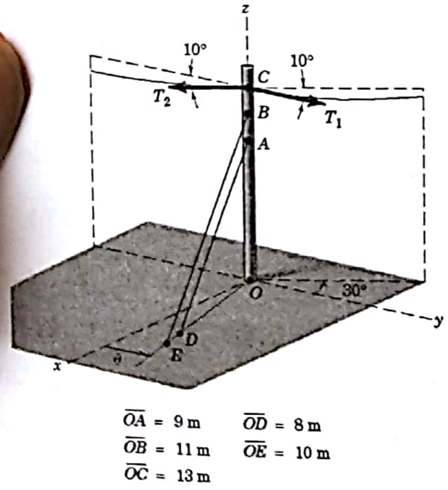
$$B_x = ۶۳/۹\frac{-۴\cos\theta + ۳\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$B_y = ۶۱۳ + ۱۵۳/۳\cos\theta - ۱۱۵\sin\theta$$

$$B_z = -۳۸/۳\frac{-۴\cos\theta + ۳\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta$$



۳-۱۲۶. دکل قائم، کابل‌های تأسیساتی و دو سیم مسئله‌ی ۹۸ دوباره نشان داده شده است. در قسمتی از مطالعات طراحی، شرایط خاصی مدنظر است، کشش $T_۲$ مقدار ثابت $۱۰۰۰N$ و با زاویه‌ی ثابت ۱۰° و کشش $T_۱$ نیز با زاویه‌ی ثابت ۱۰° اثر می‌کنند، ولی مقدار $T_۱$ از صفر تا $۲۰۰۰N$ متغیر است. برای هر مقدار $T_۱$، کشش‌های یکسان T در هر کدام از کابل‌های AD و BE را تعیین کرده و رسم کنید. برای چه مقدار θ، گشتاور در O صفر خواهد شد؟ مقادیر T و θ را برای $T_۱ = ۱۰۰۰N$ مشخص کنید.



حل:

با مراجعه به FBD و حل مسئله ۹۶:

$$\mathbf{T}_۲ = ۱۰۰۰(۰\mathbf{i} - \cos۱۰^\circ\mathbf{j} - \sin۱۰^\circ\mathbf{k}) \quad N$$

$$\mathbf{T}_۱ = T_۱(-\sin۳۰^\circ\cos۱۰^\circ\mathbf{i} + \cos۳۰^\circ\cos۱۰^\circ\mathbf{j} - \sin۱۰^\circ\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{BE} = \frac{T(۱۰\cos\theta\,\mathbf{i} + ۱۰\sin\theta\,\mathbf{j} - ۱۱\mathbf{k})}{\sqrt{(۱۰\cos\theta)^۲ + (۱۰\sin\theta)^۲ + ۱۱^۲}}$$

Scanned by CamScanner

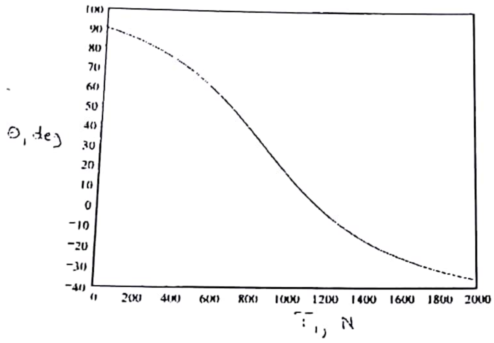
$$\mathbf{T}_{AD} = \frac{T(۸\cos\theta\,\mathbf{i} + ۸\sin\theta\,\mathbf{j} - ۹\mathbf{k})}{\sqrt{(۸\cos\theta)^۲ + (۸\sin\theta)^۲ + ۹^۲}}$$

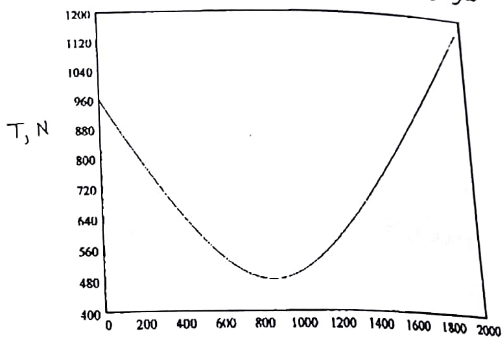
$\mathbf{r}_{OC} = ۱۳\mathbf{k} \quad m \quad , \quad \mathbf{r}_{OB} = ۱۱\mathbf{k} \quad m \quad , \quad \mathbf{r}_{OA} = ۹\mathbf{k} \quad m$

$\sum \mathbf{M}_o = ۰ \quad : \quad \mathbf{r}_{OC} \times (\mathbf{T}_۱ + \mathbf{T}_۲) + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{T}_{BE} + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{T}_{AD} = ۰$

با مساوی صفر قرار دادن مؤلفه‌های **i** و **j** بردار به دست آمده و حل معادلات، مقدار T و θ به ازای هر مقدار $T_۱$ به دست خواهد آمد.

نمودارها:





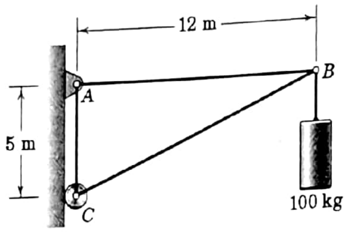
$T_۱ = ۱۰۰۰N \quad \Rightarrow \quad T = ۴۹۵N \quad , \quad \theta = ۱۵^\circ$

فصل چهارم

سازه‌ها

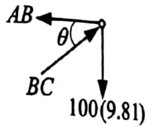
۴-۱. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:



$W = mg = ۹۸۰/۶۶۵\ N$

$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۵}{۱۲}\right) = ۲۲/۶^\circ$

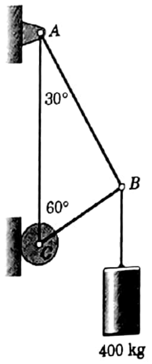


گره B : $\begin{cases} +\uparrow \sum F_y = ۰ & : \quad BC\sin\theta - ۹۸۰/۶۶۵ = ۰ \quad , \quad BC = ۲۵۵۰\ N \text{ (فشاری)} \\ \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ & : \quad BC\cos\theta - AB = ۰ \quad , \quad AB = ۲۳۵۰\ N \text{ (کششی)} \end{cases}$

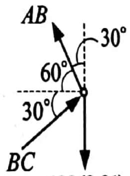
گره C : $+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad AC - BC\sin\theta = ۰ \quad , \quad AC = ۰/۹۸۱ kN$ (کششی)

۴-۲. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:



گره B : $\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ & : \quad AB\cos ۶۰^\circ - BC\cos ۳۰^\circ = ۰ \\ +\uparrow \sum F_y = ۰ & : \quad AB\sin ۶۰^\circ + BC\sin ۳۰^\circ - ۴۰۰(۹/۸۱) = ۰ \end{cases}$

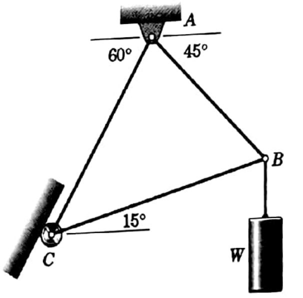


$AB = ۳۴۰۰\ N$ (کششی) , $BC = ۱۹۶۲\ N$ (فشاری)

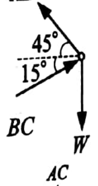
گره C : $+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad AC - BC\sin ۳۰^\circ = ۰ \quad , \quad AC = ۹۸۱\ N$ (کششی)

۴-۳. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:



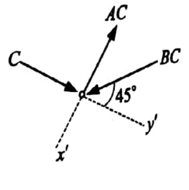
گره B : $\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ & : \quad BC\cos ۱۵^\circ - AB\cos ۴۵^\circ = ۰ \\ +\uparrow \sum F_y = ۰ & : \quad BC\sin ۱۵^\circ + AB\sin ۴۵^\circ - W = ۰ \end{cases}$



$AB = ۱/۱۱۵W$ (کششی) , $BC = ۰/۸۱۶W$ (فشاری)

گره C : $\sum F_{x'} = ۰ \quad : \quad AC - BC\cos ۴۵^\circ = ۰$

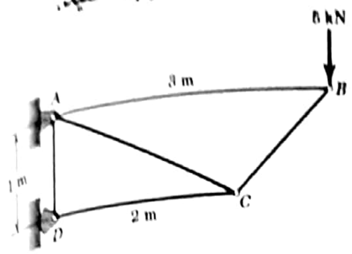
$AC = ۰/۵۷۷\ W$ (کششی)



Scanned by CamScanner

۴-۴. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. به حضور اعضای صفر نیرویی توجه کنید.

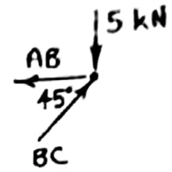
حل:



گره B :

$$\Sigma F_y = ۰ \ : \ BC\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۵ = ۰ \quad , \quad BC = ۵\sqrt{۲}\ kN \ (\text{فشاری})$$

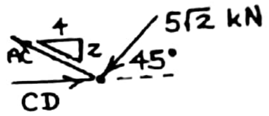
$$\Sigma F_x = ۰ \ : \ -AB + ۵\sqrt{۲} \times \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰ \quad , \quad AB = ۵\ kN \ (\text{کششی})$$



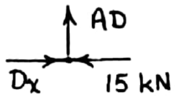
گره C :

$$\Sigma F_y = ۰ \ : \ -۵\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + AC\frac{۲}{۲\sqrt{۵}} = ۰ \quad , \quad AC = ۵\sqrt{۵}\ kN \ (\text{کششی})$$

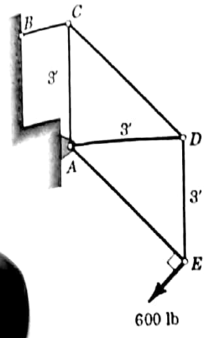
$$\Sigma F_x = ۰ \ : \ CD - ۵\sqrt{۵}\left(\frac{۴}{۲\sqrt{۵}}\right) - ۵\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰ \quad , \quad CD = ۱۵\ kN \ (\text{فشاری})$$



گره D : $\Sigma F_y = ۰ \ : \ AD = ۰$

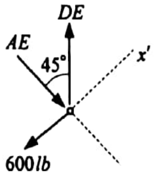


۴-۵. نیروی اعضای AC، AD و DE از خرپای بارگذاری شده را محاسبه کنید. میله‌ی محدودکننده‌ی BC افقی است.



حل:

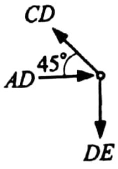
گره E : $\Sigma F_{x'} = ۰ \ : \ DE\sin ۴۵° - ۶۰۰ = ۰ \quad , \quad DE = ۸۴۹\ lb \ (\text{کششی})$



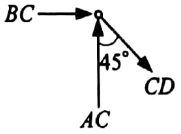
گره D :

$$\Sigma F_x = ۰ \ : \ AD - CD\cos ۴۵° = ۰$$

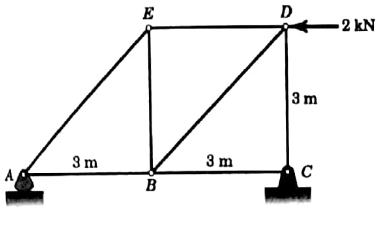
$$\Sigma F_y = ۰ \ : \ CD\sin ۴۵° - DE = ۰ \quad , \quad AD = ۸۴۹\ lb \ (\text{فشاری})$$



گره C : $\Sigma F_y = ۰ \ : \ AC - CD\cos ۴۵° = ۰ \quad , \quad AC = ۸۴۹\ lb \ (\text{فشاری})$



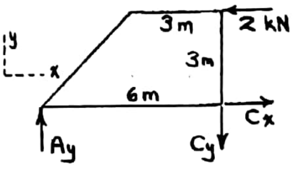
۴-۶. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را محاسبه کنید.



حل:

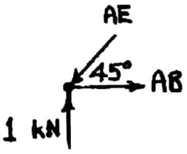
$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_C = ۰ \ : \ ۶A_y - ۲(۳) = ۰ \quad , \quad A_y = ۱ kN$$

$$C_x = ۲ kN \quad , \quad C_y = ۱ kN$$



گره A :

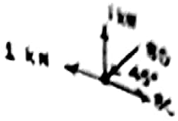
$$\begin{cases} \Sigma F_y = ۰ \ : \ ۱ - AE\sin ۴۵° = ۰ \quad , \quad AE = ۱٫۴۱۴\ kN \ (\text{فشاری}) \\ \Sigma F_x = ۰ \ : \ AB - ۱٫۴۱۴\cos ۴۵° \quad , \quad AB = ۱\ kN \ (\text{کششی}) \end{cases}$$



Scanned by CamScanner

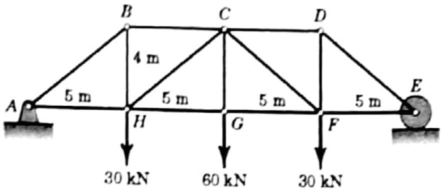
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۱/۴۱۴\cos ۴۵° - BE = ۰ \quad , \quad BE = ۱\ kN$ (کششی)

گره B : $\begin{cases} \sum F_y = ۰ \quad : \quad ۱ - BD\sin ۴۵° = ۰ \quad , \quad BD = ۱/۴۱۴\ kN \text{ (فشاری)} \\ \sum F_x = ۰ \quad : \quad BC - ۱/۴۱۴\cos ۴۵° - ۱ = ۰ \quad , \quad BC = ۲\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

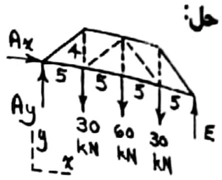


گره C : $\sum F_y = ۰ \quad : \quad CD - ۱ = ۰ \quad , \quad CD = ۱kN$ (کششی)

۷-۴ نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. می‌توانید از تقارن خرپا و بارگذاری آن استفاده کنید.



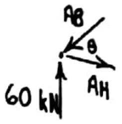
حل:



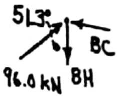
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad ,$ با توجه به تقارن $\Rightarrow A_y = E = ۶۰kN$

$$\left(\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۳۸/۷°\right)$$



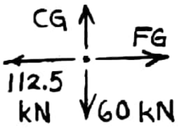
گره A : $\begin{cases} \sum F_y = ۰ \quad : \quad ۶۰ - AB\sin\theta = ۰ \quad , \quad AB = ۹۶\ kN \text{ (فشاری)} \\ \sum F_x = ۰ \quad : \quad AH - ۹۶\cos\theta = ۰ \quad , \quad AH = ۷۵\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$



گره B : $\begin{cases} \sum F_x = ۰ \quad : \quad -BC + ۹۶\sin ۵۱/۳° = ۰ \quad , \quad BC = ۷۵\ kN \text{ (فشاری)} \\ \sum F_y = ۰ \quad : \quad -BH + ۹۶\cos ۵۱/۳° = ۰ \quad , \quad BH = ۶۰\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

گره H : $\begin{cases} \sum F_y = ۰ \quad : \quad -CH\sin\theta + ۳۰ = ۰ \quad , \quad CH = ۴۸\ kN \text{ (فشاری)} \\ \sum F_x = ۰ \quad : \quad -۴۸\cos\theta + GH - ۷۵ = ۰ \quad , \quad GH = ۱۱۲/۵\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

گره G : $\sum F_y = ۰ \quad : \quad CG = ۶۰kN$ (کششی)



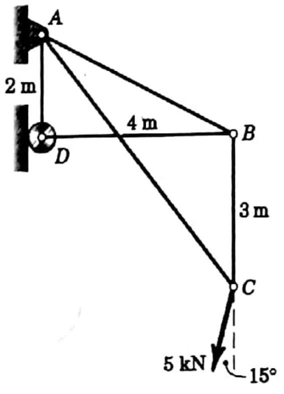
با توجه به تقارن:

$FG = ۱۱۲/۵kN$ (کششی) , $CF = ۴۸kN$ (فشاری)

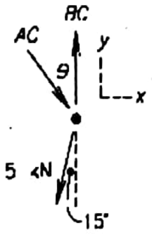
$CD = ۷۵kN$ (فشاری) , $DF = ۶۰kN$ (کششی)

$EF = ۷۵kN$ (کششی) , $DE = ۹۶kN$ (فشاری)

۸-۴ نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:



$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۳۸/۷°$$

گره C : $\begin{cases} \sum F_x = ۰ : \ -۵\sin ۱۵° + AC\sin ۳۸/۷° = ۰ \quad , \quad AC = ۲/۰۷\ kN \text{ (فشاری)} \\ \sum F_y = ۰ : \ BC - ۵\cos ۱۵° - ۲/۰۷\cos ۳۸/۷° = ۰ \quad , \quad BC = ۶/۴۵\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

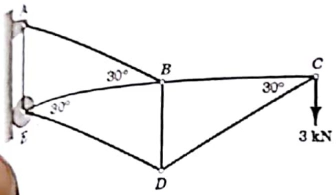
Scanned by CamScanner

$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{۲}{۳}\right)=۲۶٫۶^\circ$

گره B : $\begin{cases}\sum F_y=۰ & : \quad AB\sin ۲۶٫۶^\circ-۶٫۴۵=۰ \quad , \quad AB=۱۴٫۴۲\ kN\ (\text{کششی}) \\ \sum F_x=۰ & : \quad -۱۴٫۴۲\cos ۲۶٫۶^\circ+BD=۰ \quad , \quad BD=۱۲٫۸۹\ kN\ (\text{فشاری})\end{cases}$

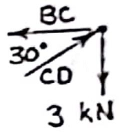
گره D : $\sum F_y=۰ \quad : \quad AD=۰$

۹-۴. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

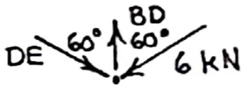


حل:

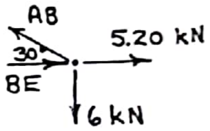
گره C : $\begin{cases}\sum F_y=۰ : CD\left(\frac{۱}{۲}\right)-۳=۰ \quad , \quad CD=۶\ kN\ (\text{فشاری}) \\ \sum F_x=۰ : -BC+۶\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰ \quad , \quad BC=۵٫۲\ kN\ (\text{کششی})\end{cases}$



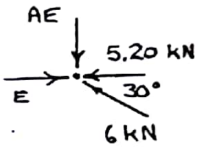
گره D : $\begin{cases}\sum F_x=۰ & : \quad DE=۶kN\ (\text{فشاری}) \\ \sum F_y=۰ & : \quad BD-۲(۶)\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰ \quad , \quad BD=۶\ kN\ (\text{کششی})\end{cases}$



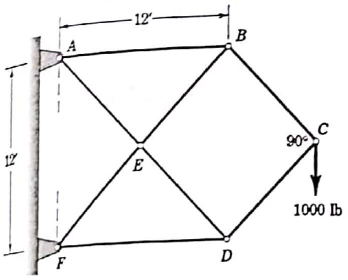
گره B : $\begin{cases}\sum F_y=۰ & : \quad AB\left(\frac{۱}{۲}\right)-۶=۰ \quad , \quad AB=۱۲kN\ (\text{کششی}) \\ \sum F_x=۰ & : \quad BE-۱۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۵٫۲=۰ \quad , \quad BE=۵٫۲\ kN\ (\text{فشاری})\end{cases}$



گره E : $\sum F_y=۰ \quad : \quad ۶\left(\frac{۱}{۲}\right)-AE=۰ \quad , \quad AE=۳kN\ (\text{فشاری})$



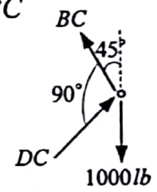
۱۰-۴. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



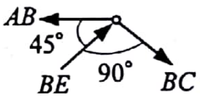
حل:

گره C : $\begin{cases}\sum F_x=۰ : DC\cos ۴۵^\circ-BC\cos ۴۵^\circ=۰ \quad , \quad DE=BC \\ \sum F_y=۰ : DC\sin ۴۵^\circ+BC\sin ۴۵^\circ-۱۰۰۰=۰\end{cases}$

$DC=۷۰۷\ lb\ (\text{فشاری}) \quad , \quad BC=۷۰۷\ lb\ (\text{کششی})$

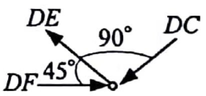


گره B : $\begin{cases}\sum F_y=۰ & : \quad BE\cos ۴۵^\circ-BC\cos ۴۵^\circ=۰ \quad , \quad BE=BC \\ \sum F_x=۰ & : \quad BE\sin ۴۵^\circ+BC\sin ۴۵^\circ-AB=۰\end{cases}$

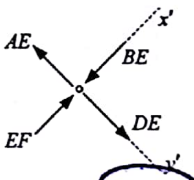


$BE=۷۰۷\ lb\ (\text{فشاری}) \quad , \quad AB=۱۰۰۰\ lb\ (\text{کششی})$

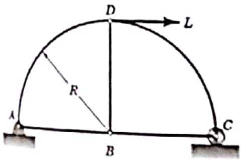
گره D : $\begin{cases}\sum F_y=۰ & : \quad DE=DC \quad , \quad DE=۷۰۷lb\ (\text{کششی}) \\ \sum F_x=۰ & : \quad DF-(DC+DE)\cos ۴۵^\circ=۰ \quad , \quad DF=۱۰۰۰\ lb\ (\text{فشاری})\end{cases}$



گره E : $\begin{cases}\sum F_{x'}=۰ & : \quad EF-BE=۰ \quad , \quad EF=۷۰۷lb\ (\text{کششی}) \\ \sum F_{y'}=۰ & : \quad DE-AE=۰ \quad , \quad AE=۷۰۷lb\ (\text{کششی})\end{cases}$



۱۱-۴. نیرو در اعضای AB، BC و BD خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:

Scanned by CamScanner

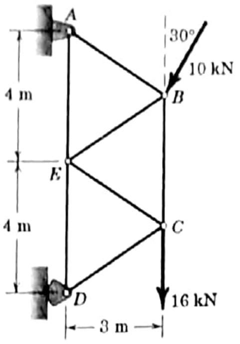
گره B : $\begin{cases}\sum F_y = 0 & : \quad BD = 0 \\ \sum F_x = 0 & : \quad AB - BC = 0 \end{cases}$, $AB = BC$

گره D : $\begin{cases}\sum F_y = 0 & : \quad AD\cos 45^\circ - DC\cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_x = 0 & : \quad L - (DC + AD)\sin 45^\circ = 0 \end{cases}$, $AD = DC$

$AD = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ (کششی) , $DC = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ (فشاری)

گره C : $\sum F_x = 0$: $DC\cos 45^\circ - BC = 0$, $BC = AB = \dfrac{L}{2}$ (کششی)

۴-۱۲. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. مثلث‌ها، متساوی‌الساقین‌اند.

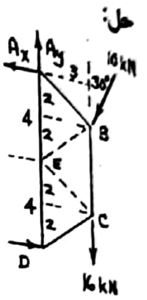


حل:

$\circlearrowright + \sum M_A = 0 : -10\cos 30^\circ(3) - 10\sin 30(2) - 16(3) + D(8) = 0$

$D = 10.5\ kN$

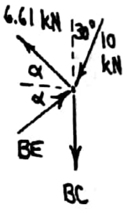
$\sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x - 10\left(\dfrac{1}{2}\right) + 10.5 = 0$, $A_x = 5.5\ kN$



$\sum F_y = 0 \quad : \quad -10\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 16 + A_y = 0$, $A_y = 24.7\ kN$

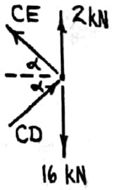
$\left(\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 33.7^\circ\right)$

گره A : $\begin{cases}\sum F_x = 0 & : \quad AB\cos 33.7^\circ - 5.5 = 0 \\ \sum F_y = 0 & : \quad 24.7 - AE - 6.61\sin 33.7^\circ = 0 \end{cases}$, $AB = 6.61\ kN$ (کششی) , $AE = 21\ kN$ (کششی)

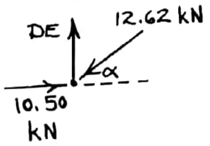


گره B : $\begin{cases}\sum F_x = 0 : -6.61\cos 33.7^\circ - 10\sin 30^\circ + BE\cos 33.7^\circ = 0 , & BE = 12.62\ kN \text{ (فشاری)} \\ \sum F_y = 0 : 6.61\sin 33.7^\circ - 10\cos 30^\circ + 12.62\sin 33.7^\circ - BC = 0 , & BC = 2\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

گره C : $\begin{cases}\sum F_x = 0 & : \quad -CE\cos\alpha + CD\cos\alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 & : \quad 2 - 16 + (CE + CE)\sin 33.7^\circ = 0 \end{cases}$, $CD = CE$

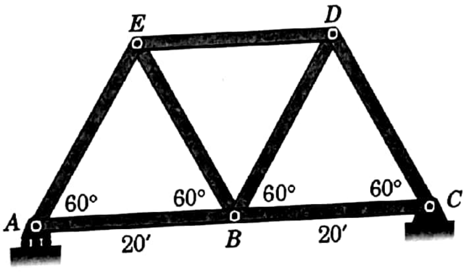


$CE = 12.62\ kN$ (کششی) , $CD = 12.62\ kN$ (فشاری)



گروه D : $\sum F_y = 0$: $DE - 12.62\sin 33.7^\circ = 0$, $DE = 7\ kN$ (کششی)

۴-۱۳. هر عضو خرپا، میله‌ای یکنواخت به طول $20\,ft$ و وزن $400\,lb$ است. با توجه به وزن اعضا، نیروی کششی یا فشاری در هر عضو را محاسبه کنید.

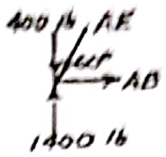


حل:

وزن خرپا $= 7(400) = 2800\,lb$

با توجه به تقارن $\rightarrow \quad A_y = C_y = 1400\,lb$

Scanned by CamScanner

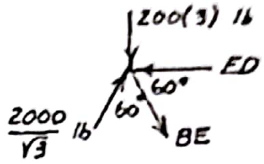


گره A :

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad AE\cos ۳۰^\circ + ۴۰۰ - ۱۴۰۰ = ۰ \quad , \quad AE = \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۳}} lb \text{ (فشاری)}$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad AB - \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۳}}\cos ۶۰^\circ = ۰ \quad , \quad AB = \frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۳}} lb \text{ (کششی)}$$

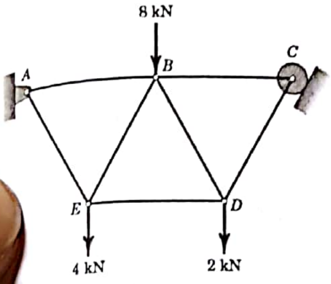
و با توجه به تقارن ← $BC = \frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۳}} lb(T)$, $CD = \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۳}} lb$ (فشاری)



گره E : $\sum F_y = ۰ \; : \; BE\sin ۶۰^\circ - \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۳}}\sin ۶۰^\circ + ۶۰۰ = ۰$, $BE = \frac{۸۰۰}{\sqrt{۳}} lb$ (کششی)

با توجه به تقارن ← $BD = \frac{۸۰۰}{\sqrt{۳}} lb$ (کششی)

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ED - \frac{۲۰۰۰}{\sqrt{۳}}\sin ۳۰^\circ - \frac{۸۰۰}{\sqrt{۳}}\sin ۳۰^\circ = ۰ \quad , \quad ED = \frac{۱۴۰۰}{\sqrt{۳}} lb \text{ (فشاری)}$$

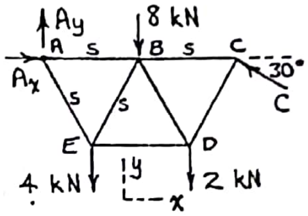


۴-۱۴. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. همه‌ی مثلث‌ها، متساوی‌الاضلاع هستند.

حل:

$$\circlearrowright + \sum M_A = ۰ \quad : \quad -۸s - ۴\frac{s}{۲} - ۲\frac{۳s}{۲} + C\frac{۱}{۲}(۲s) = ۰$$

$C = ۱۳ kN$



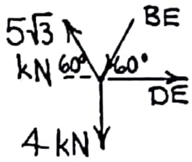
$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x - ۱۳\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰ \quad , \quad A_x = ۱۳\frac{\sqrt{۳}}{۲} kN$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad A_y + ۱۳\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۱۴ = ۰ \quad , \quad A_y = ۷/۵ kN$$

گره A :

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۷/۵ - AE\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰ \quad , \quad AE = ۵\sqrt{۳} kN \text{ (کششی)}$$

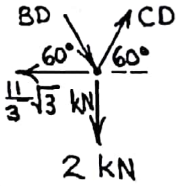
$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۱۳\frac{\sqrt{۳}}{۲} - AB + ۵\sqrt{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \quad , \quad AB = ۹\sqrt{۳} kN \text{ (فشاری)}$$



گره E :

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۵\sqrt{۳}\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۴ - B\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰ \quad , \quad BE = \frac{۷}{۳}\sqrt{۳} kN \text{ (فشاری)}$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۵\sqrt{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right) - \frac{۷}{۳}\sqrt{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right) + DE = ۰ , \quad DE = \frac{۱۱}{۳}\sqrt{۳} kN \text{ (کششی)}$$



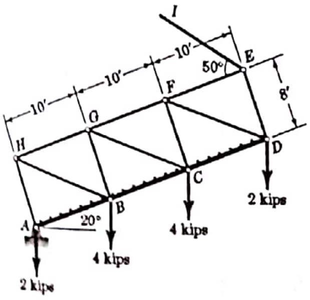
گره D :

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad BD\left(\frac{۱}{۲}\right) + CD\left(\frac{۱}{۲}\right) - \frac{۱۱}{۳}\sqrt{۳} = ۰$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -BD\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + CD\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) - ۲ = ۰$$

$CD = \frac{۱۳}{۳}\sqrt{۳} kN$ (کششی)

$BD = ۳\sqrt{۳} kN$ (فشاری)



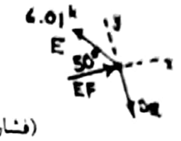
۴-۱۵. یک پل متحرک توسط کابل EI بلند شده است. مطابق شکل بار نهایی ناشی از وزن جاده به چهار گره وارد می‌شوند. نیرو در اعضای EF، DE، DF، CD و FG را تعیین کنید.

حل:

Scanned by CamScanner

$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : -۲\cos ۲۰^\circ \left(۱۰ + ۲۰ + \frac{۳۰}{۲}\right) + EI\cos ۵۰^\circ (۸) + EI \sin ۵۰^\circ (۲۰) = ۰$$

$EI = ۶/۰۱ kips$

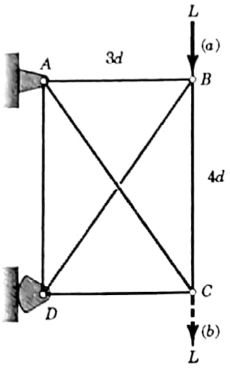


گره E :
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad EF - ۶/۰۱\cos ۵۰^\circ = ۰ \quad , \quad EF = ۳/۸۷ kips$ (فشاری)
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -DE + ۶/۰۱ \sin ۵۰^\circ = ۰ \quad , \quad DE = ۴/۶۱ kips$ (کششی)

گره D :
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۴/۶۱ - ۲\sin ۷۰^\circ + DF \sin ۳۸/۷^\circ = ۰ \quad , \quad DF = -۴/۳۷ kips$ (فشاری)
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۴/۳۷\cos ۳۸/۷^\circ - ۲\cos ۷۰^\circ + CD = ۰ \quad , \quad CD = -۲/۷۳ kips$ (کششی)

گره F : $\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۳/۸۷ - ۴/۳۷\cos ۳۸/۷^\circ + FG = ۰ \quad , \quad FG = ۷/۲۸ kips$ (فشاری)

۴-۱۶. یک قاب مستطیلی از چهار عضو محیطی و دو کابل AC و BD تشکیل شده است. اعضای محیطی دو نیرویی‌اند؛ در حالی که کابل‌ها فقط کشش را تحمل می‌کنند. نیروی تمامی اعضا را تعیین کنید: (الف) بار L در موقعیت (a) است و (ب) بار L در موقعیت (b) است.



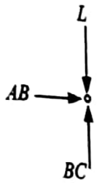
حل:

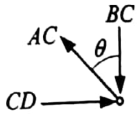
$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad D_x(۴d) - L(۳d) = ۰ \quad , \quad D_x = \frac{۳}{۴}L$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x = \frac{۳}{۴}L \quad , \quad \sum F_y = ۰ \quad : \quad A = L$$

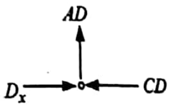
الف) در این حالت AC کششی و BD فشاری است: $BD = ۰$

گره B : $\sum F_x = ۰ \quad : \quad AB = ۰ \quad , \quad \sum F_y = ۰ \quad : \quad BC - L = ۰ \quad , \quad BC = L$ (کششی)



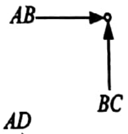


گره C :
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad AC\cos\theta - BC = ۰ \quad , \quad AC = \frac{۵}{۴}L$ (کششی)
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad CD - AC\sin\theta = ۰ \quad , \quad CD = \frac{۳}{۴}L$ (کششی)



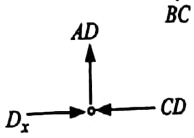
گره D : $\sum F_y = ۰ \quad , \quad AD = ۰$

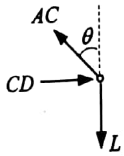
ب) در این حالت هم AC کششی و BD فشاری است: $BD = ۰$



گره B : $\sum F_x = ۰ \quad , \quad AB = ۰ \quad , \quad \sum F_y = ۰ \quad , \quad BC = ۰$

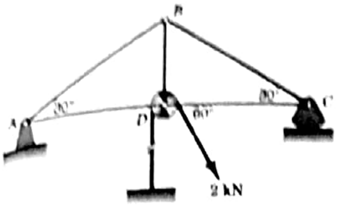
گره D : $\sum F_y = ۰ \quad , AD = ۰ \quad , \sum F_x = ۰ \quad , \quad D_x - CD = ۰ \; : CD = \frac{۳}{۴}L$ (کششی)





$$\sum F_y = ۰ \quad , \quad AC\cos\theta - L = ۰ \quad , \quad AC = \frac{۵}{۴}L \text{ (کششی)}$$

Scanned by CamScanner

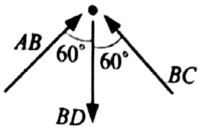


۴-۱۷. نیرو در هر عضو خرپا را تعیین کنید.

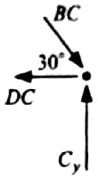
حل:

گره D : $\begin{cases} \sum F_x = 0 : DC + 2\cos 60^\circ - AD = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 : BD - 2 - 2\sin 60^\circ = 0 , & BD = 3.73\,kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

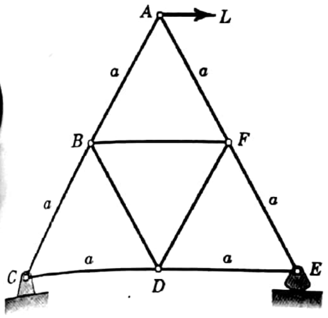
گره B : $\begin{cases} \sum F_x = 0 : AB = BC \\ \sum F_y = 0 : AB\cos 60^\circ + BC\cos 60^\circ - BD = 0 \end{cases}$ $\{AB = BC = 3.73\,kN$ (فشاری)



گره C : $\sum F_x = 0 \quad : \quad BC\cos 30^\circ - DC = 0 \quad , \quad DC = 3.23\,kN$ (کششی)



$(1) \Rightarrow \quad AD = 3.23 + 2\cos 60^\circ = 4.23\,kN$ (کششی)

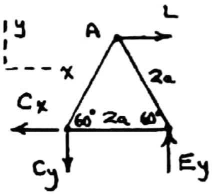


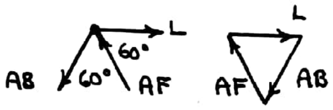
۴-۱۸. مطابق شکل یک خرپا با زوایای مساوی بارگذاری شده است. اگر بار L به صورت افقی وارد شود، نیرو در تمامی اعضا را تعیین کنید.

حل:

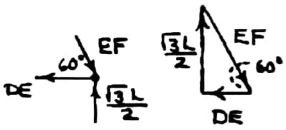
$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad : \quad L(2a\sin 60^\circ) - E_y(2a) = 0 \quad , \quad E_y = \frac{\sqrt{3}}{2}L$

$\sum F_x \; , \; \sum F_y = 0 \quad : \quad C_x = L \quad , \quad C_y = \frac{\sqrt{3}}{2}L$



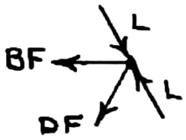


گره A : $AB = L$ (کششی) ، $AF = L$ (فشاری)



گره E : $EF = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{\cos 30^\circ} = L$ (فشاری)

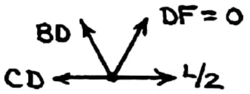
$DE = EF\sin 30^\circ = \dfrac{L}{2}$ (کششی)



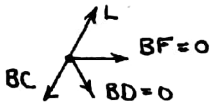
گره F : $\sum \mathbf{F} = 0 \quad : \quad BF = DF = 0$

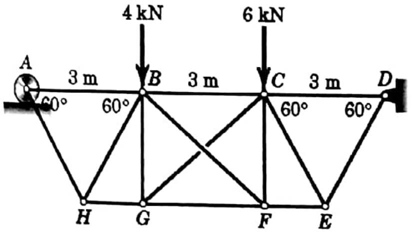
گره D : $\sum F_y = 0 \quad : \quad BD = 0$

$\sum F_x = 0 \quad : \quad CD = \dfrac{L}{2}$ (کششی)



گره B : $\sum \mathbf{F} = 0 \quad : \quad BC = L$ (کششی)





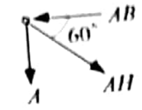
۴-۱۹. نیرو در اعضای AB، BH و BG را تعیین کنید. اعضای BF و CG، کابل‌هایی هستند که فقط نیروی کششی تحمل می‌کنند.

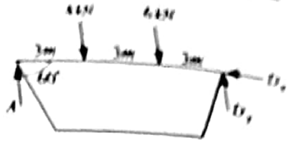
حل:

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \quad : \quad 6(3) + 4(6) - A(9) = 0 \quad , \quad A = 4.67\,kN$

$\sum F_y = 0 \quad : \quad D_y = 5.33\,kN \quad , \quad \sum F_x = 0 \quad : \quad D_x = 0$

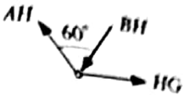
Scanned by CamScanner





گره A : $\sum F_y = ۰$: $A - AH\sin ۶۰° = ۰$, $AH = ۵/۲۹ kN$ (کششی)

$\sum F_x = ۰$: $AH\cos ۶۰° - AB = ۰$, $AB = ۲/۶۹ kN$ (فشاری)

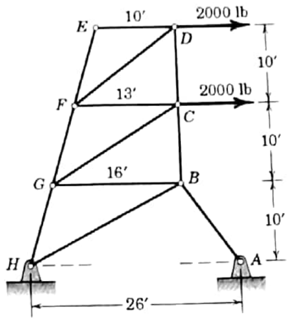


گره H : $\sum F_y = ۰$: $AH = BH$, $BH = ۵/۲۹ kN$ (فشاری)

کابل CG در فشار است بنابراین: $CG = ۰$

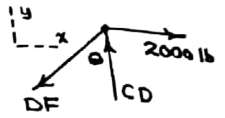
گره G : $\sum F_y = ۰$: $BG = ۰$

۲۰-۴. نیرو در اعضای CG، CF و EF از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:

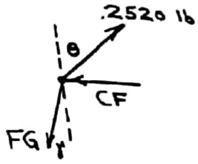
گره E : $DE = EF = ۰$



گره D : $\left(\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{۱۳}{۱۰}\right) = ۵۲/۴°\right)$

$\sum F_x = ۰$: $DF\sin\theta - ۲۰۰۰ = ۰$, $DF = ۲۵۲۰ lb$ (کششی)

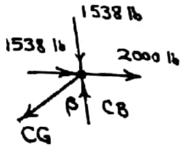
$\sum F_y = ۰$: $CD - ۲۵۲۰\cos\theta = ۰$, $CD = ۱۵۲۸ lb$ (فشاری)



گره F : $\left(\gamma = \tan^{-۱}\left(\frac{۳}{۱۰}\right) = ۱۶/۷°\right)$

$\sum F_y = ۰$: $۲۵۲۰\cos\theta - FG\cos\gamma = ۰$, $FG = ۱۶۰۶ lb$ (کششی)

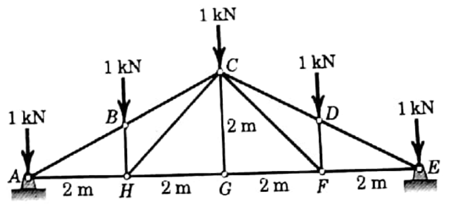
$\sum F_x = ۰$: $۲۵۲۰\sin\theta - CF - ۱۶۰۶\sin\gamma = ۰$, $CF = ۱۵۲۸ lb$ (فشاری)



گره C : $\left(\beta = \tan^{-۱}\left(\frac{۱۶}{۱۰}\right) = ۵۸°\right)$

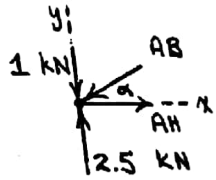
$\sum F_x = ۰$: $۱۵۲۸ + ۲۰۰۰ - CG\sin\beta = ۰$, $CG = ۴۱۷۰ lb$ (کششی)

۲۱-۴. مطابق شکل، نیروهایی ناشی از برف به گره‌های بـالایی یـک خرپای سقف وارد می‌شود. عکس‌العمل‌های افقی را نادیده بگیرید و نیرو در تمامی اعضا را به دست آورید.



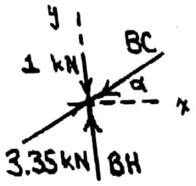
حل:

با توجه به تقارن : $A = E = ۲/۵ kN$, $\alpha = \tan^{-۱}\left(\frac{۲}{۴}\right) = ۲۶/۶°$



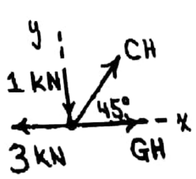
گره A : $\sum F_y = ۰$: $۲/۵ - ۱ - AB\sin\alpha = ۰$, $AB = ۳/۳۵ kN$ (فشاری)

$\sum F_x = ۰$: $-۳/۳۵\cos\alpha + AH = ۰$, $AH = ۳ kN$ (کششی)



گره B : $\sum F_x = ۰$: $۳/۳۵\cos\alpha - BC\cos\alpha = ۰$, $BC = ۳/۳۵ kN$ (فشاری)

$\sum F_y = ۰$: $-۱ + (۳/۳۵ - ۳/۳۵)\sin\alpha + BH = ۰$, $BH = ۱ kN$ (فشاری)



گره H : $\sum F_y = ۰$: $-۱ + CH\sin ۴۵° = ۰$, $CH = ۱/۴۱۴ kN$ (کششی)

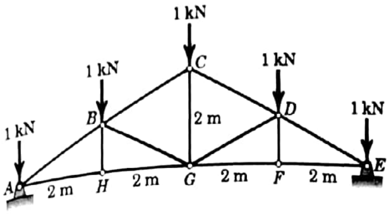
$\sum F_x = ۰$: $-۳ + ۱/۴۱۴\cos ۴۵° + GH = ۰$, $GH = ۲ kN$ (کششی)

گره G → $\sum F_y = ۰$: $CG = ۰$

Scanned by CamScanner

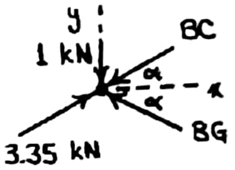
با توجه به تقارن $\Rightarrow$
$$\begin{cases} DE = AB = ۳/۳۵\ kN \text{ (فشاری)} \\ CD = BC = ۳/۳۵\ kN \text{ (فشاری)} \\ EF = AH = ۳\ kN \text{ (کششی)} \\ DF = BH = ۱\ kN \text{ (فشاری)} \\ CF = CH = ۱/۴۱۴\ kN \text{ (کششی)} \\ FG = GH = ۲\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$$

۴-۲۲. بارگذاری مسئله ۲۱ به خرپای سقف نشان داده شده، وارد می‌شود. عکس‌العمل‌های افقی را نادیده گرفته و نیرو در تمامی اعضا را به دست آورید. جواب را با نتایج مسئله‌ی ۲۱ مقایسه کنید.



حل:

با توجه به تقارن : $A = E = ۲/۵kN$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۲}{۴}\right) = ۲۶/۶°$

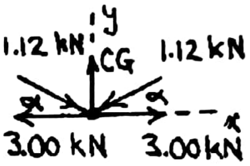


گره A $\Rightarrow$ با استدلالی شبیه مسئله ۲۱ $\rightarrow$ $\begin{cases} AB = ۳/۳۵kN \text{ (فشاری)} \\ AH = ۳\ kN \text{ (کششی)} \end{cases}$

با بررسی خرپا $\Rightarrow$ $BH = ۰$, $GH = AH$

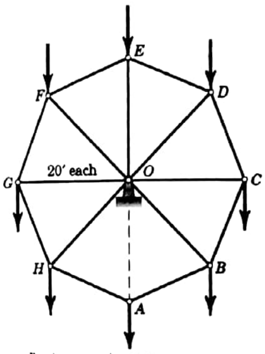
گره B : $\sum F_y = ۰$: $-۱ + ۳/۳۵\sin\alpha + BG\sin\alpha - BC\sin\alpha = ۰$
$\sum F_x = ۰$: $۳/۳۵\cos\alpha - BC\cos\alpha - BG\cos\alpha = ۰$

گره G : $\sum F_y = ۰$: $CG - ۲(۱/۱۲)\sin\alpha = ۰$, $CG = ۱\ kN$ (کششی)



با توجه به تقارن $\Rightarrow$
$$\begin{cases} DE = AB = ۳/۳۵\ kN \text{ (فشاری)} \\ CD = BC = ۲/۲۴\ kN \text{ (فشاری)} \\ EF = AH = ۳\ kN \text{ (کششی)} \\ DF = BH = ۰ \\ FG = GH = ۳\ kN \text{ (کششی)} \\ DG = BG = ۱/۱۱۸\ kN \text{ (فشاری)} \end{cases}$$

۴-۲۳. یک چرخ فلک کوچک از دو خرپای مشابه ساخته شده که یکی از آنها نشان داده شده است. عضو AO موقتاً برای جایگزینی برداشته شده است. مطابق شکل، چنانچه به هر گره نیرویی معادل $۱۰۰lb$، ناشی از وزن صندلی‌ها و اعضای سازه‌ای، وارد شود، نیرو در هر عضو سازه را تعیین کنید. در صورت جایگزینی عضو AO، آیا می‌توانید این تحلیل را تکرار کنید؟

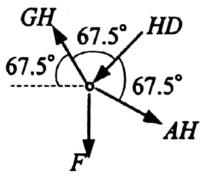


نیروی عمودی 100-lb وارده بر هر اتصال

حل:

گره A : $\begin{cases} \sum F_x = ۰ & : AB = AH \\ \sum F_y = ۰ & : ۲AB\cos ۶۷/۵° - F = ۰ \end{cases}$ $AB = AH = ۱۳۰/۷lb$ (کششی)

گره H : $\begin{cases} \sum F_x = ۰ & : AH\cos ۲۲/۵° - HO\cos ۴۵° - GH\cos ۶۷/۵° = ۰ \\ \sum F_y = ۰ & : GH\sin ۶۷/۵° - HO\sin ۴۵° - AH\sin ۲۲/۵° - F = ۰ \end{cases}$



$\Rightarrow$ $HO = ۵۸/۶\ lb$ (فشاری) , $GH = ۲۰۷\ lb$ (کششی)

به همین ترتیب با نوشتن معادلات تعادل $\begin{cases} \sum F_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \end{cases}$ برای هر گره به ترتیب F، G و E مجهولات موردنظر به دست خواهند آمد:

Scanned by CamScanner

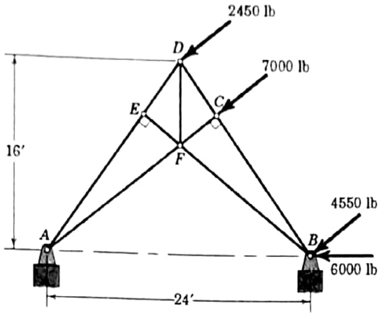
گره G : $OG = ۲۰۰\ lb$ (فشاری) ، $FG = ۲۱۵\ lb$ (کششی)

گره F : $FO = ۲۲۱\ lb$ (فشاری) ، $EF = ۲۹۲\ lb$ (کششی)

گره E : $EO = ۲۰۰\ lb$ (فشاری)

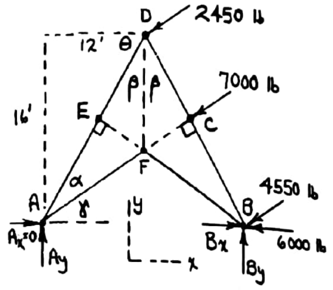
با توجه به تقارن $\Rightarrow$

$BO = HO = ۵۸٫۶\ lb$ (فشاری)
$BC = GH = ۲۰۷\ lb$ (کششی)
$OC = OG = ۲۰۰\ lb$ (فشاری)
$CD = FG = ۲۱۵\ lb$ (کششی)
$DO = FO = ۲۴۱\ lb$ (فشاری)
$DE = EF = ۲۹۲\ lb$ (کششی)



۴-۲۴. در تحلیل نیروی باد روی یک کلیسای کوچک در هاوایی، که در طوفان اینیکی در سال ۱۹۹۲ تجربه‌ی بادهایی با سرعت ۱۶۵ mi/hr را دارد، مطابق شکل نیروهایی به پنل‌های سقف خرپا وارد می‌شود. سازه را یک خرپای متقارن ساده درنظر گرفته و از مؤلفه‌ی افقی عکس‌العمل A صرف‌نظر کنید. عضوی از سازه که بیشترین نیرو را تحمل می‌کند و مقدار آن و کششی فشاری بودن آن را مشخص کنید.

حل:



$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۱۶}{۱۲}\right) = ۵۳٫۱^\circ$

$\beta = ۹۰ - \theta = ۳۶٫۹^\circ$

$\alpha = ۹۰ - ۲\beta = ۱۶٫۲۶^\circ$

$\gamma = ۹۰ - (۹۰ - \theta) - \alpha = ۳۶٫۹^\circ$

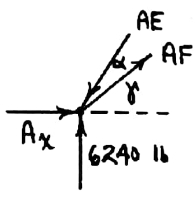
$\overline{CD} = ۲۰ \sin\alpha = ۵٫۶\ ft$ ، $\overline{CB} = ۲۰ - \overline{CD} = ۱۴٫۴\ ft$

$\circlearrowright + \sum M_B = ۰$: $۷۰۰۰(۱۴٫۴) + ۲۴۵۰(۲۰) - ۲۴A_y = ۰$ ، $A_y = ۶۲۴۰\ lb$

$\sum F_y = ۰$: $B_y + ۶۲۴۰ - (۲۴۵۰ + ۷۰۰۰ + ۴۵۵۰)\sin ۳۶٫۹^\circ = ۰$ ، $B_y = ۲۱۶۰\ lb$

$\sum F_x = ۰$: $B_x - (۲۴۵۰ + ۷۰۰۰ + ۴۵۵۰)\cos ۳۶٫۹^\circ - ۶۰۰۰ = ۰$ ، $B_x = ۱۷۲۰۰\ lb$

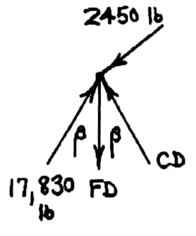
گره A :
$\sum F_x = ۰$: $-AE\cos ۵۳٫۱^\circ + AF\cos ۳۶٫۹^\circ = ۰$
$\sum F_y = ۰$: $۶۲۴۰ - AE\sin ۵۳٫۱^\circ + AF\sin ۳۶٫۹^\circ = ۰$



$AF = ۱۳۳۸۰\ lb$ (کششی) ، $AE = ۱۷۸۳۰\ lb$ (فشاری)

از گره E : $ED = AE = ۱۷۸۳۰\ lb$ (فشاری)

گره D : $\sum F_x = ۰$: $۱۷۸۳۰\sin ۳۶٫۹^\circ - CD\sin ۳۶٫۹^\circ - ۲۴۵۰\cos ۳۶٫۹^\circ = ۰$

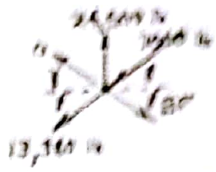


$CD = ۱۴۵۷۰\ lb$ (فشاری)

$\sum F_y = ۰$: $(۱۴۵۷۰ + ۱۷۸۳۰)\cos ۳۶٫۹^\circ - FD - ۲۴۵۰\sin ۳۶٫۹^\circ = ۰$

$FD = ۲۴۵۰۰\ lb$ (کششی)

Scanned by CamScanner

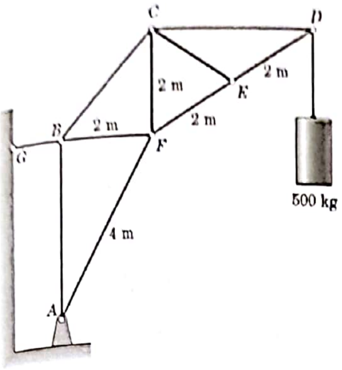


گره F : $\Sigma F_x = ۰$: $BF\cos ۳۶{,}۹° - (۱۲۲۸۰ + ۷۰۰۰)\cos ۳۶{,}۹° = ۰$

$BF = ۲۰۲۰۰\ lb$ (کششی)

بیشترین نیرو : $FD = ۲۲۵۰۰\ lb$ (کششی)

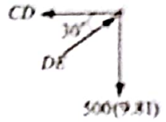
۲۵-۴. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



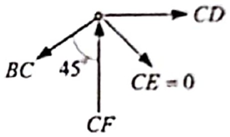
حل:

گره E : $\Sigma F = ۰$: $CE = ۰$ ، $DE = EF$

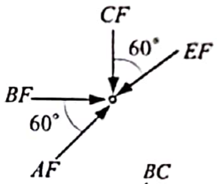
$\Sigma M_A = ۰$: $۵۰۰(۹{,}۸۱)(۲ + ۴\sin ۶۰) - BG(۴\sin ۶۰) = ۰$ ، $BG = ۷{,}۷۲۴ kN$



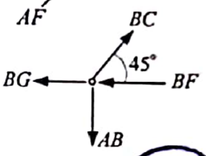
گره D :
$\Sigma F_y = ۰$: $DE\sin ۳۰° - ۴{,}۹۵ = ۰$ ، $DE = ۹{,}۸۱ kN$ (فشاری)
$\Sigma F_x = ۰$: $DE\cos ۳۰° - CD = ۰$ ، $CD = ۸{,}۵ kN$ (کششی)



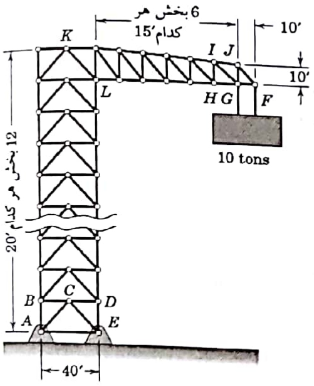
گره C :
$\Sigma F_x = ۰$: $CD - BC\sin ۴۵° = ۰$ ، $BC = ۱۲{,}۰۱\ kN$ (کششی)
$\Sigma F_y = ۰$: $CF - BC\cos ۴۵° = ۰$ ، $CF = ۸{,}۵\ kN$ (فشاری)



گره F :
$\Sigma F_y = ۰$: $AF\sin ۶۰° - CF - EF\cos ۶۰° = ۰$ ، $AF = ۱۵{,}۴۷\ kN$ (فشاری)
$\Sigma F_x = ۰$: $BF + AF\cos ۶۰° - EF\sin ۶۰° = ۰$ ، $BF = ۰{,}۷۵۹\ kN$ (فشاری)



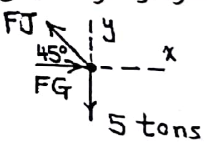
گره B : $\Sigma F_y = ۰$: $BC\sin ۴۵° - AB = ۰$ ، $AB = ۸{,}۵\ kN$ (کششی)



۲۶-۴. سازه‌ای به طول $۲۴۰ ft$ برای تأمین سرویس‌های حمایتی برای راه‌اندازی وسایل نقلیه قبل از بلند کردن استفاده می‌شود. در یک آزمایش وزنه‌ای ۱۰ تنی از گره‌های G و F آویزان شده است، بـه طوری کـه وزنـش مساوی بین دو گره تقسیم شده است. نیروی عضوهای GJ و GI را تعیین کنید. راه‌حل شما برای تحلیل عضوهای سازه‌ی قائم، نظیر AB یا KL چه خواهد بود؟

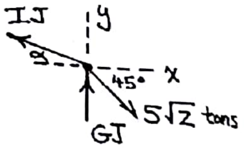
حل:

سازه از نظر استاتیکی نامعین است، عضو AE در پایه‌ی سازه‌ی قائم نیز نامعین است.



گره F :
$\Sigma F_y = ۰$: $FJ\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} - ۵ = ۰$ ، $FJ = ۵\sqrt{۲}\ tons$ (کششی)
$\Sigma F_x = ۰$: $FG - ۵\sqrt{۲}\left(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰$ ، $FG = ۵ tons$ (فشاری)

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{۱۰}{۹۰}\right) = ۶{,}۳۴°$

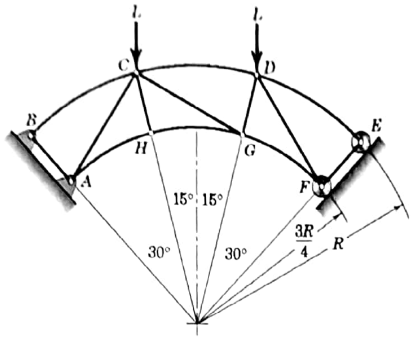


گره J :
$\Sigma F_x = ۰$: $-IJ\cos\alpha + ۵\sqrt{۲}\left(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰$ ، $IJ = ۵{,}۰۳\ tons$ (کششی)
$\Sigma F_y = ۰$: $۵{,}۰۳\sin\alpha - ۵\sqrt{۲}\left(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + GJ = ۰$ ، $GJ = ۴{,}۴۴ tons$ (فشاری)

گره G : $\beta=\tan^{-1}\left(\frac{۱۱/۶۷}{۱۵}\right)=۳۷/۹^\circ$

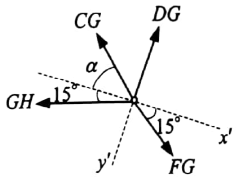
$\sum F_y=۰ \quad : \quad -۵-۴/۴۴+GI\sin\beta=۰ \quad , \quad GI=۱۵/۳۸tons$ (کششی)

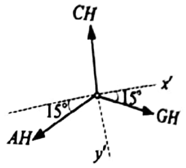
۴-۲۷. نیرو در عضو CG از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. فرض کنید چهار عکس‌العمل خارجی در A، B، E و F از نظر مقدار مساوی بوده و راستای آنها بر سطوح تکیه‌گاه‌هایشان عمود است.



حل:

فرض کنید نیروی داخلی عضو FG، R باشد: پس با توجه به شباهت گره F با گره A و یکسان بودن عکس‌العمل‌ها، نیروی داخلی عضو AH نیز R خواهد بود.





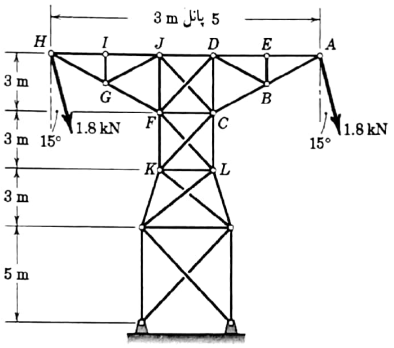
گره H : $\sum F_{x'}=۰ \;:\; AH=GH=R=FG$

گره G : $\sum F_{x'}=۰ \;:\; FG\cos۱۵^\circ-GH\cos۱۵^\circ-CG\cos\alpha=۰$

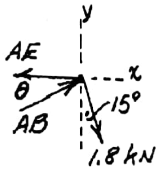
$(FG=GH) \Rightarrow CG\cos\alpha=۰$

$\cos\alpha\neq۰ \quad , \quad CG=۰$

۴-۲۸. مطابق شکل سازه‌ی مربوط به یک دکل انتقال قدرت با یک خرپا مدل‌سازی شده است. فرض کنید اعضای قطری در قسمت مرکزی خرپا فقط نیروی کششی تحمل می‌کنند. به ازای بارهای اعمالی $۱/۸kN$ در صفحه‌ی قائم، نیرو در اعضای AB، DB و CD را حساب کنید.



حل:

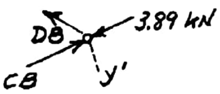


$\theta=\tan^{-1}\frac{۱}{۲}=۲۶/۶^\circ$

گره A :

$\sum F_y=۰ \quad : \quad AB\sin۲۶/۶^\circ-۱/۸\cos۱۵^\circ=۰ \quad , \quad AB=۳/۸۹kN$ (فشاری)

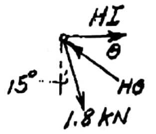
$\sum F_x=۰ \quad : \quad AE=۱/۸\sin۱۵^\circ+۳/۸۹\cos\theta=۳/۹۴kN$ (کششی)



گره E : $EB=۰$

گره B : $\sum F_{y'}=۰ \quad : \quad BD=۰ \quad , \quad CB=۳/۸۹kN$ (فشاری)

بدون درنظر گرفتن اعضای قطری، FD بلندتر شده و CJ کوتاه‌تر می‌شود بنابراین: $CJ=۰$

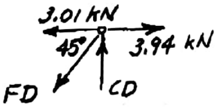


گره H :

$\sum F_y=۰ \quad : \quad HG\sin۲۶/۶^\circ-۱/۸\cos۱۵^\circ=۰ \quad , \quad HG=۳/۸۹kN$ (فشاری)

$\sum F_x=۰ \quad : \quad HI+۱/۸\sin۱۵^\circ-۳/۸۹\cos۲۶/۶^\circ=۰ \quad , \quad HI=۳/۰۱kN$ (کششی)

$IG=GJ=JC=۰ \quad , \quad JD=HI$

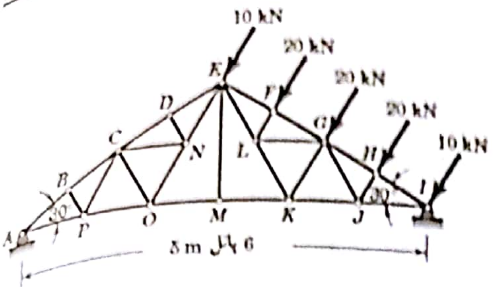


گره D :

$\sum F_x=۰ \quad : \quad FD\cos۴۵^\circ+۳/۰۱=۳/۹۴ \quad , \quad FD=۱/۳۱۸kN$ (کششی)

$\sum F_y=۰ \quad : \quad CD=۱/۳۱۸\sin۴۵^\circ=۰/۹۳۲kN$ (فشاری)

Scanned by CamScanner



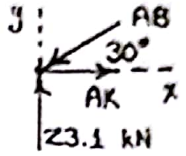
۲۹-۴. نیرو در اعضای EF، KL و GL از خرپای فینک مورد نظر را بیابید.

حل:

$\sum M_I = ۰ \quad : \quad ۲۰A - ۰/۸۶۶[۲۰(۵+۱۰+۱۵)+۱۰(۲۰)] = ۰$

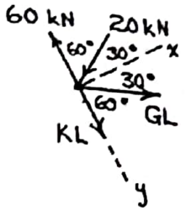
$A = ۲۳/۱\ kN$

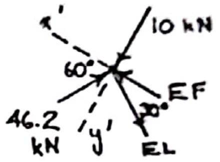
اعضای صفر نیرویی: BP، PC، DN، CN، CO، ON، NE و EM



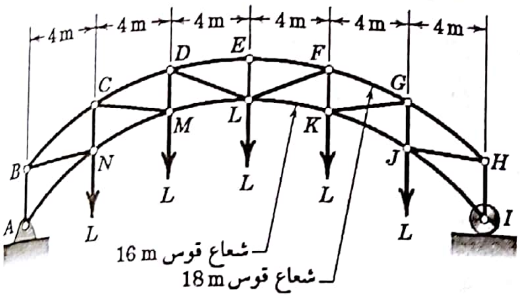
گره A : $\sum F_y = ۰ \quad : \quad -۰/۵AB + ۲۳/۱ = ۰ \quad , \quad AB = ۴۶/۲kN$ (فشاری) ، $DE = AB$

گره E :
$\sum F_{y'} = ۰ \quad : \quad ۰/۵EL + ۱۰ - ۰/۸۶۶(۴۶/۲) = ۰ \quad , \quad EL = ۶۰kN$ (کششی)
$\sum F_{x'} = ۰ \quad : \quad EF - ۶۰(۰/۸۶۶) - ۴۶/۲(۰/۵) = ۰ \quad , \quad EF = ۷۵/۱\ kN$ (فشاری)





گره L :
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۲۰\cos ۳۰° + GL\cos ۳۰° = ۰ \quad , \quad GL = ۲۰kN$ (کششی)
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad KL - ۶۰ + ۲۰(۰/۵) + ۲۰(۰/۵) = ۰ \quad , \quad KL = ۴۰\ kN$ (کششی)



۳۰-۴. نیرو در عضو CM از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:

با توجه به تقارن : $A_y = I_y = ۲/۵L \quad , \quad A_x = ۰$

گره A : $AN = ۰$

مبدأ مختصات در مرکز دو کمان:

N مختصات : $x^۲ + y^۲ = ۱۶^۲ \quad , \quad x_N = -۸m$

$y_N^۲ = ۱۶^۲ - ۸^۲ \quad , \quad y_N = ۱۳/۸۶m \quad , \quad N = (-۸,۱۳/۸۶)m$

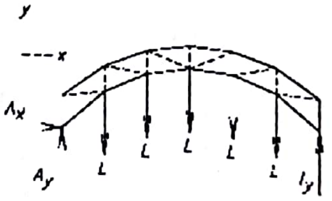
A مختصات : $y_A^۲ = ۱۶^۲ - ۱۲^۲ \quad , \quad y_A = ۱۰/۵۸m \quad , \quad A = (-۱۲,۱۰/۵۸)m$

B مختصات : $y_B^۲ = ۱۸^۲ - ۱۲^۲ \quad , \quad y_B = ۱۳/۴۲m \quad , \quad B = (-۱۲,۱۳/۴۲)m$

C مختصات : $y_C^۲ = ۱۸^۲ - ۸^۲ \quad , \quad y_C = ۱۶/۱۲m \quad , \quad C = (-۸,۱۶/۱۲)m$

D مختصات : $y_D^۲ = ۱۸^۲ - ۴^۲ \quad , \quad y_D = ۱۷/۵۵m \quad , \quad D = (-۴,۱۷/۵۵)m$

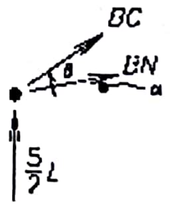
M مختصات : $y_M^۲ = ۱۶^۲ - ۴^۲ \quad , \quad y_M = ۱۵/۴۹m \quad , \quad M = (-۴,۱۵/۴۹)m$



گره B :

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{۱۳/۸۶ - ۱۳/۴۲}{-۸+۱۲} = ۶/۲۸°$$

$$\beta = \tan^{-۱}\frac{۱۶/۱۲ - ۱۳/۴۲}{-۸+۱۲} = ۳۴/۱°$$

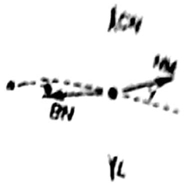


$$\left\{\begin{array}{l} \sum F_x = ۰ \quad : \quad BC\cos ۳۴/۱° + BN\cos ۶/۲۸° = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \quad : \quad ۲/۵L + BC\sin ۳۴/۱° + BN\sin ۶/۲۸° = ۰ \end{array}\right\}$$

$BN = ۴/۴۴L$ (کششی)
$BC = -۵/۳۲L$ (فشاری)

Scanned by CamScanner

گره N : $\gamma = \tan^{-1}\dfrac{۱۵/۴۹-۱۳/۸۶}{-۴+۸} = ۲۲/۲^\circ$

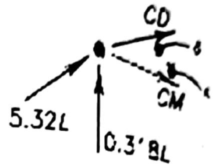


$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ : & -۴/۲۲L\cos ۶/۲۸^\circ + NM\cos ۲۲/۲^\circ = ۰ \quad , \quad NM = ۴/۷۶L \text{ (کششی)} \\ \sum F_y = ۰ : & -۴/۲۲L\sin ۶/۲۸^\circ + ۴/۷۶\sin ۲۲/۲^\circ + CN - L = ۰ \ , \ CN = ۰/۳۱۸L \text{ (فشاری)} \end{cases}$$

گره C :

$$\delta = \tan^{-1}\frac{۱۷/۵۵-۱۶/۱۲}{-۴+۸} = ۱۹/۶۱^\circ$$

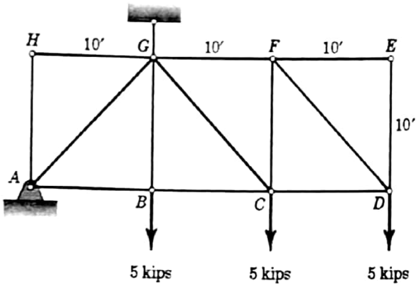
$$\varepsilon = \tan^{-1}\frac{۱۶/۱۲-۱۵/۴۹}{۸-۴} = ۸/۹۹^\circ$$



$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ : & ۵/۳۲L\cos ۳۴/۱^\circ + CD\cos ۱۹/۶۱^\circ + CM\cos ۸/۹۹^\circ = ۰ \\ \sum F_y = ۰ : & ۵/۳۲L\sin ۳۴/۱^\circ + ۰/۳۱۸L + CD\sin ۱۹/۶۱^\circ - CM\sin ۸/۹۹^\circ = ۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad CM = ۲/۴۱L$ (کششی)

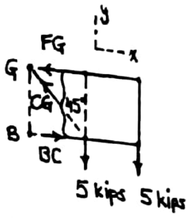
۴-۳۱. نیرو در عضو CG را تعیین کنید.



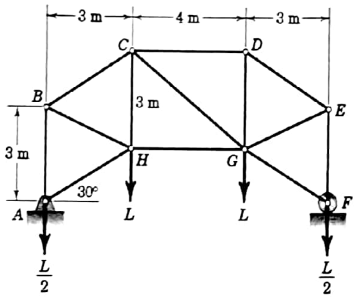
حل:

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad CG\sin ۴۵^\circ - ۵ - ۵ = ۰$

$CG = ۱۴/۱۴\,kips$ (کششی)



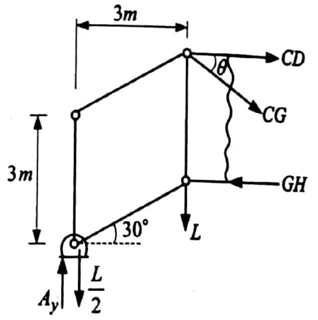
۴-۳۲. نیرو در اعضای CG و GH از خرپای متقارن بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x = ۰$

به علت تقارن : $A_y = F_y = ۱/۵L$



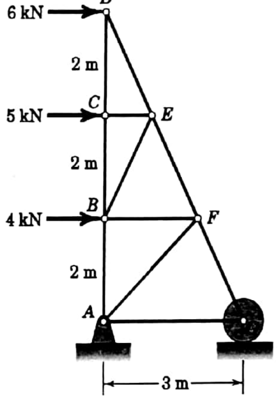
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad CG = ۰$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad CD - GH = ۰ \quad , \quad CD = GH$

$+\circlearrowright \sum M_A = ۰ \quad : \quad GH(۱/۵) - CD(۴/۵) - L(۳) = ۰$

$۳GH = -۳L \quad , \quad GH = L$ (کششی)

۴-۳۳. نیرو در عضو BE از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

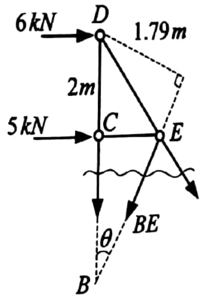


حل:

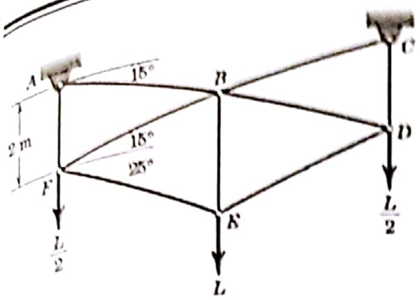
$\theta = \tan^{-1}\dfrac{۱}{۲}$

$+\circlearrowright \sum M_D = ۰ \quad : \quad ۵(۲) - BE(۱/۷۹) = ۰$

$BE = ۵/۵۹\,kN$ (کششی)



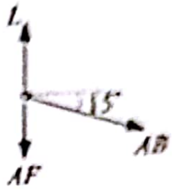
Scanned by CamScanner



۴-۳۴. نیرو در عضو EF از خرپای متقارن بارگذاری شده را تعیین کنید. فرض کنید تکیه‌گاه‌های A و C، عکس‌العمل افقی ندارند.

حل:

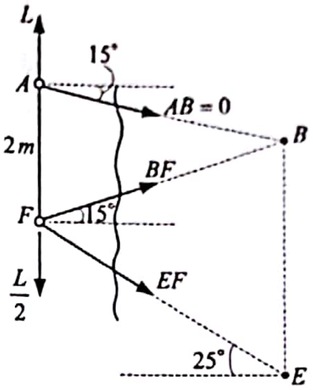
با توجه به تقارن : $A_y = C_y = L$

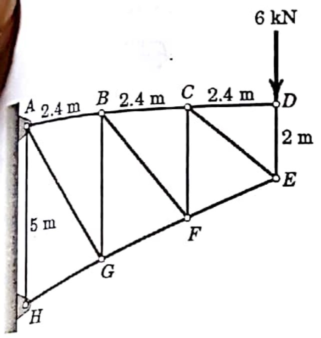


گره A :
$$\sum F_x = ۰ \quad : AB = ۰$$
$$\sum F_y = ۰ \quad : L - AF = ۰ \ , \ AF = L \ (\text{کششی})$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ & : \quad BF\cos ۱۵° + EF\cos ۲۵° = ۰ \\ \sum F_y = ۰ & : \quad L + BF\sin ۱۵° - \frac{L}{۲} - EF\sin ۲۵° = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad EF = ۰/۷۵۱L \ (\text{کششی})$$

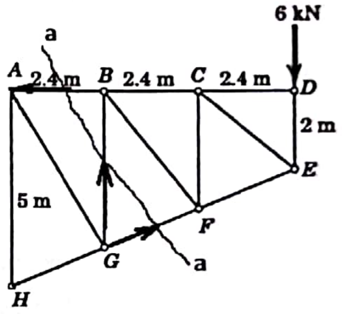




۴-۳۵. نیرو در اعضای AB، BG و GF را محاسبه کنید. هر نیرو را توسط یک معادله‌ی تعادل به دست آورید، به گونه‌ای که نیروی مورد نظر تنها مجهول معادله باشد.

حل:

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{۷/۲}{۳}$$

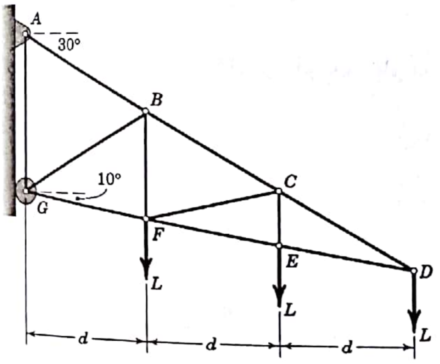


$$\sum M_B = ۰ \quad : \quad ۶(۲)(۲/۴) - GF(۴\sin\theta) = ۰ \quad , \quad GF = ۷/۸kN \ (\text{فشاری})$$

$$\sum M_G = ۰ \quad : \quad ۶(۲)(۲/۴) - AB(۴) = ۰ \quad , \quad AB = ۷/۲kN \ (\text{کششی})$$

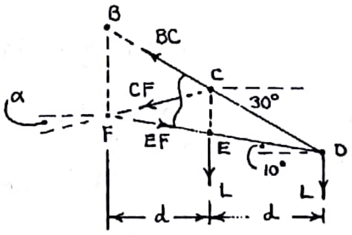
O : محل تقاطع AB و GF

$$\sum M_O = ۰ \quad : \quad BG(۴)(۲/۴) - ۶(۲)(۲/۴) = ۰ \quad , \quad BG = ۳kN \ (\text{فشاری})$$



۴-۳۶. نیرو در اعضای BC، CF و EF از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:



$$\overline{CE} = d\tan ۳۰° - d\tan ۱۰° = ۰/۴۰۱d$$

$$\overline{BF} = ۲\overline{CE} = ۰/۸۰۲d$$

Scanned by CamScanner

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{۰/۲۰۱d-d\tan ۱۰^\circ}{d}\right)=۱۲/۶۶^\circ$$

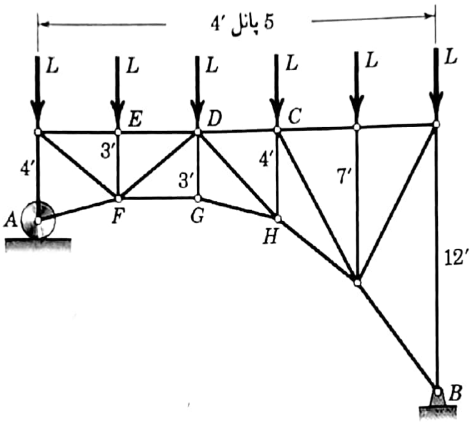
$\circlearrowright + \sum M_C=۰ \quad : \quad -Ld+EF\cos ۱۰^\circ(۰/۴۰۱d)=۰ \quad , \quad EF=۲/۵۴L$ (فشاری)

$\circlearrowright + \sum M_F=۰ \quad : \quad -Ld-L(۲d)+BC\cos ۲۰^\circ(۰/۸۰۲d)=۰ \quad , \quad BC=۴/۳۲L$ (کششی)

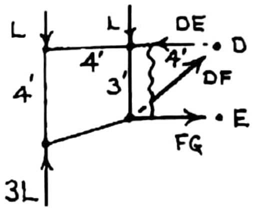
$\circlearrowright + \sum M_D=۰ \quad : \quad Ld+CF\cos ۱۲/۶۶^\circ(d\tan ۳۰^\circ)+CF\sin ۱۲/۶۶^\circ(d)=۰$

$CF=-۱/۲۷۸L$ یا $CF=۱/۲۷۸L$ (فشاری)

۴-۳۷. نیرو در عضو DG از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

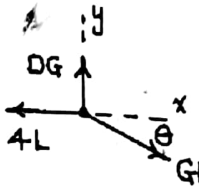


حل:



$\circlearrowright + \sum M_D=۰ \quad : \quad FG(۳)+L(۴+۸)-۳L(۸)=۰$

$FG=۴L$ (کششی)

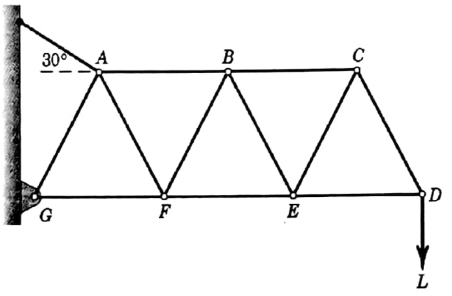


گره G : $\theta=\tan^{-1}\frac{۱}{۴}=۱۴/۴^\circ$

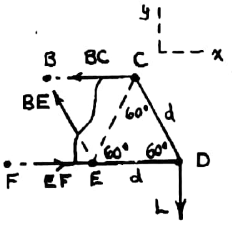
$\sum F_x=۰ \quad : \quad -۴L+GH\cos\theta=۰ \quad , \quad GH=۴/۱۲L$ (کششی)

$\sum F_y=۰ \quad : \quad DG-۴/۱۲L\sin\theta=۰ \quad , \quad DG=L$ (کششی)

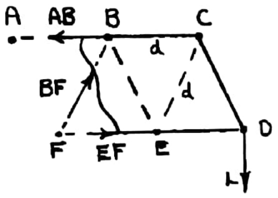
۴-۳۸. نیرو در اعضای BE، BC و BF از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند.



حل:



$\sum F_y=۰ \quad : \quad BE\sin ۶۰^\circ-L=۰ \quad , \quad BE=\frac{۲L}{\sqrt{۳}}$ (کششی)



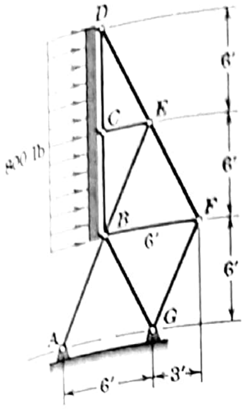
$\circlearrowright + \sum M_E=۰ \quad : \quad BC(d\cos ۳۰^\circ)-Ld=۰ \quad , \quad BC=\frac{۲L}{\sqrt{۳}}$ (کششی)

$\sum F_y=۰ \quad : \quad BF\sin ۶۰^\circ-L=۰ \quad , \quad BF=\frac{۲L}{\sqrt{۳}}$ (فشاری)

۴-۳۹. خرپای نگه دارنده‌ی تابلو برای نیروی افقی $۸۰۰lb$ ناشی از باد طراحی شده است. اگر برآیند این نیروها از نقطه‌ی C بگذرد، نیرو در اعضای BG و BF را محاسبه کنید.

Scanned by CamScanner

حل:



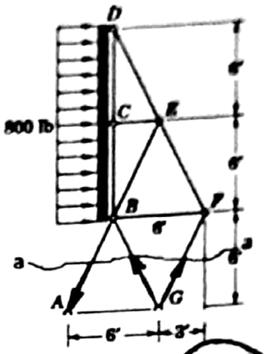
$$\circlearrowleft + \sum M_G = ۰ \quad : \quad ۸۰۰(۱۲) - AB(۶)\frac{۲}{\sqrt{۵}} = ۰$$

$AB = ۸۰۰\sqrt{۵}\,lb$ (کششی)

قسمت بالای مقطع : $\circlearrowleft + \sum M_B = ۰ \quad : \quad ۸۰۰(۶) - FG(۶)\frac{۲}{\sqrt{۵}} = ۰$

$FG = ۴۰۰\sqrt{۵}\,lb$ (فشاری)

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad BG\frac{۲}{\sqrt{۵}} + FG\frac{۲}{\sqrt{۵}} - AB\frac{۲}{\sqrt{۵}} = ۰$$

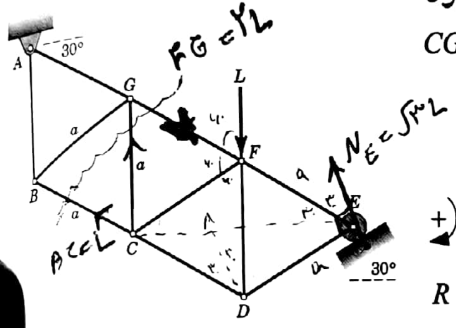


$BG = ۴۰۰\sqrt{۵}\,lb$ (فشاری)

گره F : $\sum F_y = ۰ \quad : \quad EF = FG = ۴۰۰\sqrt{۵}\,lb$ (فشاری)

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad BF - ۲FG\frac{۱}{\sqrt{۵}} = ۰ \quad , \quad BF = ۸۰۰\,lb$ (کششی)

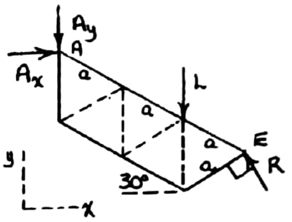
۴-۴۰. مطابق شکل خرپایی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a ساخته شده و بارگذاری شده است. نیرو در اعضای BC و CG را به دست آورید.



حل:

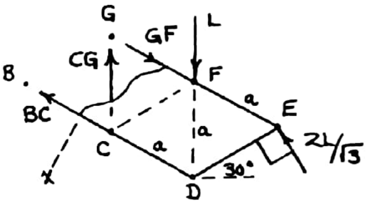
$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad L(۲a\cos ۳۰^\circ) - R(۳a\sin ۳۰^\circ) = ۰$$

$$R = \frac{۲L}{\sqrt{۳}}$$



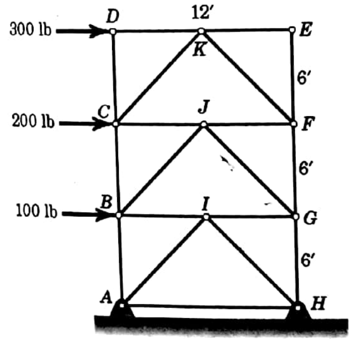
$$\sum M_G = ۰ \quad : \quad La\cos ۳۰^\circ + BCa\cos ۳۰^\circ - \frac{۲L}{\sqrt{۳}}۲a\sin ۳۰^\circ = ۰$$

$BC = \frac{L}{۳}$ (کششی)



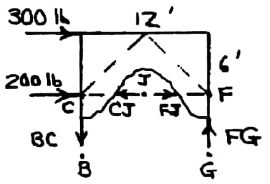
$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad CG\cos ۳۰^\circ - L\cos ۳۰^\circ + \frac{۲L}{\sqrt{۳}}\sin ۳۰^\circ = ۰$$

$CG = \frac{L}{۳}$ (کششی)



۴-۴۱. نیرو در اعضای BC و FG از خرپای متقارن بارگذاری شده را تعیین کنید. نشان دهید که این محاسبه می‌تواند با استفاده از یک مقطع و دو معادله، که هر کدام شامل یک مجهول است، انجام گیرد. آیا نامعین بودن تکیه‌گاه‌ها در نتایج تأثیری دارد؟

حل:

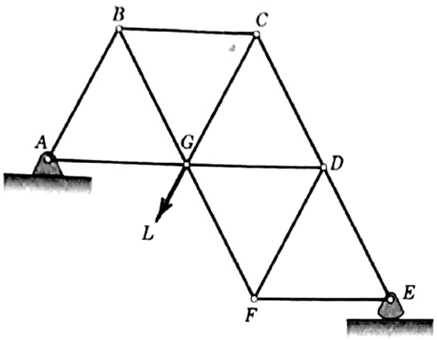


$\circlearrowleft + \ \sum M_C = ۰ \quad : \quad -۲۰۰(۶) + FG(۱۲) = ۰$

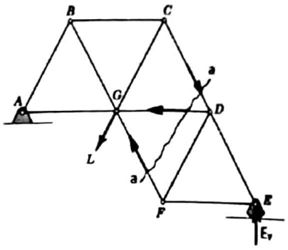
$FG = ۱۵۰ lb$ (فشاری)

$\sum M_F = ۰ \quad : \quad -۲۰۰(۶) + BC(۱۲) = ۰ \quad , \quad BC = ۱۵۰ lb$ (کششی)

۴-۴۲. در صورت اعمال بار L به خرپا، نیروی عضو DG را تعیین کنید. تمامی زوایای داخلی ۶۰° است.



حل:



کل خرپا $\sum M_A = ۰ \; : \; L\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right) - E_y\left(۲a + \frac{a}{۲}\right) = ۰ \quad , \quad E_y = \frac{\sqrt{۳}}{۵}L$

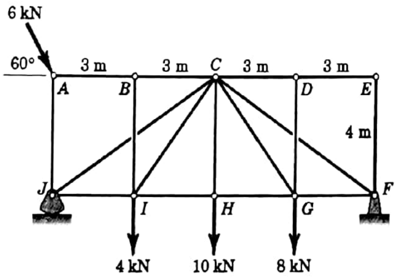
برای قسمت پایین مقطع a-a : $\sum M_G = ۰ \; : \; E_y\left(a + \frac{a}{۲}\right) - CD\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right) = ۰ \quad , \quad CD = \frac{۳}{۵}L$ (فشاری)

$\sum M_D = ۰ \quad : \quad FG\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right) - E_y\left(\frac{a}{۲}\right) = ۰ \quad , \quad FG = \frac{L}{۵}$ (کششی)

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad CD\cos ۶۰^\circ - DG - FG\cos ۶۰^\circ = ۰ \quad , \quad DG = \frac{۳}{۱۰}L - \frac{L}{۱۰}$

$DG = \frac{L}{۵}$ (کششی)

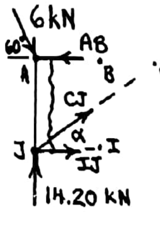
۴-۴۳. اعضای CJ و CF از خرپای بارگذاری شده به گونه‌ای عبور کرده‌اند که با اعضای BI و DG تماسی ندارند. نیرو در اعضای BC، CJ، CI و HI را حساب کنید.



حل:

برای کل خرپا : $\sum M_F = ۰ \quad , \quad J = ۱۴/۲ \; kN$

$\sum F_y = ۰ \; : \; ۱۴/۲ - ۶\sin ۶۰^\circ + CJ\sin\alpha = ۰$

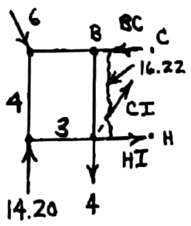


$\alpha = \tan^{-۱}\frac{۴}{۶} = ۳۳/۷^\circ \quad , \quad CJ = -۱۶/۲۲ kN$ (فشاری)

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -۶\sin ۶۰^\circ + ۱۴/۲ - ۴ - ۱۶/۲۲\sin\alpha + CI\frac{۴}{۵} = ۰$

$CI = ۵ kN$ (کششی)

$\circlearrowleft + \ \sum M_C = ۰ \quad : \quad (۶\sin ۶۰^\circ)۶ - ۱۴/۲(۶) + ۴(۳) + HI(۴) = ۰$

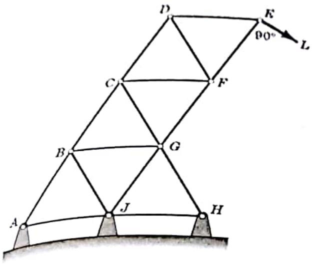


$HI = ۱۰/۵ kN$ (کششی)

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۶\cos ۶۰^\circ - ۱۶/۲۲\cos\alpha + ۵\left(\frac{۳}{۵}\right) + ۱۰/۵ - BC = ۰$

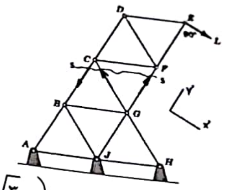
$BC = ۳ kN$ (فشاری)

Scanned by CamScanner



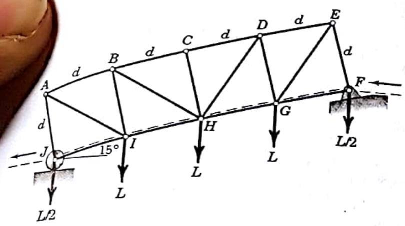
۴-۴۴. خرپای زیر از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده و بار L را تحمل می‌کند. نیرو در اعضای CG و GF را تعیین کنید. اعضایی را که معادلات تعادل برای تعیین نیروی آنها کفایت نمی‌کند، مشخص کنید.

حل:



قسمت بالای مقطع s-s $\quad \sum M_C=0 \; : \; L\left(a+\frac{a}{2}\right)-FG\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=0$, $FG=\sqrt{3}L$ (فشاری)

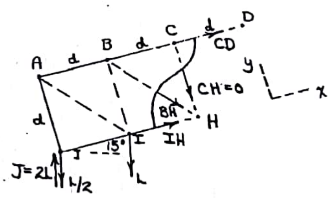
$\sum F_{x'}=0 \; : \; L-CG\cos 30^\circ=0$, $CG=\frac{2}{\sqrt{3}}L$ (فشاری)



۴-۴۵. خرپا مسیر شیب‌داری را نگه می‌دارد (در تصویر با خط‌چین نشان داده شده است) که از سطح ثابت ورودی نزدیک گره F تا سطح ثابت خروجی نزدیک گره J کشیده شده است. بارهای نشان داده شده ناشی از وزن سطح شیب‌دار است. نیرو در اعضای BH و CD را تعیین کنید.

حل:

برای کل خرپا $\; : \; \sum F_x=0$, $J_y=F_y=2L(\uparrow)$,



$\sum F_y=0 \; : \; -BH\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(2L-\frac{L}{2}-L\right)\cos 15^\circ=0$

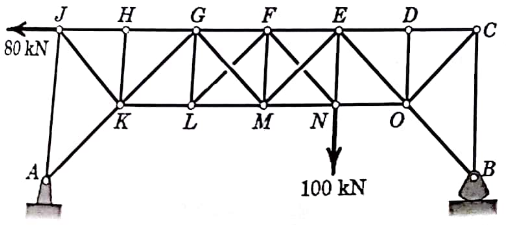
$BH=0.683L$ (کششی)

$CH=0 \rightarrow$ بررسی گره C

$\sum M_H=0 \; : \; \left(\frac{L}{2}-2L\right)(2d\cos 15^\circ)+L(d\cos 15^\circ)-CD(d)=0$

$CD=-1.932L$ یا $CD=1.932L$ (فشاری)

۴-۴۶. خرپای نشان داده شده از مثلث‌های قائم‌الزاویه ۴۵° ساخته شده است. اعضای قطری در دو صفحه‌ی (پانل) مرکزی خرپا میله‌های لاغری هستند که توانایی تحمل نیروهای فشاری را ندارند. دو میله‌ای که تحت کشش هستند و مقدار نیروی کششی آنها را حساب کنید. همچنین نیرو در عضو MN را تعیین کنید.

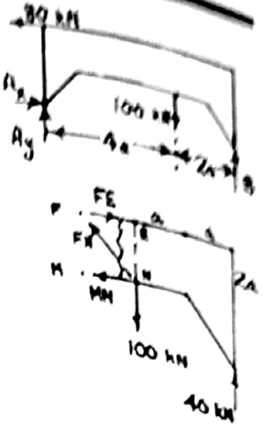


حل:

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad : \quad B(۴a) - ۱۰۰(۲a) + ۸۰(۲a) = ۰ \quad , \quad B = ۲۰kN$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad \dfrac{FN}{\sqrt{۲}} + ۲۰ - ۱۰۰ = ۰ \quad , \quad FN = ۸۲/۸kN$ (کششی)

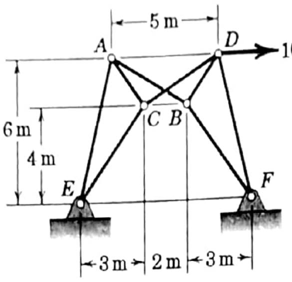
$\sum M_E = ۰ \quad : \quad ۲۰(۲a) - ۸۲/۸\dfrac{a}{\sqrt{۲}} - MN(a) = ۰$



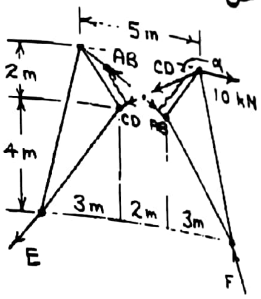
$MN = ۲۰kN$ (کششی)

با مقطعی از GF و LM $\rightarrow \sum F_y = ۰ \quad : \quad GM = ۸۴/۸kN$ (کششی)

۴-۴۷. قاب‌های لولاشده ACE و DFB توسط دو میله‌ی لولاشده AB و CD به هم متصل شده‌اند. این میله‌ها بدون اتصال به هم از روی هم عبور کرده‌اند. نیرو در AB را محاسبه کنید.



حل:



$\alpha = \tan^{-۱}\dfrac{۲}{۳/۵} = ۲۹/۷°$

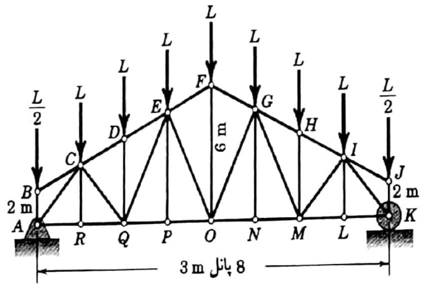
$\sum M_E = ۰ \; : \; CD(۴\cos\alpha) - CD(۳\sin\alpha) - AB(۶\cos\alpha) - AB(۱/۵\sin\alpha) = ۰$

$CD = ۳AB \; (۱)$

$\sum M_F = ۰ : ۱۰(۶) + AB(۴\cos\alpha) - AB(۳\sin\alpha) - CD(۶\cos\alpha) - CD(۱/۵\sin\alpha) = ۰$

$۶۰ - ۱/۹۸۵AB - ۵/۹۵۴CD = ۰ \xrightarrow{(۱)} AB = ۳/۷۸kN$ (فشاری)

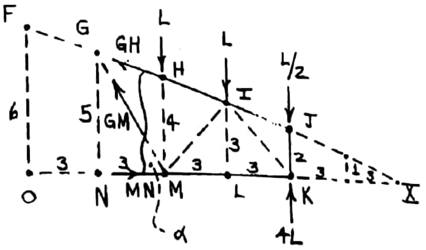
۴-۴۸. نیرو در عضو GM از خرپای بارگذاری شده را حساب کنید.



حل:

عکس‌العمل‌های خارجی در A و K $= ۴L \; (\uparrow)$

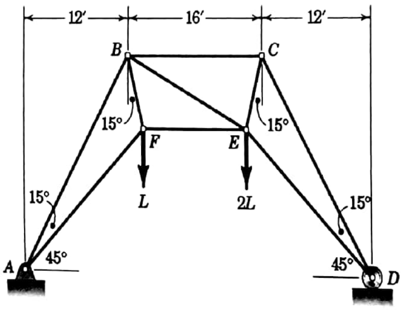
$\alpha = \tan^{-۱}\dfrac{۵}{۳} = ۵۹°$



$+\circlearrowleft \sum M_X = ۰ \; : \; \left(\dfrac{L}{۲} - ۴L\right)۶ + L(۹) + L(۱۲) - GM\sin ۵۹°(۱۲) = ۰$

$GM = ۰$

۴-۴۹. نیرو در عضو BE از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:

$\dfrac{CD}{\sin ۱۲۰} = \dfrac{ED}{\sin ۴۵} \xrightarrow{CD = ۲۴\,ft} ED = ۱۹/۶\,ft$

$\theta = \tan^{-۱}\dfrac{CD\sin ۶۰° - ED\sin ۴۵°}{۱۶ - (CD\sin ۶۰° - ED\sin ۴۵°)\tan ۱۵°} = ۲۶/۱۰۱°$

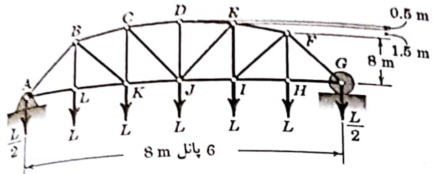
برای کل خرپا : $\sum M_A = ۰ \quad , \quad \sum F_y = ۰$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow D_y = ۱/۵۶۱L(\uparrow)$, $A_y = ۱/۴۳۹L(\uparrow)$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad D_y + BE\sin\theta - ۲L = ۰$

$BE = ۰/۷۸۷L \ (T)$



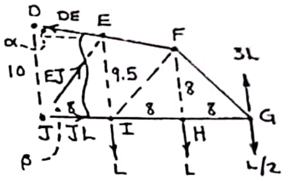
۵۰-۴ نیروها در اعضای DJ و EJ از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:

برای کل خرپا $\Rightarrow A_y = G_y = ۲L(\uparrow)$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{۰/۵}{۸} = ۳/۵۸°$

$\beta = \tan^{-1}\frac{۹/۵}{۸} = ۴۹/۹°$



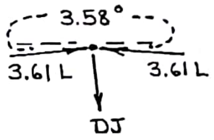
$+\circlearrowleft \sum M_J = ۰ \quad : \quad -L(۸) - L(۱۶) - \frac{L}{۲}(۲۴) + ۲L(۲۴) + DE\cos ۳/۵۸°(۱۰) = ۰$

$DE = -۳/۶۱L$

$+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad -۳/۶۱L\sin ۳/۵۸° - ۲/۵L + ۲L + EJ\sin ۴۹/۹° = ۰$

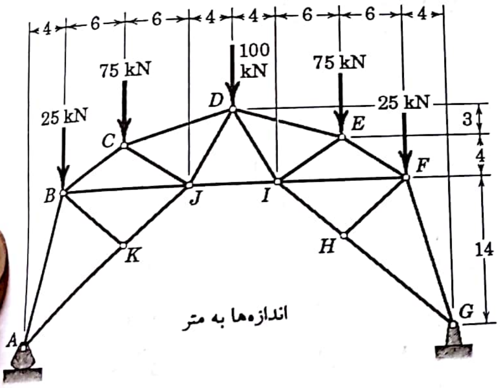
$EJ = -۰/۳۶L$ یا $EJ = ۰/۳۶L$ (کششی)

با توجه به تقارن



گره D : $+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad ۲(۳/۶۱L\sin ۳/۵۸°) - DJ = ۰$

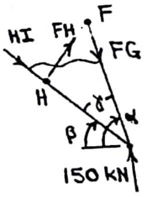
$DJ = ۰/۴۵L$ (کششی)



۵۱-۴ نیروها در اعضای DE، EI، FI و HI از خرپای سقف قوسی را تعیین کنید.

حل:

با توجه به تقارن : $A = G = ۱۵۰kN$

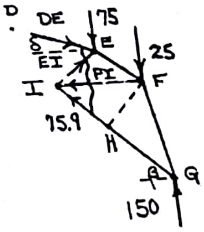


$+\circlearrowleft \sum M_F = ۰ \quad : \quad ۱۵۰(۴) + HI(۷/۹۰۲) = ۰$

$HI = -۷۵/۹kN$ (کششی)

$\left(\alpha = \tan^{-1}\frac{۱۴}{۴} = ۷۴/۱° \quad , \quad \beta = \tan^{-1}\frac{۱۴}{۱۶} = ۴۱/۲° \quad , \quad \gamma = \alpha - \beta = ۳۲/۹°\right)$

$(d_\perp = FG\sin\gamma = \sqrt{۱۴^۲ + ۴^۲}\sin\gamma = ۷/۹۰۲m)$



$+\circlearrowleft \sum M_E = ۰ \quad : \quad -۲۵(۶) + ۱۵۰(۱۰) - FI(۴) - (۷۵/۹\sin\beta)(۶) - (۷۵/۹\cos\beta)(۴) = ۰$

$FI = ۲۰۵kN$ (کششی)

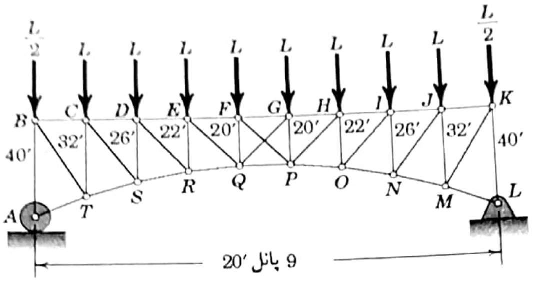
$\sum M_I = ۰ \quad : \quad -۷۵(۶) - ۲۵(۱۲) + ۱۵۰(۱۶) - (DE\cos\delta)(۴) - (DE\sin\delta)(۶) = ۰$

$DE = ۲۹۷kN$ (فشاری)

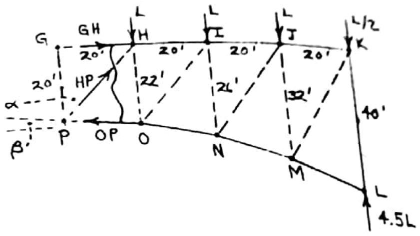
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -۷۵ - ۲۵ + ۱۵۰ - ۲۹۷\sin\delta + ۷۵/۹\sin\beta + EI\frac{۴}{\sqrt{۵۲}} = ۰$

$EI = -۲۶/۴kN$ (کششی)

۴-۵۲. نیرو در عضو HP از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید. اعضای FP و GQ بدون تماس از روی هم عبور کرده‌اند و قادر به تحمل نیروی فشاری نیستند.



حل:



عکس‌العمل‌های خارجی برای کل خرپا : $A_y = L_y = ۴/۵L\ (\uparrow)$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{۲۰}{۲۰} = ۴۵^\circ$

$\beta = \tan^{-1}\frac{۲}{۲۰} = ۵/۷۱^\circ$

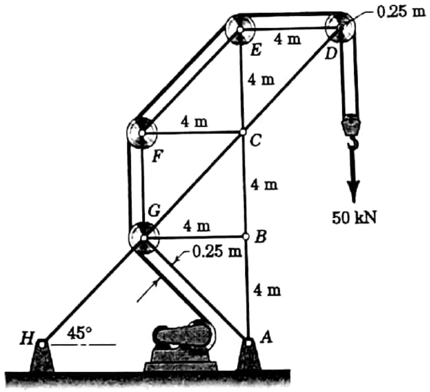
$\circlearrowleft + \sum M_H = ۰ \quad : \quad -L(۲۰) - L(۴۰) - \frac{L}{۲}(۶۰) + ۴/۵L(۶۰) - OP\cos ۵/۷۱^\circ(۲۲) = ۰$

$OP = ۸/۲۲L$ (کششی)

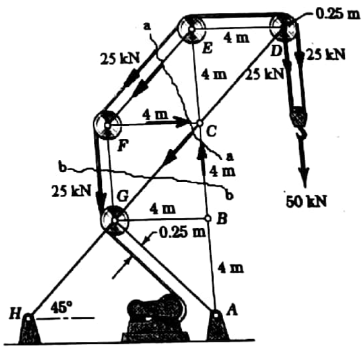
$+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad -۲/۵L + ۴/۵L + ۸/۲۲L\sin ۵/۷۱^\circ + HP\sin ۴۵^\circ = ۰$

$HP = -۲/۵۷L$ یا $HP = ۲/۵۷L$ (کششی)

۴-۵۳. در خرپای جرثقیل موردنظر، نیروها در اعضای CG، FG، BC و EF را تعیین کنید.



حل:



مقطع a-a : $\sum M_C = ۰ \quad : \quad ۲۵(۴) + ۲۵(۴ + ۰/۲۵) - ۲۵(۲/۸۳ + ۰/۲۵) - EF(۲/۸۳) = ۰$

$EF = ۴۵/۷kN$ (کششی)

مقطع b-b : $\sum M_G = ۰ \quad : \quad ۲۵(۸ + ۰/۲۵) + ۲۵(۸) - ۲۵(۰/۲۵) - BC(۴) = ۰$

$BC = ۱۰۰kN$ (فشاری)

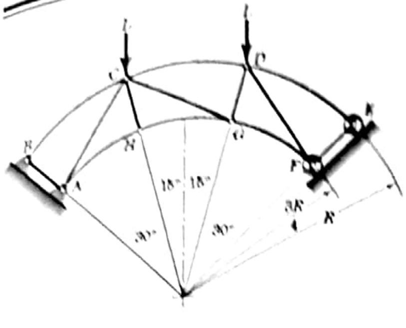
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad CG = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad FG = ۲۵kN$ (کششی)

۴-۵۴. نیرو در عضو CG از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید (همان خرپای مسئله‌ی ۲۷). مقدار عکس‌العمل‌های خارجی در A، B، E و F مساوی بوده و راستای آنها بر سطوح تکیه‌گاه‌هایشان عمود است.

Scanned by CamScanner

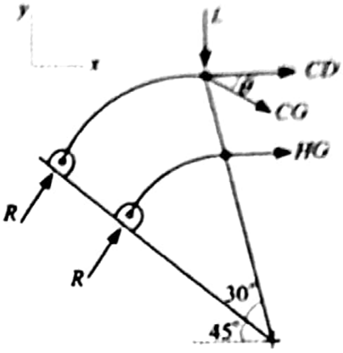
حل:



$R =$ هر کدام از عکس‌العمل‌ها

$\sum F_y = ۰ \quad , \quad ۲R\sin ۴۵^\circ - ۲L = ۰$

(نیروهای داخلی CD و HG در راستای x است.)

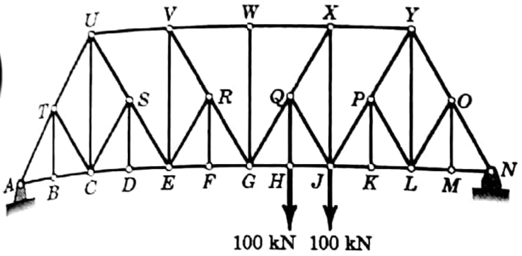


$R = \frac{\sqrt{۲}}{۲} L$

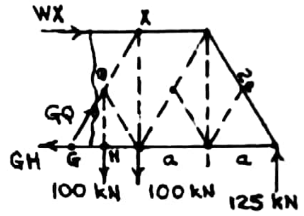
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۲R\sin ۴۵^\circ - L - CG\sin\theta = ۰$

$CG\sin\theta = ۰ \xrightarrow{\sin\theta \neq ۰} CG = ۰$

۴-۵۵. نیرو در عضو JQ از خرپای بالتیمور را بیابید. در این خرپا تمامی زاویه‌ها °۳۰، °۶۰، °۹۰ یا °۱۲۰ است.



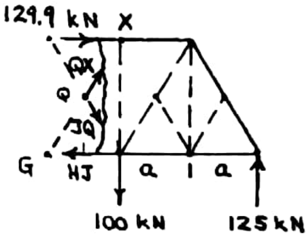
حل:



برای کل خرپا $: \quad \sum M_A = ۰ \quad , \quad N = ۱۲۵ \ kN$

$\circlearrowleft + \sum M_G = ۰ \quad : \quad ۱۲۵(۲a) - ۱۰۰\left(\frac{۳a}{۲}\right) - WX\left(۲a\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۰$

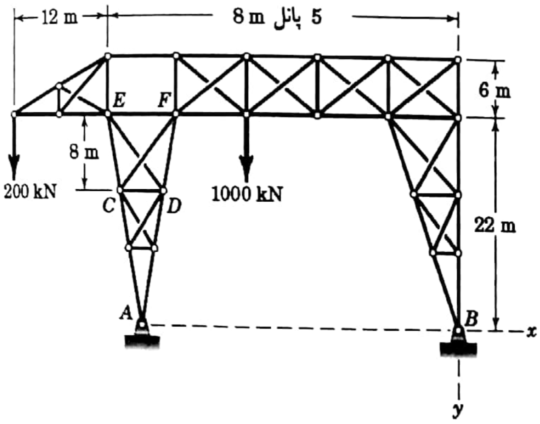
$WX = ۱۲۹/۹ kN$ (فشاری)



$+\circlearrowleft \sum M_G = ۰ \quad : \quad ۱۰۰(a) + ۱۲۹/۹(a\sqrt{۳}) + JQ\left(a\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) - ۱۲۵(۲a) = ۰$

$JQ = ۵۷/۷ kN$ (فشاری)

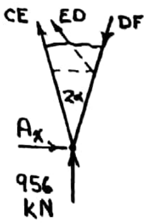
۴-۵۶. مطابق شکل در جرثقیل یک پل مسافرتی، تمامی اعضای قطری، میله‌های باریکی هستند که توانایی تحمل فشار را ندارند. نیروها در اعضای DF و EF را تعیین کنید، همچنین عکس‌العمل افقی خرپا در A را بیابید. به علاوه، نشان دهید که $DE = CF = ۰$.

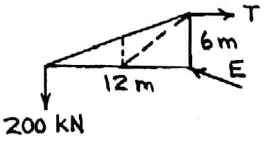


حل:

کل خرپا $: \sum M_B = ۰ : ۱۰۰۰(۲۴) + ۲۰۰(۵۲) - ۳۶A_y = ۰$

$A_y = ۹۵۶ kN$





$\sum M_A = ۰ \Rightarrow ED = ۰ \quad$ (همچنین $CF = ۰$)

$\alpha = \tan^{-1}\frac{۴}{۲۲} = ۱۰/۳ \quad , \quad \cos\alpha = ۰/۹۸۴$

Scanned by CamScanner

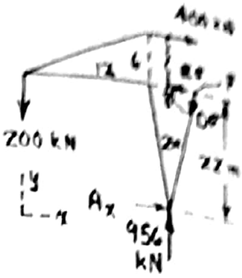
$\sum M_E = ۰ \quad : \quad ۶T - ۱۲(۲۰۰) = ۰ \quad , \quad T = ۲۰۰ kN$

$\sum M_F = ۰ \quad : \quad ۲۰۰(۲۰) - ۲۰۰(۶) + A_x(۲۲) - ۹۵۶(۴) = ۰$

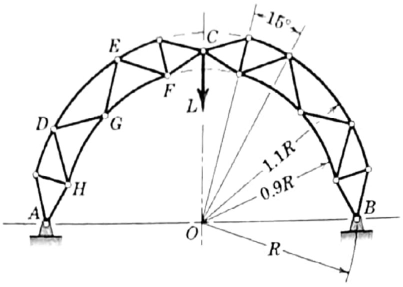
$A_x = ۱۰۱٫۱ kN (\rightarrow)$

$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۲۰۰(۱۶) + EF(۲۲) - ۴۰۰(۲۸) = ۰ \quad , \quad EF = ۳۶۴\ kN$ (فشاری)

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۰٫۹۸۴ DF + ۲۰۰ - ۹۵۶ = ۰ \quad , \quad DF = ۷۶۸ kN$ (فشاری)



۴-۵۷. نیرو در عضو DG از خرپای مرکب زیر را تعیین کنید. مطابق شکل همه‌ی گره‌ها با زاویه‌ی ۱۵° نسبت بـه هـم قـرار گرفتـه‌انـد، و اعضای منحنی به صـورت عـضوهای دو نیرویـی عمـل مـی‌کننـد.
$(\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB} = R)$

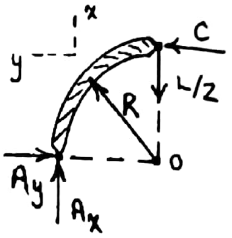


حل:
با توجه به تقارن، نیرویی که نیمه‌ی راست در نقطه‌ی C به نیمـه‌ی چـپ وارد می‌کند، افقی است:

$\sum M_A = ۰ \quad : \quad CR - \frac{L}{۲} R = ۰ \quad , \quad C = \frac{L}{۲}$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -A_y + \frac{L}{۲} = ۰ \quad , \quad A_y = \frac{L}{۲}$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x - \frac{L}{۲} = ۰ \quad , \quad A_x = \frac{L}{۲}$

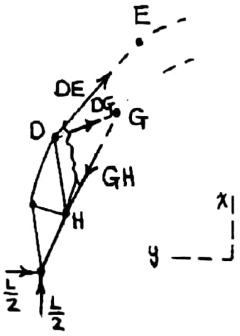


$\mathbf{r}_{OD} + \mathbf{r}_{DE} = \mathbf{r}_{OE}$

$\mathbf{r}_{DE} = \mathbf{r}_{OE} - \mathbf{r}_{OD} = ۱٫۱ R(\cos ۳۰^\circ \mathbf{i} + \sin ۳۰^\circ \mathbf{j}) - ۱٫۱ R(\cos ۶۰^\circ \mathbf{i} + \sin ۶۰^\circ \mathbf{j})$

$= R(۰٫۴۰۳ \mathbf{i} - ۰٫۴۰۳ \mathbf{j})$

$\mathbf{DE} = DE \frac{\mathbf{r}_{DE}}{\mathbf{r}_{DE}} = DE(۰٫۷۰۷ \mathbf{i} - ۰٫۷۰۷ \mathbf{j})$



نیروی : به طور مشابه $\mathbf{GH} = GH(-۰٫۸۶۶ \mathbf{i} + ۰٫۵ \mathbf{j})$

نیروی $\mathbf{DG} = DG(۰٫۲۶۴ \mathbf{i} - ۰٫۹۶۵ \mathbf{j})$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad \frac{L}{۲} + ۰٫۷۰۷ DE - ۰٫۸۶۶ GH + ۰٫۲۶۴ DG = ۰$ (۱)

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -\frac{L}{۲} - ۰٫۷۰۷ DE + ۰٫۵ GH - ۰٫۹۶۵ DG = ۰$ (۲)

$\sum M_o = ۰ \quad : \quad -\frac{L}{۲} R \mathbf{k} + \mathbf{r}_{OD} \times (\mathbf{DE} + \mathbf{DG}) + \mathbf{r}_{OH} \times \mathbf{GH} = ۰$

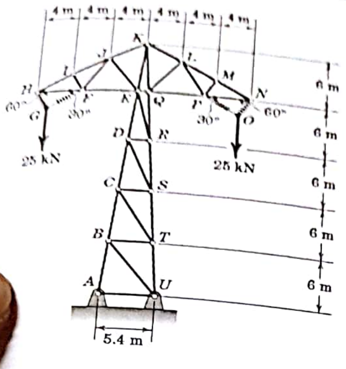
$\mathbf{r}_{OH} = ۰٫۹ R(\cos ۷۵^\circ \mathbf{i} + \sin ۷۵^\circ \mathbf{j})$

با جایگزینی مقادیر و جمع کردن مؤلفه‌های هر راستا

$-۱٫۰۶۳ DE + ۰٫۸۶۹ GH - ۰٫۷۸۲ DG = \frac{L}{۲}$ (۳)

سه معادله و سه مجهول $\Rightarrow \quad DE = ۰٫۸۳۹ L$ (کششی) $, \quad GH = ۱٫۰۹ L$ (فشاری) $, \quad DG = -۰٫۵۶۹ L$ (فشاری)

Scanned by CamScanner



۴-۵۸. مطابق شکل مدلی برای خط انتقال قدرت طراحی شده است. اعضای GH، FG، OP و NO کابل‌هایی با روکش عایق هستند؛ دیگر اعضا را میله‌های فولادی تشکیل می‌دهند. برای بارگذاری نشان داده شده، نیروها در اعضای FI، FJ، EJ، EK و ER را محاسبه کنید. می‌توانید از ترکیبی از دو روش استفاده کنید.

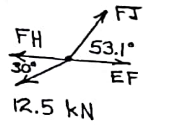
حل:

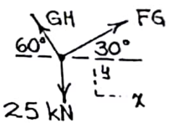
بررسی گره I $\Rightarrow$ $FI=0$

$$G \text{ گره}: \begin{cases} \sum F_x = 0 : -GH\left(\frac{1}{2}\right)+FG\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0 \quad , \ GH=\sqrt{3}FG \\ \sum F_y = 0 : \ GH\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+FG\left(\frac{1}{2}\right)-25=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ FG = 12{,}5\ kN$ (کششی) , $GH = 21{,}7\ kN$ (کششی)

F گره : $\sum F_y = 0$: $FJ(\sin 53{,}1^\circ) - 12{,}5(\sin 30^\circ) = 0$

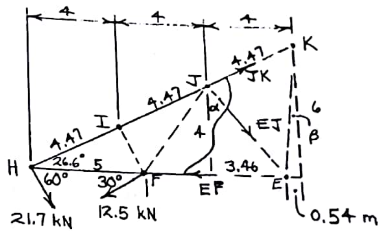




$FJ = 7{,}81\ kN$ (کششی)

$\alpha = \tan^{-1}\frac{3{,}46}{4} = 40{,}9^\circ$

$\beta = \tan^{-1}\frac{0{,}54}{6} = 5{,}14^\circ$



$\sum M_H = 0$: $12{,}5 \sin 30^\circ(5) + EJ \cos 14{,}3^\circ(8{,}94) = 0$

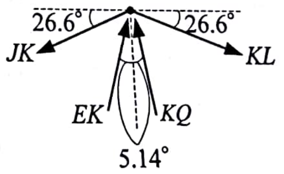
$EJ = -3{,}61\ kN$ یا $EJ = 3{,}61\ kN$ (فشاری)

$\sum F_y = 0$: $JK \sin 26{,}6^\circ - EJ \cos 40{,}9^\circ - 21{,}7 \sin 60^\circ - 12{,}5 \sin 30^\circ = 0$

$JK \sin 26{,}6^\circ = 22{,}271\ kN$

گره K:

در این گره تمامی نیروها متقارن است (به علت تقارن کلی)



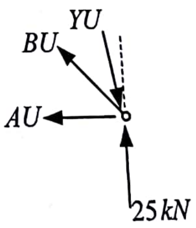
$JK = KL$, $EK = kQ$

$\sum F_y = 0$: $22{,}271 = EK \cos 5{,}14^\circ$

$EK = 22{,}4\ kN$ (فشاری)

A گره : $AU = 2{,}25\ kN$ (کششی)

U گره : $\sum F_y = 0$, $\sum F_x = 0$



$BU = 0$, $TU = 25{,}1\ kN$ (فشاری)

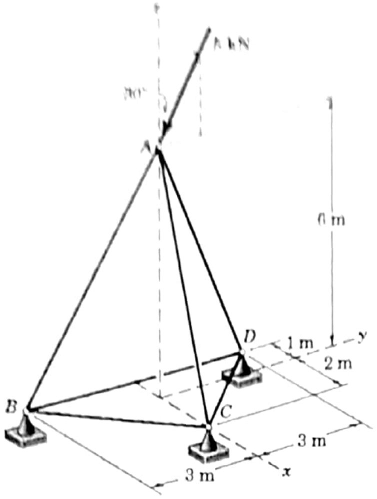
با توجه به اینکه $BU = 0$، با بررسی گره‌های B، T، C، S، D و R به ترتیب نتیجه می‌شود:

$BU = BT = TC = CS = SD = DR = RE = 0$

در این مسائل، برای کشش از علامت مثبت و برای فشار از علامت منفی استفاده شده است.

۵۹-۴ نیروها در اعضای AB، AC و AD را تعیین کنید.

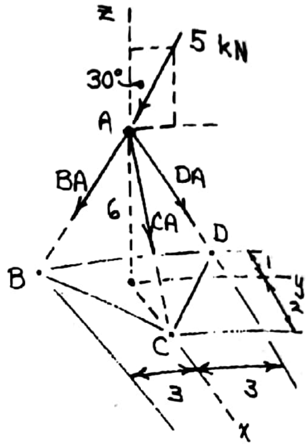
حل:



$$\mathbf{BA} = BA\left(\frac{-\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۶\mathbf{k}}{\sqrt{۱^۲+۳^۲+۶^۲}}\right) = \frac{BA(-\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۶\mathbf{k})}{\sqrt{۴۶}}$$

$$\mathbf{CA} = CA\left(\frac{+۲\mathbf{i}-۶\mathbf{k}}{\sqrt{۲^۲+۶^۲}}\right) = \frac{CA(+۲\mathbf{i}-۶\mathbf{k})}{\sqrt{۴۰}}$$

$$\mathbf{DA} = DA\left(\frac{-\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۶\mathbf{k}}{\sqrt{۱^۲+۳^۲+۶^۲}}\right) = \frac{DA(-\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۶\mathbf{k})}{\sqrt{۴۶}}$$



$$\sum \mathbf{F} = ۰ \quad : \quad \mathbf{BA}+\mathbf{CA}+\mathbf{DA}-۵(\cos ۳۰^\circ \mathbf{k}+\sin ۳۰^\circ \mathbf{j}) = ۰$$

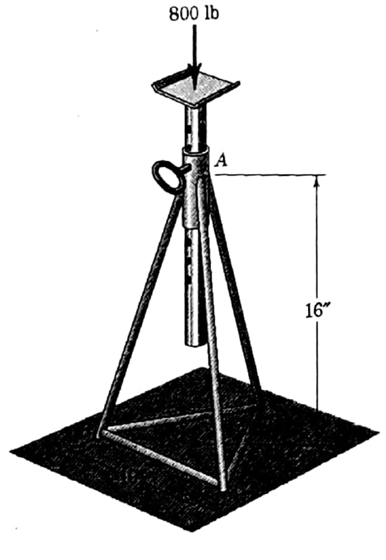
$$\mathbf{i} : \; -\frac{۱}{\sqrt{۴۶}}BA+\frac{۲}{\sqrt{۴۰}}CA-\frac{۱}{\sqrt{۴۶}}DA = ۰$$

$$\mathbf{j} : \; -\frac{۳}{\sqrt{۴۶}}BA+\frac{۳}{\sqrt{۴۶}}DA-۵\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$$

$$\mathbf{k} : \; -\frac{۶}{\sqrt{۴۶}}BA-\frac{۶}{\sqrt{۴۰}}CA-\frac{۶}{\sqrt{۴۶}}DA-۵\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad BA = -۴{,}۴۶\,kN \quad , \quad CA = -۱{,}۵۲۱\,kN \quad , \quad DA = ۱{,}۱۹۴\,kN$$

۶۰-۴ پایه‌ی جک اتومبیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $۱۰in$ است و مرکز آن زیر طوقه‌ی A قرار دارد. در این سازه هر گره با یک مفصل کاسه- ساچمه‌ای ساخته شده است. نیروها در اعضای BC، BD و CD را تعیین کنید. مؤلفه‌های افقی عکس‌العمل در زیر پایه‌های B، C و D را نادیده بگیرید.

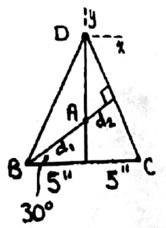


حل:

نما از بالای پایه:

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{d_۱+d_۲}{۱۰} \quad , \quad d_۱+d_۲ = ۸{,}۶۶''$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{۵}{d_۱} \quad , \quad d_۱ = ۵{,}۷۷''$$



$$d_۲ = ۸{,}۶۶-۵{,}۷۷ = ۲{,}۸۹''$$

گره A (با توجه به تقارن):

$$\mathbf{F}_{BA} = p\left[\frac{۵\mathbf{i}+۲{,}۸۹\,\mathbf{j}+۱۶\mathbf{k}}{(۵^۲+۲{,}۸۹^۲+۱۶^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\right] = p(۰{,}۲۹۴\mathbf{i}+۰{,}۱۶۹۷\,\mathbf{j}+۰{,}۹۴۱\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_{CA} = p(-۰{,}۲۹۴\mathbf{i}+۰{,}۱۷\mathbf{j}+۰{,}۹۴۱\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{F}_{DA} = p(-۰{,}۳۳۹\,\mathbf{j}+۰{,}۹۴۱\mathbf{k})$$

در A $\quad \sum F_z = ۰ \quad : \quad ۳(۰{,}۹۴۱p)-۸۰۰ = ۰ \quad , \quad p = ۲۸۳\,lb$

Scanned by CamScanner

گره C (با درنظر گرفتن تقارن):

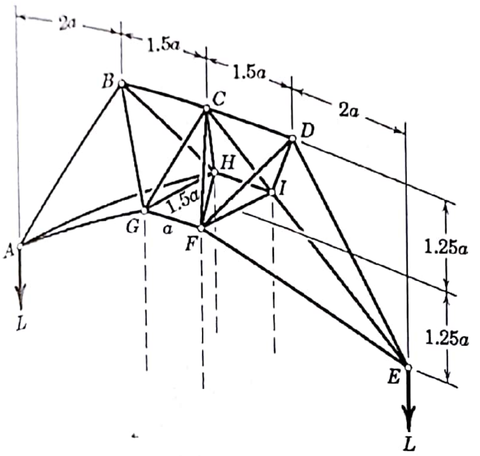
$F_{BC} = -Q\mathbf{i}$ ، $\mathbf{F}_{CD} = Q(-\sin ۳۰^\circ \mathbf{i} + \cos ۳۰^\circ \mathbf{j})$

نیروی عمودی تکیه‌گاه $\mathbf{N} = ۲۶۷\mathbf{k}\ lb$

در C $\quad \sum \mathbf{F} = ۰ \quad : \quad \mathbf{N} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} + \mathbf{F}_{AC} = ۰$

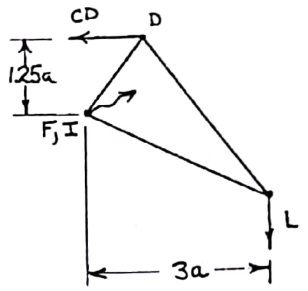
$$۲۶۷\mathbf{k} - Q\mathbf{i} + ۲۸۳(۰/۲۹۴\mathbf{i} - ۰/۱۶۹۷\mathbf{j} - ۰/۹۴۱\mathbf{k}) + Q(-۰/۵\mathbf{i} + ۰/۸۶۶\mathbf{j}) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad Q = ۵۵/۶\ lb \quad \Rightarrow \quad BC = BD = CD = ۵۵/۶\ lb$$



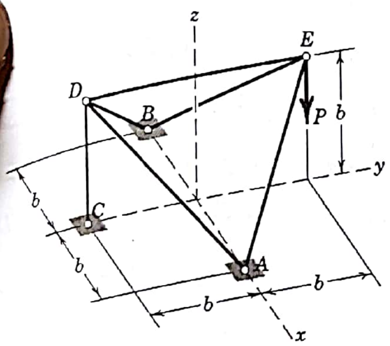
۴-۶۱. سازه‌ی نشان داده شده، قسمت فوقانی یک دکل انتقال قدرت است و از طریق گره‌های F، G و H و I حمایت می‌شود. گره C دقیقاً بالای مرکز مستطیل FGHI واقع است. نیرو در عضو CD را تعیین کنید.

حل:



$$\sum M_F = ۰ \quad : \quad CD(۱/۲۵a) - L(۳a) = ۰$$

$$CD = ۲/۴ L$$



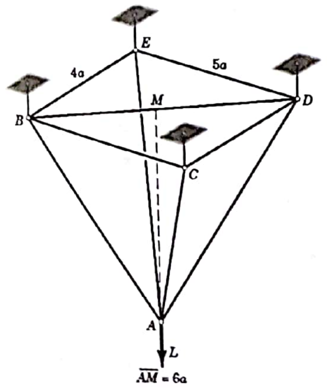
۴-۶۲. خرپای فضایی زیر به شکل یک چهار وجهی توسط اتصالات کاسه- ساچمه‌ای در A و B حمایت می‌شود. میله‌ی قائم CD از چرخیدن خرپا حول AB جلوگیری می‌کند. با توجه به مؤلفه‌های قائم عکس‌العمل‌های A و B این خرپای متقارن، نمودار جسم آزاد مثلث BDE را رسم کنید و مؤلفه‌ی x نیرویی را که فونداسیون به خرپا در نقطه‌ی D وارد می‌کند، تعیین کنید.

حل:

برای کل خرپا $\quad : \quad \sum M_x = ۰ \quad \Rightarrow \quad CD = P$

$\sum M_y = ۰ \quad , \quad \sum F_z = ۰ \quad \Rightarrow \quad B_z = P$

برای قسمت BDE $\quad : \quad \sum M_{DE} = ۰ \quad , \quad B_z b - B_x b = ۰ \quad , \quad B_z = B_x = p$



۴-۶۳. نیروها در اعضای AC و BD را تعیین کنید. این خرپا، هرمی معکوس با قاعده‌ی مستطیل می‌باشد. نقطه‌ی M وسط BD است.

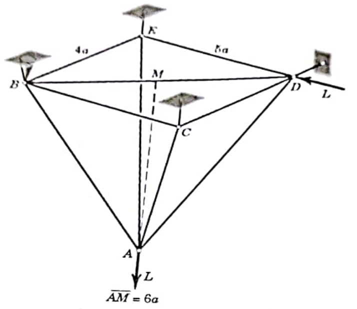
حل:

زاویه‌ی هر کدام از میله‌های AB، AE، AC و AD با راستای قائم $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{(۲/۵a)^۲ + (۲a)^۲}}{۶a} = ۲۸/۰۸۴^\circ$

گره A $: \sum F_z = ۰ \ : \ ۴AC\cos\theta - L = ۰ \ , \ AC = ۰/۲۸۳L$

(با توجه به تقارن $AC = AD = AE = AB$)

با بررسی همزمان گره E و H با توجه به اینکه نیروی AE و AB برابر است و این که دو معادله دو مجهول فقط یک جواب دارد $\Leftarrow$ $BD = ۰$



۴-۶۴. خرپای فضایی مسئله ۶۳، مطابق شکل اصلاح شده و بارگذاری و تکیه‌گاه‌هایش تغییر کرده است. نیروها در اعضای AC و BD را تعیین کنید و با نتایج مسئله‌ی ۶۳ مقایسه کنید.

حل:

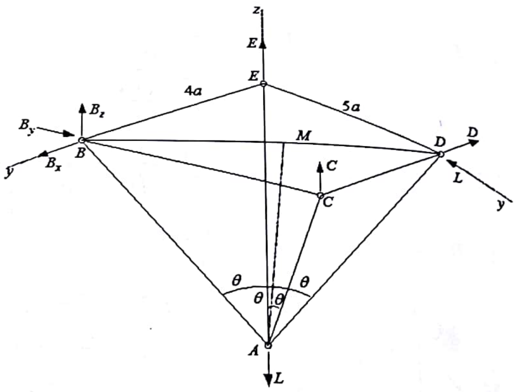
$$\sum M_{BE} = ۰ \quad , \quad C(۵a) - L(۲/۵\alpha) = ۰ \quad , \quad C = \frac{L}{۲}$$

$$C \text{ گره } : \sum F_z = ۰ \quad , \quad \frac{L}{۲} - AC(\cos\theta) = ۰$$

$$\theta = \tan^{-۱} \frac{\sqrt{(۲/۵a)^۲ + (۲a)^۲}}{۶a} = ۲۸/۰۸۴^\circ$$

$$AC = ۰/۵۷۶L$$

کل خرپا:



$$\sum M_{BD} = ۰ \quad , \quad E = C = \frac{L}{۲}$$

$$\sum F_y = ۰ \quad , \quad B_y - L = ۰ \quad , \quad B_y = L$$

$$\sum F_z = ۰ \quad , \quad B_z = ۰$$

$$\sum M_{E_z} = ۰ \ , \ L(۴a) + D(۵a) = ۰ \ , \ D = -۰/۸L$$

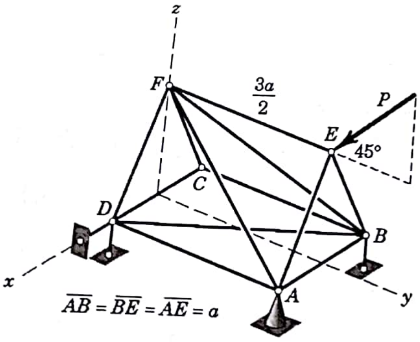
$$\sum F_x = ۰ \quad , \quad \sum F_y = ۰$$

$$DC = -۰/۱۶۹۴L \quad , \quad BC = -۰/۲۱۱۸L$$

به طور مشابه برای گره E:

$$ED = -۰/۲۱۱۸L \quad , \quad EB = -۰/۱۶۹۴L$$

$$D \text{ گره } : \sum F_y = ۰ \quad : \quad ۰/۲۱۱۸L - L - BD\cos\left(\tan^{-۱}\frac{۴}{۵}\right) = ۰ \quad , \quad BD = -۱/۰۱L$$



۴-۶۵. برای خرپای فضایی موردنظر، با بررسی تعداد تکیه‌گاه‌ها و اعضا و نحوه‌ی قرارگیری آنها، مطمئن شوید که از لحاظ استاتیکی معین است (هم داخلی و هم خارجی). نیرو در عضو AF و مؤلفه‌ی x عکس‌العمل خرپا در D را محاسبه کنید.

حل:

خرپا از لحاظ استاتیکی معین است: زیرا ۶ قید تکیه‌گاهی دارد بنابراین تعداد اعضا برای پایداری کفایت می‌کند.

$$j = ۶ \quad , \quad m = ۱۲ \quad , \quad ۳j = m + ۶$$

Scanned by CamScanner

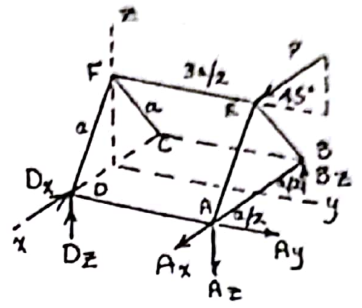
گره‌های A، B و D ثابت شده‌اند بنابراین F نیز ثابت است، E و C نیز ثابت شده‌اند، بنابراین خرپا پایدار است.

$$\sum M_{A_x}=0 \ : \ \frac{p}{\sqrt{2}}\frac{a}{2}-D_x\frac{2a}{2}=0 \quad , \quad D_x=\frac{p}{2\sqrt{2}} \quad , \quad A_x=\frac{p}{2\sqrt{2}}$$

$$\sum M_{AB}=0 \ : \ \frac{p}{\sqrt{2}}\frac{a\sqrt{3}}{2}-D_z\frac{2a}{2}=0 \quad , \quad D_z=\frac{p}{\sqrt{6}}$$

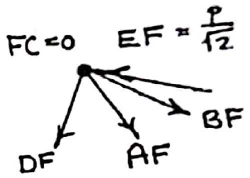
$$\sum M_{AD}=0 \ : \ \frac{p}{\sqrt{2}}\frac{a}{2}-B_z a=0 \quad , \quad B_z=\frac{p}{2\sqrt{2}}$$

$$\sum F_z=0 \ \Rightarrow \ A_z=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}p$$



گره C: تمام نیروهای گره C، صفر است

گره E : $\sum F_y=0 \ \Rightarrow \ EF=\frac{p}{\sqrt{2}}C$

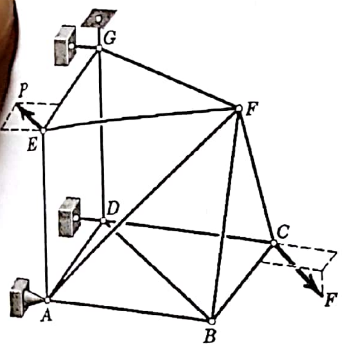


گره F : $FC=0$ ، $EF=\frac{p}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} \mathbf{AF}=\dfrac{AF(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\sqrt{3}\mathbf{k})}{\sqrt{13}} \\ \mathbf{BF}=\dfrac{BF(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\sqrt{3}\mathbf{k})}{\sqrt{13}} \\ \mathbf{DF}=\dfrac{DF(\mathbf{i}-\sqrt{3}\mathbf{k})}{2} \quad , \quad EF=\dfrac{-p}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \end{cases}$$

$$\sum \mathbf{F}=0=\left(\frac{AF}{\sqrt{13}}-\frac{BF}{\sqrt{13}}+\frac{DF}{2}\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{p}{\sqrt{2}}+\frac{3AF}{\sqrt{13}}+\frac{3BF}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{j}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}AF-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}BF-\frac{\sqrt{3}}{2}DF\right)\mathbf{k}=0$$

$$\Rightarrow \ BF=0 \quad , \quad DF=-\frac{\sqrt{2}}{3}p \quad , \quad AF=\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}p$$



۴-۶۶. خرپای فضایی موردنظر در مراحل میانی طراحی‌اش است. قیدهای خارجی نشان داده شده برای تعادل خارجی خرپا کفایت می‌کند. چه تعداد عضو دیگر نیاز است تا پایداری داخلی حاصل شود، همچنین محل قرارگیری این اعضا را مشخص کنید.

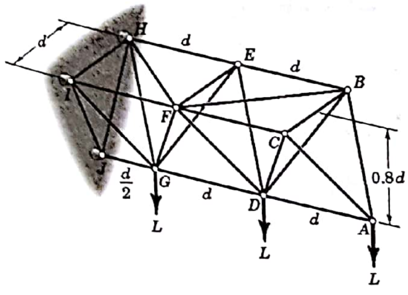
حل:

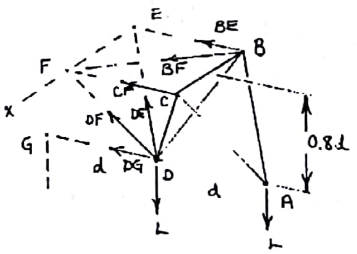
تعداد گره‌ها $j=7 \ \Rightarrow \ m+6=3j=21 \ \Rightarrow \ m=15$

با توجه به تصویر نشان داده شده، تعداد اعضا ۱۳ است، برای حاصل شدن پایداری ۲ عضو دیگر نیاز است. بررسی نشان می‌دهد که پانل $ADGE$ برای جلوگیری از حرکت G به سوی E به عضو قطری AG نیاز دارد. همچنین گره f برای ثابت شدن در فضا به عضو DF نیاز دارد. به این ترتیب گره‌های E و C هم ثابت خواهند شد، و خرپا نیز پایدار می‌شود. (البته راه‌های دیگری برای حصول پایداری وجود دارد.)

۴-۶۷. نیروها در اعضای AD و DG را تعیین کنید.

حل:

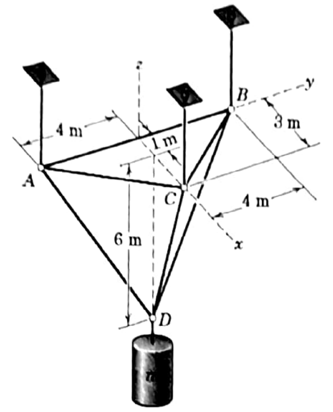




$$\sum M_1 = \text{۰} \quad : \quad -DG(\text{۰/۸}d) - L\left(\frac{d}{\text{۲}}\right) - L\left(\frac{\text{۲}d}{\text{۲}}\right) = \text{۰}$$

$$DG = -\text{۲/۵}L$$

به طور مشابه $\Rightarrow \quad AD = -\text{۰/۶۲۵}L$



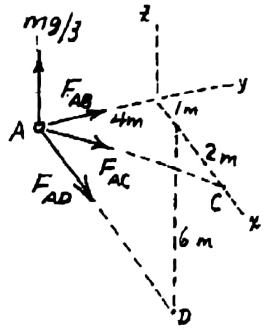
۶۸-۴ خرپایی فضایی به شکل چهار وجهی موردنظر است. قاعده‌ی افقی ABC یک مثلث متساوی‌الساقین است. پایه‌های AD، BD و CD، وزنه‌ای به جرم m در نقطه‌ی D را تحمل می‌کنند. هر کدام از رئوس مثلث توسط یک سیم قائم حمایت می‌شود. نیروها در اعضای AC و AB را محاسبه کنید.

حل:

برای کل خرپا $\sum M_y = \text{۰} \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}mg$

با توجه به تقارن : $\sum F_z = \text{۰} \quad \Rightarrow \quad T_A = T_B = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}mg$

گره A : $\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\,\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{F}_{AC} = \frac{F_{AC}}{\text{۵}}(\text{۳}\mathbf{i} + \text{۴}\mathbf{j})$



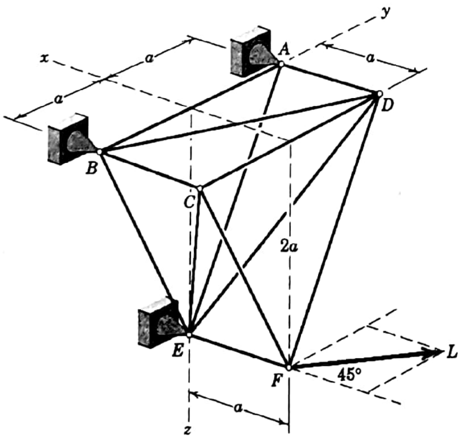
$$\mathbf{F}_{AD} = \frac{F_{AD}}{\sqrt{\text{۵۳}}}(\mathbf{i} + \text{۴}\mathbf{j} - \text{۶}\mathbf{k})$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\text{۴}^\text{۲} + \text{۱}^\text{۲} + \text{۶}^\text{۲}} = \sqrt{\text{۵۳}}\ m$$

$$\sum \mathbf{F} = \text{۰} \quad : \quad \frac{mg}{\text{۳}}\mathbf{k} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AD} = \text{۰}$$

$$\left(\frac{\text{۳}F_{AC}}{\text{۵}} + \frac{F_{AD}}{\sqrt{\text{۵۳}}}\right)\mathbf{i} + \left(F_{AB} + \frac{\text{۴}F_{AC}}{\text{۵}} + \frac{\text{۴}F_{AD}}{\sqrt{\text{۵۳}}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{mg}{\text{۳}} - \frac{\text{۶}F_{AD}}{\sqrt{\text{۵۳}}}\right)\mathbf{k} = \text{۰}$$

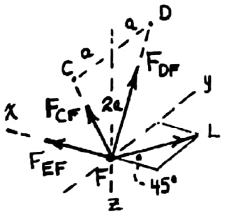
$$\Rightarrow \quad F_{AD} = \frac{\sqrt{\text{۵۳}}}{\text{۱۸}}mg \quad , \quad F_{AC} = \frac{-\text{۵}}{\text{۵۴}}mg \quad , \quad F_{AB} = -\frac{\text{۴}}{\text{۲۷}}mg$$



۶۹-۴ خرپای فضایی نشان داده شده توسط تکیه‌گاه‌های ثابت A، B و E محکم شده است و بار L با مؤلفه‌های مساوی فقط در جهت x و y به خرپا وارد می‌شود. نشان دهید تعداد اعضا برای برقراری پایداری داخلی کفایت می‌کند و این که محل قرارگیری آنها برای رسیدن به پایداری مناسب است. به علاوه نیروها در اعضای BC، CD و CE را تعیین کنید.

حل:

گره F : $\mathbf{L} = \frac{L}{\sqrt{\text{۲}}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad , \quad \mathbf{F}_{EF} = F_{EF}\mathbf{i}$



$$\mathbf{F}_{CF} = \frac{F_{CF}}{\sqrt{\text{۵}}}(-\mathbf{i} - \text{۲}\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{F}_{DF} = \frac{F_{DF}}{\sqrt{\text{۵}}}(\mathbf{j} - \text{۲}\mathbf{k})$$

$$\sum \mathbf{F} = \text{۰} \quad : \quad \mathbf{L} + \mathbf{F}_{EF} + \mathbf{F}_{CF} + \mathbf{F}_{DF}$$

$$\mathbf{i} = -\frac{L}{\sqrt{\text{۲}}} + \mathbf{F}_{EF} = \text{۰} \quad , \quad \mathbf{F}_{EF} = \frac{L}{\sqrt{\text{۲}}}$$

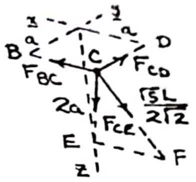
Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{array}{l} j:\ \frac{L}{\sqrt{۲}}-\frac{F_{CF}}{\sqrt{۵}}+\frac{F_{DF}}{\sqrt{۵}}=۰ \\ k:\ -\frac{۲}{\sqrt{۵}}F_{CF}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}F_{DF}=۰ \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_{CF}=\frac{\sqrt{۵}L}{۲\sqrt{۲}} \\ F_{DF}=-\frac{\sqrt{۵}L}{۲\sqrt{۲}} \end{array}$$

C گره : $\mathbf{F}_{CD}=F_{CD}\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_{BC}=F_{BC}\mathbf{i}$

$$\mathbf{F}_{CE}=\frac{F_{CE}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k})}{\sqrt{۶}}$$

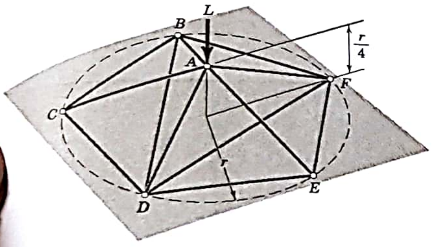
$$\mathbf{F}_{CE}=\frac{F_{CE}(\mathbf{j}+۲\mathbf{k})}{\sqrt{۵}}=\frac{L}{۲\sqrt{۲}}(\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$$



$$\sum F=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{i}:\ ۰+F_{BC}+\frac{F_{CE}}{\sqrt{۶}}=۰ \\ \mathbf{j}:\ F_{CD}+\frac{F_{CE}}{\sqrt{۶}}+\frac{L}{۲\sqrt{۲}}=۰ \\ \mathbf{k}:\ \frac{۲F_{CE}}{\sqrt{۶}}+\frac{L}{\sqrt{۲}}=۰ \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_{BC}=\frac{L\sqrt{۲}}{۴} \\ F_{CD}=۰ \\ F_{CE}=\frac{-L\sqrt{۳}}{۲} \end{array}$$

۴-۷۰. فرض کنید نقاط تکیه‌گاهی B، C، D، E و F با سطح تکیه‌گاه افقی تماسی ساده و بدون اصطکاک دارند. مطابق شکل با اعمال بار قائم L در صورت عدم حضور اعضای BD و DF نیروی تمامی اعضا چقدر خواهد بود؟ در صورت حضور BD و DF پاسخ‌ها چه تغییری خواهد کرد؟



حل:

به علت تقارن: $AB=AC=AD=AE=AF$

$$A \text{ گره } :\ \sum F_z=۰ \qquad L+۵AE\cos\left(\tan^{-1}\frac{r}{\frac{r}{۴}}\right)=۰$$

$$AE=-۰/۸۲۴۶L$$

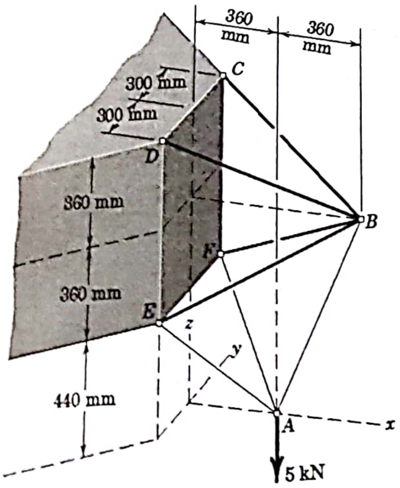
به علت تقارن: $BC=CD=DE=EF=FB$

$$E \text{ گره } :\ \sum F=۰ \quad : \quad ۲DE\cos ۵۴°-۰/۸۲۴۶L\cos\left(\tan^{-1}\frac{۱}{۴}\right)=۰$$

$$DE=EF=FB=CD=BC=۰/۶۸۱L$$

۴-۷۱. مطابق شکل قسمت $CDEF$ از این خرپای هرمی شکل، نسبت به صفحه‌ی قائم x-z متقارن است. کابل‌های AE، AF و AB نیرویی معادل $۵kN$ را تحمل می‌کنند. نیرو در عضو BE را تعیین کنید.

حل:

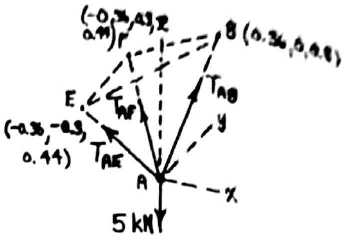


$$\mathbf{T}_{AB}=T_{AB}\frac{۰/۳۶\mathbf{i}+۰/۸\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۳۶^۲+۰/۸^۲}}=T_{AB}(۰/۴۱\mathbf{i}+۰/۹۱۲\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{AE}=T_{AE}\frac{-۰/۳۶\mathbf{i}-۰/۳\mathbf{j}+۰/۴۴\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۳۶^۲+۰/۳^۲+۰/۴۴^۲}}=T_{AE}(-۰/۵۶\mathbf{i}-۰/۴۶۷\mathbf{j}+۰/۶۸۴\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{AF}=T_{AF}\frac{-۰/۳۶\mathbf{i}+۰/۳\mathbf{j}+۰/۴۴\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۳۶^۲+۰/۳^۲+۰/۴۴^۲}}=T_{AE}(-۰/۵۶\mathbf{i}+۰/۴۶۷\mathbf{j}+۰/۶۸۴\mathbf{k})$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = ۰ \;:\; ۰/۴۱T_{AB} - ۰/۵۶T_{AE} - ۰/۵۶T_{AF} = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \;:\; -۰/۴۶۷T_{AE} + ۰/۴۶۷T_{AF} = ۰ \\ \sum F_z = ۰ \;:\; ۰/۹۱۲T_{AB} + ۰/۶۸۴T_{AE} + ۰/۶۸۴T_{AF} - ۵ = ۰\end{array}\right\} \begin{array}{l} T_{AB} = ۳/۵۴\,kN \\ T_{AE} = T_{AF} = ۱/۲۹۶\,kN\end{array}$$



$$\mathbf{T}_{BC} = T_{BC}\frac{-۰/۷۲\mathbf{i} + ۰/۳\mathbf{j} + ۰/۳۶\mathbf{k}}{\sqrt{۰/۷۲^۲ + ۰/۳^۲ + ۰/۳۶^۲}}$$

$$= T_{BC}(-۰/۸۳۸\mathbf{i} + ۰/۲۹۴\mathbf{j} + ۰/۴۱۹\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{BE} = T_{BE}(-۰/۸۳۸\mathbf{i} - ۰/۲۹۴\mathbf{j} - ۰/۴۱۹\mathbf{k})$$

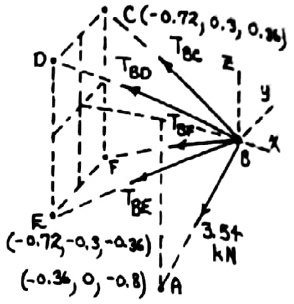
$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}(-۰/۸۳۸\mathbf{i} - ۰/۲۹۴\mathbf{j} + ۰/۴۱۹\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{BF} = T_{BF}(-۰/۸۳۸\mathbf{i} + ۰/۲۹۴\mathbf{j} - ۰/۴۱۹\mathbf{k})$$

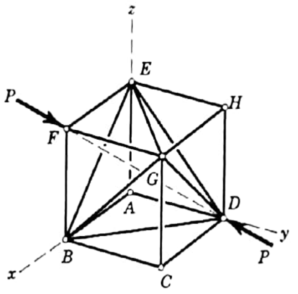
با توجه به تقارن : $T_{BD} = T_{BC}$ ، $T_{BE} = T_{BF}$

$$\sum \mathbf{F} = ۰ \;\Rightarrow\; T_{BD} = T_{BC} = ۱/۴۹۱\,kN$$

$$T_{BE} = T_{BF} = -۲/۳۶\,kN$$

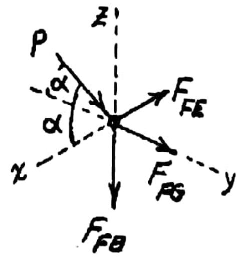


۴-۷۲. مطابق شکل یک خرپای فضایی به شکل مکعب با ۶ عضو قطری ساخته شده است. تحقیق کنید که خرپا از لحاظ داخلی پایدار باشد. چنانچه به نقاط F و D از خرپا در راستای قطر FD نیروهای فشاری P وارد شود، نیروها در اعضای EF و EG را تعیین کنید.



حل:

گره F : $\alpha = \cos^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، با توجه به تقارن : $F_{FE} = F_{FG} = F_{FB} = F$



$$\sum \mathbf{F} = ۰ \;:\; F(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + \frac{p}{\sqrt{۳}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = ۰$$

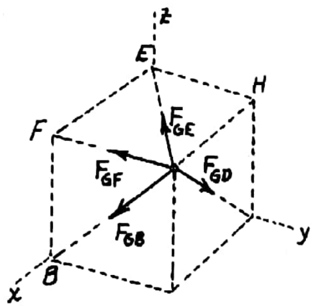
$$F = -\frac{p}{\sqrt{۳}} \quad , \quad F_{FE} = -\frac{p}{\sqrt{۳}}$$

با بررسی، نیروی گره‌های C ،A و H صفر است و با توجه به تقارن نیروها در D: $F_{BD} = F_{GD} = F_{ED} = R$ همچنین با توجه به تقارن $F_{GE} = F_{GB}$

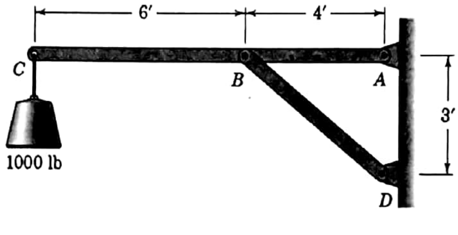
گره G : $\mathbf{F}_{GF} = F_{GF}(-\mathbf{j}) = -\frac{p}{\sqrt{۳}}(-\mathbf{j})$

$$\sum \mathbf{F} = ۰ : \; -\frac{p}{\sqrt{۳}}(-\mathbf{j}) + \frac{F_{GE}}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \frac{F_{GB}}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \frac{F_{GD}}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{i} - \mathbf{k}) = ۰$$

$$(\sum F_y = ۰) \;\Rightarrow\; \left(\frac{p}{\sqrt{۳}} - \frac{۲F_{GE}}{\sqrt{۲}}\right) = ۰ \quad , \quad F_{GE} = \frac{p}{\sqrt{۶}}$$



$$\left.\begin{array}{l} m = ۱۸ \quad , \quad j = ۸ \\ (m + ۶) = ۲۴ = (۳j = ۲۴)\end{array}\right\} \Rightarrow$$ بنابراین خرپا از لحاظ داخلی پایدار است.

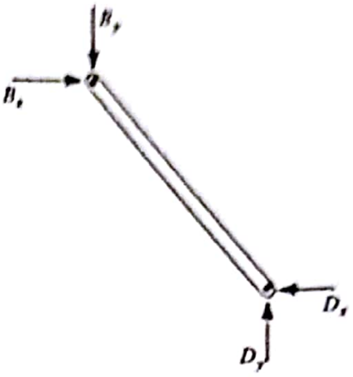


۴-۷۳. مقدار عکس‌العمل لولای B را تعیین کنید: (الف) با صرف‌نظر از این واقعیت که BD یک عضو دو نیرویی است و (ب) با دانستن این واقعیت که BD عضوی دو نیرویی است.

Scanned by CamScanner

حل:

الف)



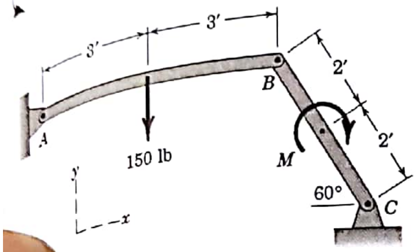
ب)

$\sum M_A = ۰ \Rightarrow B_y = ۲۵۰۰\ lb$

$\sum M_D = ۰ \Rightarrow B_x = ۳۳۳۳/۳\ lb$

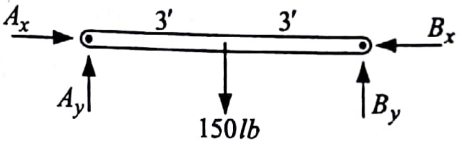
$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = ۴۱۷۰\ lb$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۰۰۰(۱۰) - B\left(\frac{۳}{۵}\right)(۴) = ۰ \quad , \quad B = ۴۱۷۰\ lb$



۴-۷۴. به ازای چه مقدار کوپل ساعتگرد M، مؤلفه‌ی افقی A_x از عکس‌العمل لولای A صفر خواهد شد؟ اگر کوپل M در جهت پادساعتگرد اعمال شود، مقدار A_x چقدر خواهد بود؟

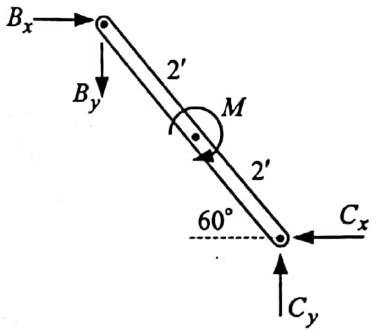
حل:



$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad B_y(۶) - ۱۵۰(۳) = ۰ \quad , \quad B_y = ۷۵ lb$

$A_x = ۰ \Rightarrow \sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = ۰$

$\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \quad : \quad B_y(۴\cos ۶۰^\circ) - M = ۰ \quad , \quad M = ۱۵۰\ lb.ft$

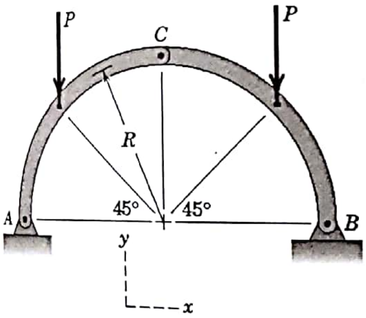


قسمت دوم:

$\sum M_C = ۰ \quad : \quad ۱۵۰ + B_y(۴\cos ۶۰^\circ) - B_x(۴\sin ۶۰^\circ) = ۰$

$B_x = ۸۶/۶ lb$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x = B_x = ۸۶/۶ lb$



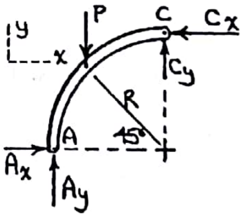
۴-۷۵. مؤلفه‌های تمام نیروهای اعمالی روی هر عضو از قاب بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:

با توجه به تقارن سازه $\Rightarrow C_y = ۰$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y = P$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \ : \ -PR(۱ - \cos ۴۵^\circ) + C_x(R) = ۰$

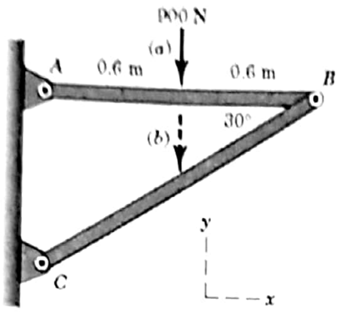


$C_x = ۰/۲۹۳ P$

نیروهای عضو BC نیز قرینه‌ی AC است.

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰/۲۹۳ P$

Scanned by CamScanner



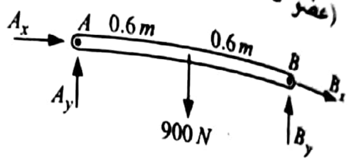
۷۶-۴. نیروی (مقدار و جهت) اعمالی توسط عضو BC روی عضو AB را تعیین کنید: (الف) اگر بار $۹۰۰N$ در مرکز AB وارد شود و (ب) اگر بار $۹۰۰N$ در مرکز BC وارد شود.

حل:

(الف)

(عضو BC دو نیرویی)

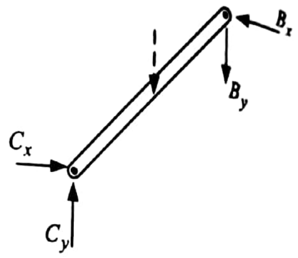
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = ۰ \ : \ ۹۰۰(۰/۶) - B(\sin ۳۰°)(۱/۲) = ۰$$



$B = ۹۰۰N$

نیروی BC روی AB $\quad F = ۹۰۰(\cos ۳۰° \mathbf{i} + \sin ۳۰° \mathbf{j}) \ N$

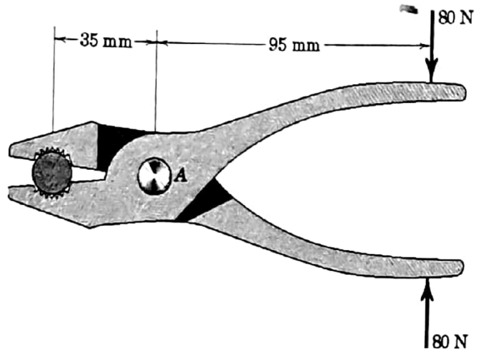
ب)



$$\Sigma M_A = ۰ \ : \ B_y = ۰$$

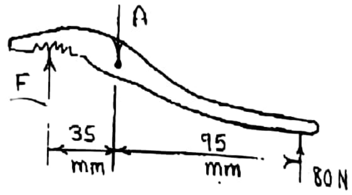
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = ۰ \ : \ ۹۰۰(۰/۶) - B_x(۱/۲ \tan ۳۰°) = ۰ \ , \ B_x = ۷۷۹N$$

نیروی BC روی AB $\quad F = ۷۷۹\mathbf{i} \ N$



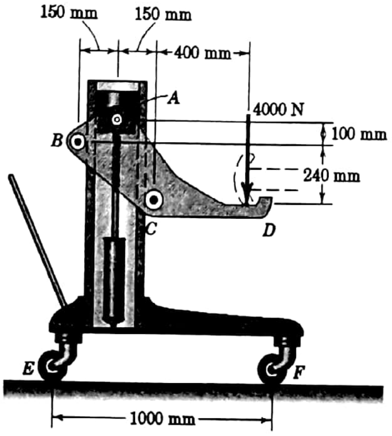
۷۷-۴. در صورت اعمال نیروی فشاری $۸۰N$ بر دسته‌ی انبردست، نیروی F را که هر کدام از فک‌ها به میله‌ی دایره‌ای وارد می‌کند، تعیین کنید. همچنین نیروی تحمل شده توسط لولای A را محاسبه کنید.

حل:



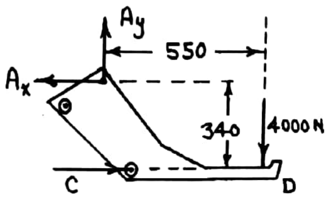
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = ۰ \ : \ ۸۰(۹۵) - F(۳۵) = ۰ \ , \ F = ۲۱۷ \ N$$

$$+\uparrow \Sigma F = ۰ \ : \ ۲۱۷ - A + ۸۰ = ۰ \ , \ A = ۲۹۷N$$



۷۸-۴. جک سپر اتومبیل برای تحمل بار رو به پایین $۴۰۰۰N$ طراحی شده است. نمودار جسم آزاد BCD را رسم کرده و نیروی تحمل شده توسط غلتک C را تعیین کنید. توجه کنید که غلتک B با ستون قائم تماسی ندارد.

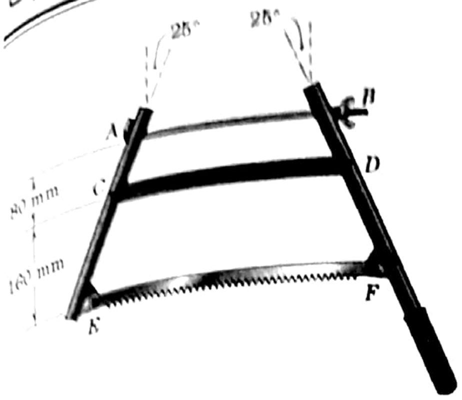
حل:



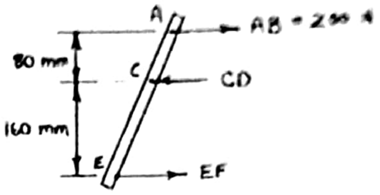
$$\Sigma M_A = ۰ \ : \ C(۳۴۰) - ۴۰۰۰(۵۵۰) = ۰ \ , \ C = ۶۴۷۰N$$

Scanned by CamScanner

۷۹-۴ پیچ تنظیم H از این اره‌ی چوب بری نالمو، تا جایی که نیروی کششی در میله‌ی AB به $200N$ برسد، محکم شده است. نیرو در تیغه‌ی EF و مقدار F نیروی تحمل شده توسط لولای C را تعیین کنید.



حل:



$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = 0 \quad : \quad -200(80) + EF(160) = 0$

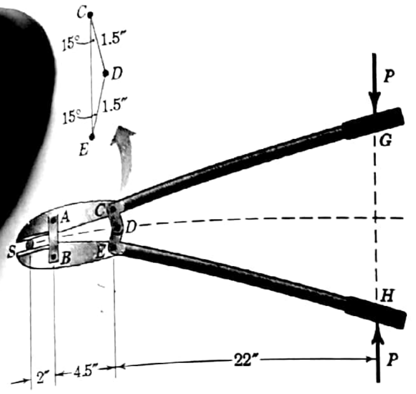
$EF = 100N \ (T)$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F = 0 \ : \ 200 - CD + 100 = 0 \quad , \quad CD = 300N$

بنابراین نیروی تحمل شده توسط لولای C

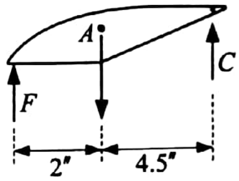
$F = 300N$

۸۰-۴ نیروهای P به دسته‌های یک برش‌دهنده‌ی مخصوص کارهای سنگین اعمال شده است. نیروی برش‌دهنده‌ی F که به میله‌ی S وارد می‌شود را برحسب نیروی P تعیین کنید.



حل:

چون عضو AB دو نیرویی بوده و نیروی آن در راستای قائم است، نیروی C نیز در راستای قائم است:

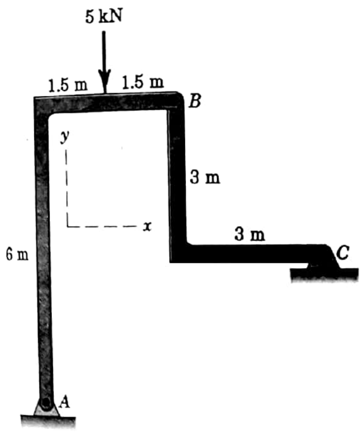


قطعه DCG : $\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_D = 0 \quad : \quad C(1.5\sin 15°) - p(22 - 1.5\sin 15°) = 0$

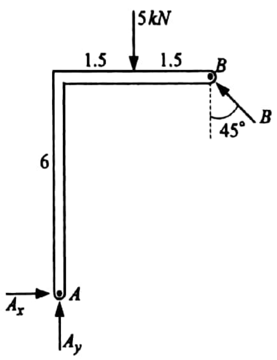
$C = 55.67P$

$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_A = 0 \quad : \quad C(4.5) - F(2) = 0 \quad , \quad F = 125.3P$

۸۱-۴ مؤلفه‌های تمام نیروهای اعمالی روی هر عضو از قاب بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:



BC عضوی دو نیرویی است.

$\circlearrowleft + \; \sum M_A = ۰ \quad : \quad B\cos ۴۵^\circ(۲) + B\sin ۴۵^\circ(۶) - ۵(۱/۵) = ۰$

$B = ۱/۱۷۸۵\,kN$

$\sum F_x = ۰ \;\Rightarrow\; A_x = ۰/۸۳۳\,kN$ به سمت راست

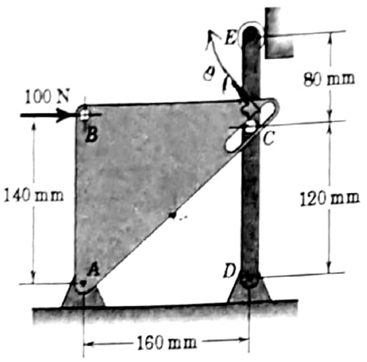
$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۲/۱۶\,kN$ به سمت بالا

$B_x = ۰/۸۳۳\,kN$ به سمت چپ

$B_y = ۰/۸۳۳\,kN$ به سمت بالا

با توجه به اینکه BC دو نیرویی است، نیروهای B_x و B_y، در نقطه C و قرینه‌ی آن در نقطه‌ی B روی عضو BC وارد می‌شود.

۸۲-۴ مقدار نیروی وارد شده به لولای D را محاسبه کنید. خار C در DE ثابت شده است و نیرویی عمود بر جهت شیار صیقلی در صفحه‌ی مثلث را تحمل می‌کند.

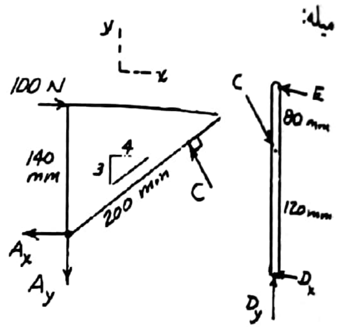


حل:

مثلث:

$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۲۰۰C - ۱۴۰(۱۰۰) = ۰ \quad , \quad C = ۷۰N$$

میله:



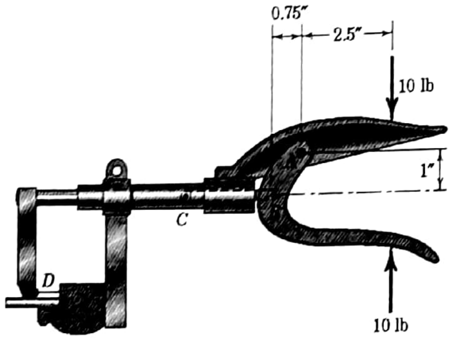
$$\sum M_D = ۰ \quad : \quad ۲۰۰E - ۷۰\left(\frac{۳}{۵}\right)۱۲۰ = ۰ \quad , \quad E = ۲۵/۲N$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad D_x + ۲۵/۲ - ۷۰\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۰ \quad , \quad D_x = ۱۶/۸N$$

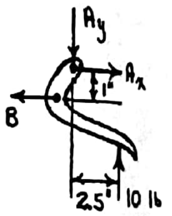
$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad D_y - ۷۰\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۰ \quad , \quad D_y = ۵۶N$$

$$D = \sqrt{D_x^۲ + D_y^۲} = ۵۸/۵N$$

۸۳-۴ دستگاه نشان داده شده برای کوبیدن پونز در چوب قاب عکس طراحی شده است. در اثر اعمال نیروی فشاری $۱۰lb$ بر دسته‌ها، نیروی F اعمال شده به پونز را تعیین کنید.



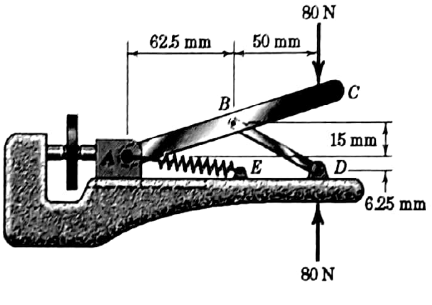
حل:



$$\circlearrowleft + \; \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۱۰(۲/۵) - B(۱) = ۰ \quad , \quad B = ۲۵lb$$

نیروی F روی تخته $= ۲۵\;lb$

۸۴-۴ یک زوج نیروی $۸۰N$ به دسته‌های دستگاه پرچ کوچکی اعمال می‌شود. قطعه‌ی A می‌تواند با اصطکاک ناچیز در شیار تعبیه شده در قسمت پایین ابزار بغلتد. از نیروی ناچیز فنر برگرداننده AE صرف‌نظر کرده و نیروی P اعمال شده به حفره را تعیین کنید.



حل:

Scanned by CamScanner

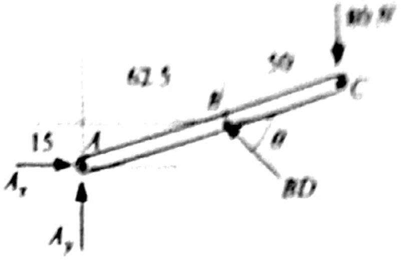
عضو BC : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۱۵+۶/۲۵}{۵۰}\right) = ۲۳°$

$\sum M_A = ۰$: $-۸(۱۱۲/۵) + (BD\cos\theta)(۱۵) + (BD\sin\theta)(۶۲/۵) = ۰$

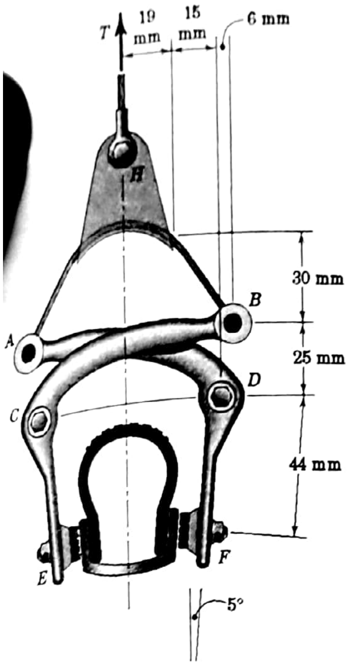
$BD = ۱۲۵/۲۳\,N$

$\sum F_x = ۰$: $A_x - BD\cos\theta = ۰$, $A_x = ۲۱۷\,N$

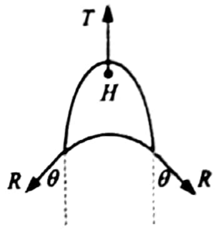
$P = ۲۱۷\,N$

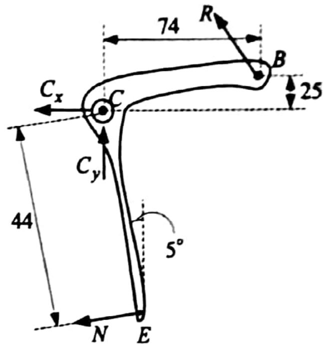


۲-۸۵ قسمت‌هایی از سیستم کشش مرکزی ترمز یک دوچرخه در تصویر نشان داده شده است. دو بازوی ترمز می‌توانند آزادانه حول لولاهای ثابت C و D بچرخند (تکیه‌گاه ترمز نشان داده نشده است). اگر نیروی کششی اعمالی به کابل ترمز در H معادل $T = ۱۶۰N$ باشد، نیروهای عمودی را که لنت‌های ترمز در E و F به چرخ وارد می‌کنند، تعیین کنید.



حل:





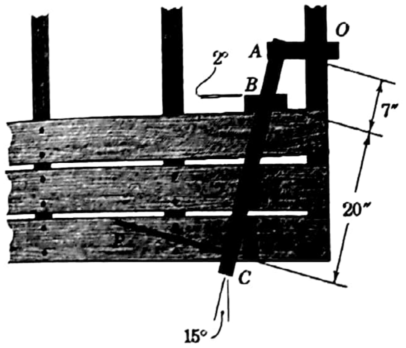
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۱۵+۶}{۳۰}\right) = ۳۵°$

$+\downarrow \sum F_y = ۰$: $۲R\cos ۳۵° - T = ۰$, $R = ۹۷/۶۶N$

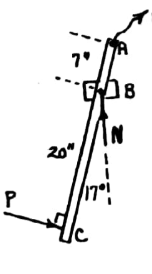
$\circlearrowleft + \sum M_C = ۰$: $R\cos ۳۵°(۷۴) + R\sin ۳۵°(۲۵) - N(۴۴) = ۰$

$N = ۱۶۶/۴\,N$

۴-۸۶ دستگاه زیر برای صاف کردن تخته‌های تاب‌دار قبل از کوبیدن میخ‌ها به تیرهاست. یک بست تحتانی (پنهان) در O وجود دارد که قسمت OA را به تیر محکم می‌کند، بنابراین لولای A ثابت درنظر گرفته شود. مطابق شکل در اثر اعمال نیروی P عمود بر دسته‌ی ABC نیروی عمودی N را که به تخته‌ی خم شده نزدیک نقطه‌ی B وارد می‌شود، تعیین کنید. از اصطکاک صرف‌نظر کنید.



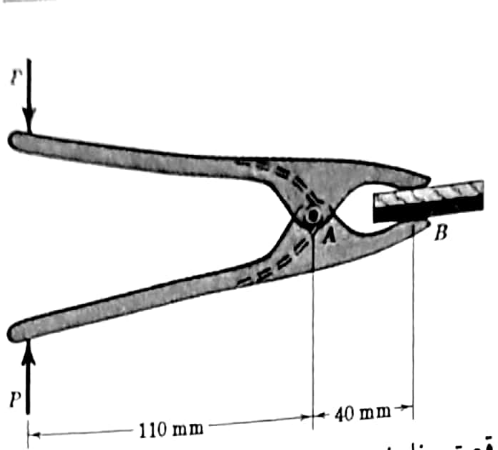
حل:



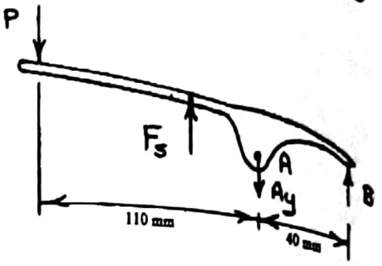
$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰$: $P(۲۷) - N\sin ۱۷°(۷) = ۰$, $N = ۱۳/۱۹P$

Scanned by CamScanner

۸۷-۴ در انبری ... حول لولای A پیچیده شده و دو انتهای فنر به سطوح داخلی دسته‌ها فشار آورده و نیروی موردنیاز برای گرفتن قطعات در فک‌ها را مهیا می‌کند. در موقعیت موردنظر، نیرویی معادل $P=۲۵N$ برای رهایی فک نیاز است. نیروی فشاری در B را تعیین کنید اگر $P=۰$ باشد.



حل:



(نیروی فنر F_s در موقعیتی نامشخص عمل می‌کند.): دسته‌ی بالایی

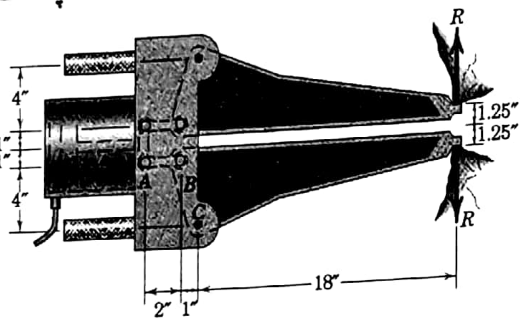
موقعی که فک رها می‌شود $\Rightarrow$ $B=۰$

$\circlearrowleft + \sum M_A=۰ \; : \; p(۱۱۰)-M_{F_s}=۰ \;,\; M_{F_s}=۲۵(۱۱۰)=۲۷۵۰N.mm$

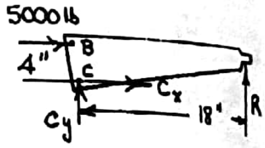
($M_{F_s} \Rightarrow$ لنگر ناشی از نیروی فنر)

$P=۰ \quad , \quad \sum M_A=۰ \quad : \quad B(۴۰)-۲۷۵۰=۰ \quad , \quad B=۶۸/۸N$

۸۸-۴ فک‌های نجات، وسیله‌ای است که امدادگران برای باز کردن لاشه‌ی ماشین‌های تصادفی جهت کمک‌رسانی برای آزاد کردن مصدومان حادثه استفاده می‌کنند. چنانچه فشاری معادل $۵۰۰lb/in^۲$ پشت پیستون P به مساحت $۲۰in^۲$ تولید شود، در موقعیت موردنظر نیروی قائم R را که توسط دهانه‌ی جک به لاشه‌ی ماشین وارد می‌شود، تعیین کنید. توجه کنید که در این وضعیت، اتصال AB و همتای مقابل آن هر دو به صورت افقی قرار دارند.



حل:



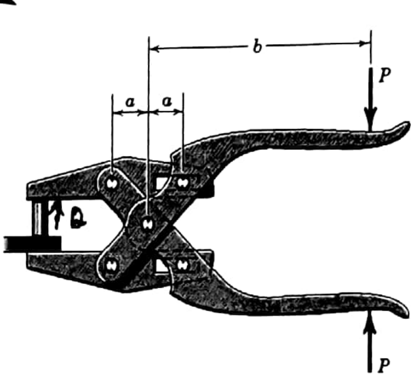
نیروی پیستون $=(۵۰۰)(۲۰)=۱۰۰۰۰lb$

نیرو در اتصال $AB = \dfrac{۱۰۰۰۰}{۲}=۵۰۰۰lb$

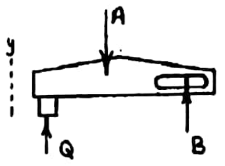
فک پایین:

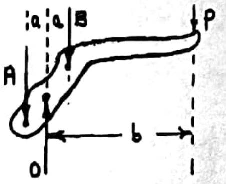
$\circlearrowleft + \sum M_C=۰ \quad : \quad R(۱۸)-۵۰۰۰(۴)=۰ \quad , \quad R=۱۱۱۱lb$

۸۹-۴ برای دستگاه پانچ کاغذ نشان داده شده، نیروی پانچ Q را برحسب نیروی فشاری P اعمالی بر دسته‌ها بیابید.



حل:



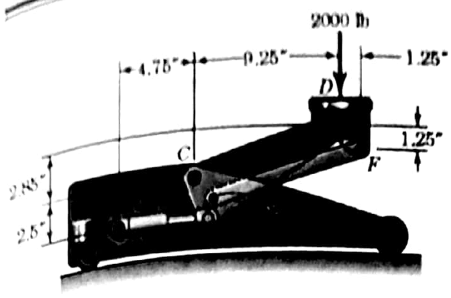


(دسته) $\quad \sum M_O=۰ \quad : \quad Pb=(A-B)a$

(فک) $\quad \sum F_y=۰ \quad : \quad Q=A-B$

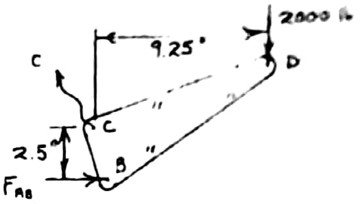
$$\left.\begin{aligned} Pb&=Qa \\ Q&=P\frac{b}{a}\end{aligned}\right.$$

Scanned by CamScanner



۴-۹۰. قسمت‌هایی از یک جک که روی زمین قرار گرفته شده، در تصویر نشان داده شده است. چهار ضلعی $CDEF$ یک متوازی‌الاضلاع است. مطابق شکل، در صورت اعمال نیروی $۲۰۰۰lb$، نیروی داخل استوانه‌ی هیدرولیکی AB را محاسبه کنید. نیروی میله‌ی EF چقدر است؟

حل:

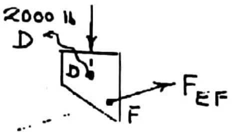


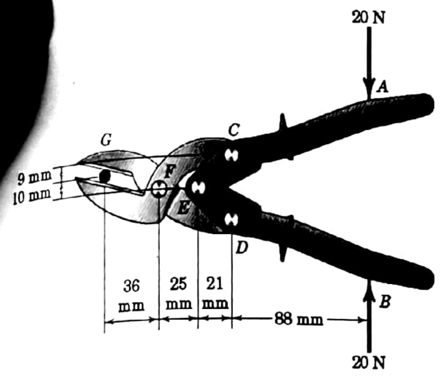
عضو BCD : $\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \; : \; F_{AB}(۲/۵) - ۲۰۰۰(۹/۲۵) = ۰$

$F_{AB} = ۷۴۰۰ \, lb$

نیروی عضو EF صفر است.

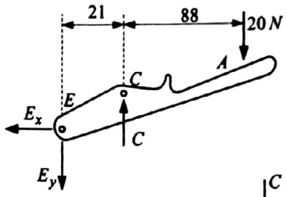
برای تعادل باید F_{EF} از D بگذرد، که غیرممکن است پس $EF = ۰$



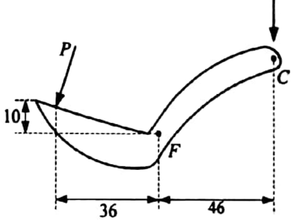


۴-۹۱. نیروی P واردشده روی شاخه‌ی کوچک واقع در G را تعیین کنید. توجه کنید که دسته‌ها نسبت به خط افق متقارن‌اند، ولی فک‌ها خط تقارنی ندارند.

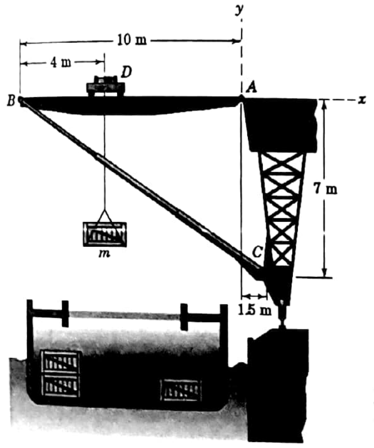
حل:



$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ \quad : \quad C(۲۱) - ۲۰(۱۰۹) = ۰ \quad , \quad C = ۱۰۳/۸۱ \; N$



$\circlearrowleft + \sum M_F = ۰ \quad : \quad P(\sqrt{۱۰^۲ + ۳۶^۲}) - C(۴۶) = ۰ \quad , \quad P = ۱۲۷/۸ \; N$



۴-۹۲. یک پایه‌ی بزرگ برای جرثقیل متحرک به جهت بارگذاری روی کشتی طراحی شده است. تیر AB جرمی معادل $۸Mg$ داشته و مرکز ثقل آن در مرکزش واقع است. بازوی BC جرمی معادل $۲Mg$ داشته و مرکز ثقل آن به فاصله‌ی $۵m$ از انتهای C قرار دارد. واگن D به جرم $۲۰۰۰kg$ نسبت به خط بار خود متقارن است. چنانچه $m = ۲۰Mg$ باشد، مقدار نیرویی که لولای A تحمل کند، را تعیین کنید.

حل:

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \; : \; ۸g(۵) + ۲g(۶) + ۲۰g(۶) - B_y(۱۰) = ۰ \; , \; B_y = ۱۷/۲g \; kN$

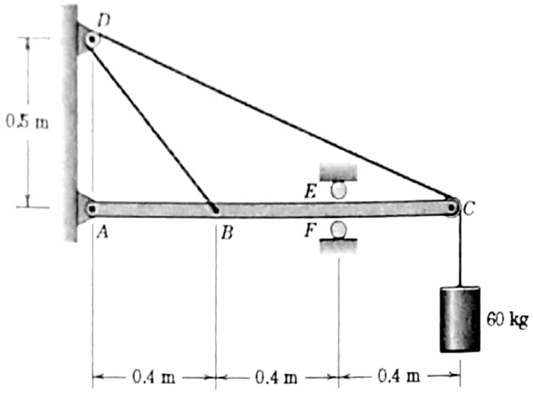
Scanned by CamScanner

$$\sum M_C = ۰ \quad : \quad ۲g(۵\sin ۵۸/۶۷^\circ) + ۱۷/۲g(۱۱/۵) - B_۱(۷) = ۰$$

$$B_۱ = ۲۹/۲۸g \ kN$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_x = ۰ \ \Rightarrow \ A_x = B_x \\ \sum F_y = ۰ \ \Rightarrow \ A_y = ۳۰g - ۱۷/۲g = ۱۲/۸g \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۳۲/۱۴g \ \ kN \\ A = ۳۲/۱۴(۹/۸۱) = ۳۱۵ \ kN \end{array}$$

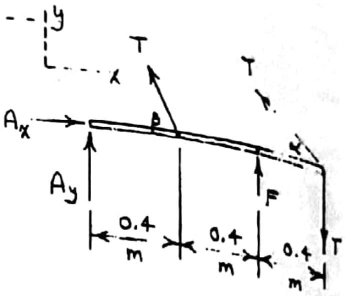
۹۳-۴. مقدار عکس‌العمل لولای A و مقدار و راستای عکس‌العمل فلکه‌ها را تعیین کنید. قرقره‌های D و C کوچک هستند.



حل:

$$T = ۶۰(۹/۸۱) = ۵۸۹ N$$

$$\alpha = \tan^{-۱}\left(\frac{۰/۵}{۱/۲}\right) = ۲۲/۶^\circ$$



$$\beta = \tan^{-۱}\left(\frac{۰/۵}{۰/۴}\right) = ۵۱/۳^\circ$$

$$\circlearrowright + \ \sum M_A = ۰ \quad : \quad T\sin\beta(۰/۴) + T\sin\alpha(۱/۲) - T(۱/۲) + F(۰/۸) = ۰$$

$$F = ۳۱۸ \ N$$

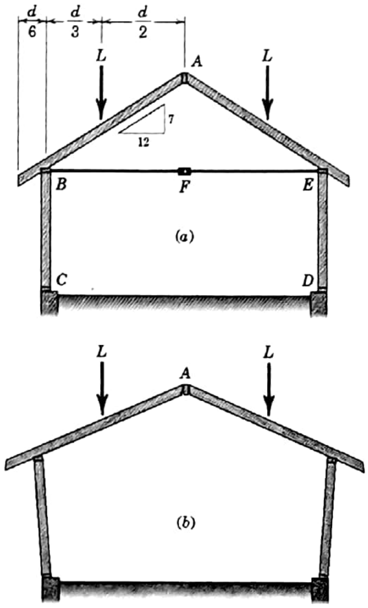
تماس در غلتک پایینی:

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x - T\cos\beta - T\cos\alpha = ۰ \quad , \quad A_x = ۹۱۱N$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad A_y + T\sin\beta + T\sin\alpha - T + F = ۰ \quad , \quad A_y = -۴۱۱N$$

$$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۹۹۹N$$

۹۴-۴. تصویر زیر یک مسئله‌ی رایج در ارتباط با سازه‌های ساده را نشان می‌دهد. مطابق شکل تحت بارهای L تیرهای مایل می‌توانند دوران کنند، لبه‌ی تیر در A می‌تواند پایین بیاید و دیوارهای BC و DE می‌توانند به خارج دوران کنند. این پدیده گاهی اوقات به وضوح در سازه‌های چوبی مزارع قدیمی مشاهده شده است، به طوری که با نگاه به نمای جانبی ساختمان، تیر واقع در رأس سقف سازه شکم انداخته است. یک روش ساده در تصویر (a) نشان داده شده است، یک زنجیر یا کابل بین نقاط B و E کشیده و محکم شده است. پیچ تنظیم F بسته می‌شود تا کشش مناسب در کابل به وجود آید، این کار از تمایل دیوارها به بیرون جلوگیری می‌کند. به ازای مقادیر داده شده از فاصله‌ی d و بارهای نقطه‌ای L (که از بارهای گسترده نظیر تیرهای مایل و وزن سقف و بارهای اضافی شبیه برف نتیجه می‌شود)، کشش موردنیاز T را برای اینکه نیروهای رو به بیرون روی دیوارها در نقاط B و E وجود نداشته باشد، محاسبه کنید. فرض کنید تکیه‌گاه تیرهای مایل، کاملاً افقی بوده و تمامی اتصالات می‌توانند آزادانه بچرخند.



حل:

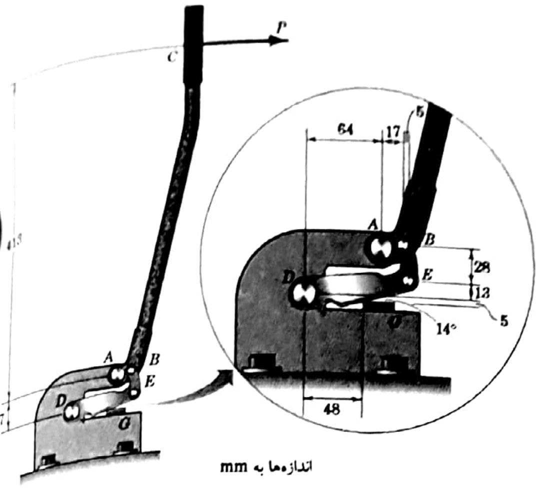
Scanned by CamScanner

فرض شود با بستن F کشش مؤثر کابل به تیر منتقل می‌شود.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T = A_x$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad : \quad -L\left(\frac{d}{2}\right) + T\left(\frac{5d}{6}\right)\left(\frac{7}{12}\right) = 0 \quad , \quad T = \frac{24}{35}L$$

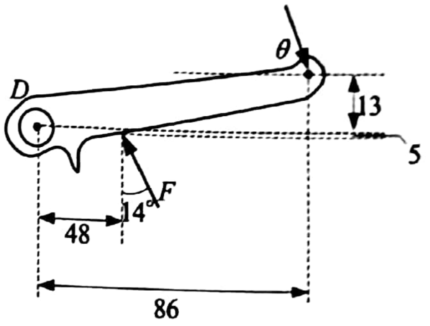
۴-۹۵. در صورت اعمال نیروی P به دسته‌ی این دستگاه برش، نیروی برش دهنده‌ی F که تیغه‌ی DE به میله در نقطه‌ی G وارد می‌کند برحسب P تعیین کنید. فرض کنید نیروی F بر لبه‌ی پایینی تیغه‌ی DE عمود است.



حل:

BE یک عضو دو نیرویی است و نیروی آن در راستای خودش است یعنی با راستای افق زاویه‌ی θ را می‌سازد.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{28}{5} = 79{,}87°$$



قطعه ABC :

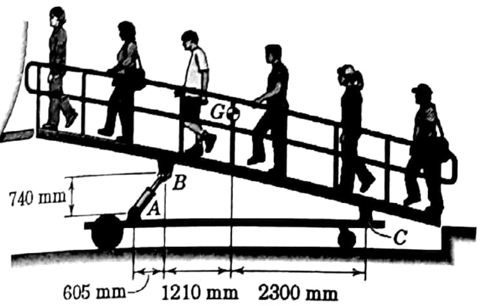
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0 \quad : \quad BE\cos\theta(4) + BE\sin\theta(17) - P(412) = 0$$

$$BE = 23{,}68P$$

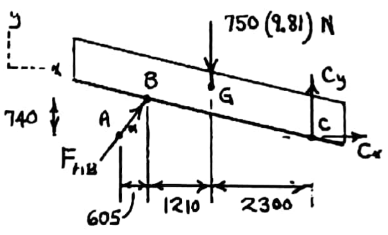
$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0 \quad : \quad F\cos14°(48) - F\sin14°(5) - BE\cos\theta(13) - BE\sin\theta(86) = 0$$

$$F = 45{,}4P$$

۴-۹۶. سطح شیب‌داری برای سوار شدن مسافران در یک هواپیمای مسافربری کوچک استفاده شده است. مجموع جرم مسافران و سطح شیب‌دار $750kg$ و مرکز جرم آن در G واقع است. نیروی استوانه‌ی هیدرولیکی AB و عکس‌العمل لولای C را تعیین کنید.



حل:



$$\alpha = \tan^{-1}\frac{740}{605} = 50{,}7°$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad : \quad 750(9{,}81)(2300) - F_{AB}\sin\alpha(4115) = 0$$

$$F_{AB} = 5310\ N$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad 5310\cos\alpha + C_x = 0 \quad , \quad C_x = -3360\ N$$

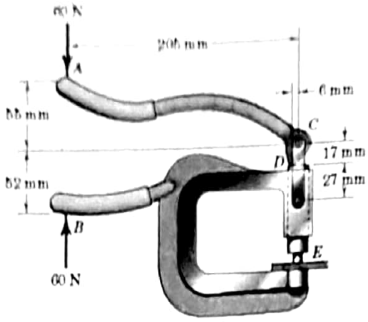
$$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad 5310\sin\alpha - 750(9{,}81) + C_y = 0 \quad , \quad C_y = 3250\ N$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 4670\ N$$

۴-۹۷. دستگاه پرس دستی برای کارهایی نظیر پرچ کردن و منگنه زدن مورد استفاده قرار می‌گیرد. در صورت

Scanned by CamScanner

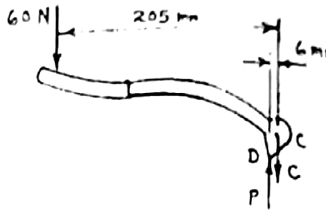
اعمال نیروی $۶۰N$ به دسته‌ی دستگاه، نیروی P اعمال شده به ورقه‌ی فلزی E چقدر خواهد بود؟



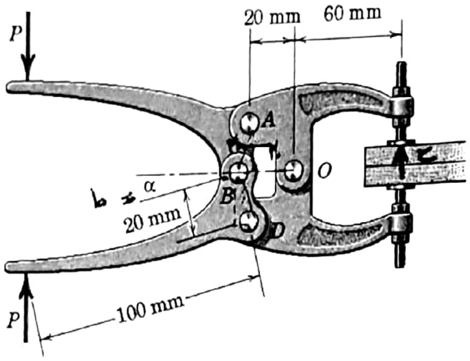
حل:

دسته‌ی بالایی : $\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \quad : \quad ۶۰(۲۰۵) - P(۶) = ۰$

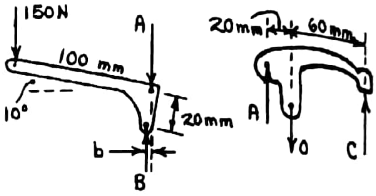
$P = ۲۰۵۰ N$



۴-۹۸. از انبرهای ضامن‌دار برای اهداف گوناگون گیره‌ای استفاده می‌شود. در این موقعیت دسته، $\alpha = ۱۰°$ و نیروی وارد شده بر دسته $P = ۱۵۰N$ است. نیروی گیره‌ای C تولید شده را محاسبه کنید. توجه کنید که لولاهای A و D نسبت به خط افقی مرکزی متقارن‌اند.



حل:

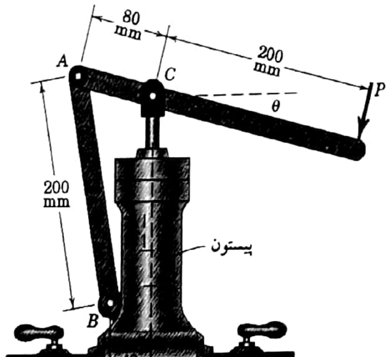


(دسته) $\sum M_B = ۰ : ۱۵۰[۱۰۰\cos ۱۰° - ۲۰\sin ۱۰°] - A[۲۰\sin ۱۰°] = ۰$

$A = ۴۱۰۳ \ N$

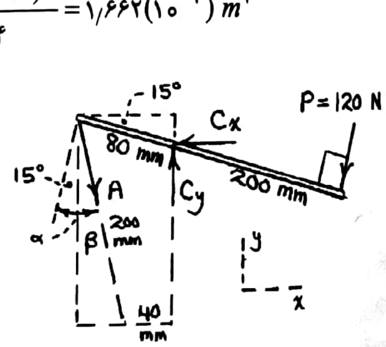
(فک) $\sum M_o = ۰ \quad : \quad ۶۰C - ۲۰(۴۱۰۳) = ۰ \quad , \quad C = ۱۳۶۸ \ N$

۴-۹۹. تصویر نشان داده شده یک پمپ دستی فشار قوی است که برای افزایش فشار روغن در یک خط هیدرولیک استفاده می‌شود. چنانچه تحت نیروی $P = ۱۲۰N$ و در حالت $\theta = ۱۵°$ دسته در حالت تعادل باشد، فشار p که روغن روی پیستونی به قطر $۴۶mm$ وارد می‌کند، را تعیین کنید. (فشار وارده بر سر پیستون همان فشار اتمسفر است.)



حل:

$$\text{مساحت پیستون} = \frac{\pi d^۲}{۴} = \frac{\pi(۰/۰۴۶)^۲}{۴} = ۱/۶۶۲(۱۰^{-۳}) \ m^۲$$



$$\sin\beta = \frac{(۸۰\cos ۱۵° - ۴۰)}{۲۰۰} \Rightarrow \beta = ۱۰/۷۴°$$

$\alpha = \beta + ۱۵° = ۲۵/۷۴°$

$\sum M_C = ۰ \quad : \quad ۱۲۰(۲۰۰) - A\cos ۲۵/۷(۸۰) = ۰ \quad , \quad A = ۳۳۳ N$

$\sum F_y = ۰ \ : C_y - ۱۲۰\cos ۱۵° - ۳۳۳\cos ۱۰/۷۴° = ۰ \ , \ C_y = ۴۴۳ \ N$

Scanned by CamScanner

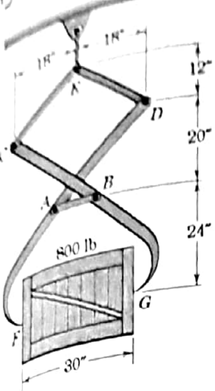
p (مساحت) $= C_y$, $p = \frac{۲۲۲}{۱٫۶۶۲(۱۰^{-۲})} = ۲۶۷(۱۰^{۳})\ N/m^{۲}$

پیستون ...

$p = ۲۶۷\ kPa$

۱۰۰-۴. انبرهای بلندکننده بدون تماس با یکدیگر از روی هم عبور کرده‌اند. نیرو در میله‌ی اتصال AB را حساب کنید.

حل:



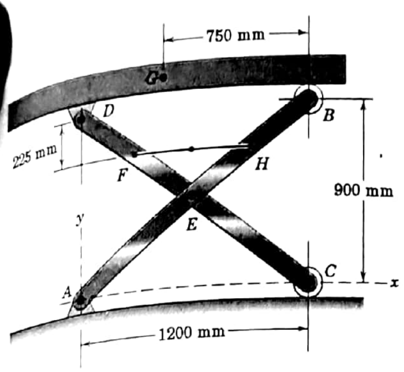
برای کل انبر : $D_y = \frac{۱}{۲}(۸۰۰) = ۴۰۰\ lb = F_y$

عضو ED , $D_x = \frac{۱۸}{۱۲} D_y = \frac{۱۸}{۱۲}(۴۰۰) = ۶۰۰ lb$

عضو DF , $\sum M_F = ۰$: $F_{AB}(۲۴) - ۶۰۰(۴۴) - ۴۰۰(۱۸+۱۵) = ۰$

$F_{AB} = ۱۶۵۰\ lb\ T$

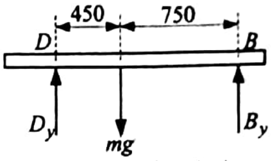
۱۰۱-۴. وزن صفحه‌ی این میزکار تاشو $۵۰kg$ و مرکز ثقل آن در G قرار دارد. مؤلفه‌های x و y نیرویی که لولای E تحمل می‌کند، را محاسبه کنید.



حل:

صفحه :

$\sum M_D = ۰$: $B_y(۱۲۰۰) - mg(۴۵۰) = ۰$



اندازه‌ها به mm

$B_y = ۱۸۳٫۹۴\ N$, $\sum F_y = ۰ \Rightarrow D_y = ۳۰۶٫۵۶\ N$

برای کل شکل بدون صفحه : $\sum M_A = ۰ \Rightarrow C_y = ۱۸۳٫۹۴\ N$ (↑)

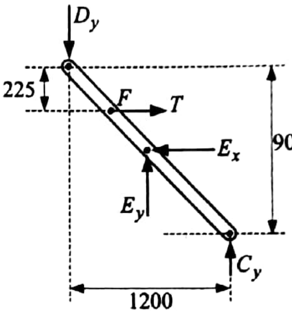
($\sum F_x = ۰ \Rightarrow D_x = ۰$:برای صفحه چون نیروی افقی به آن وارد نمی‌شود)

عضو DEC :

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow E_y = ۱۲۲٫۶ N$

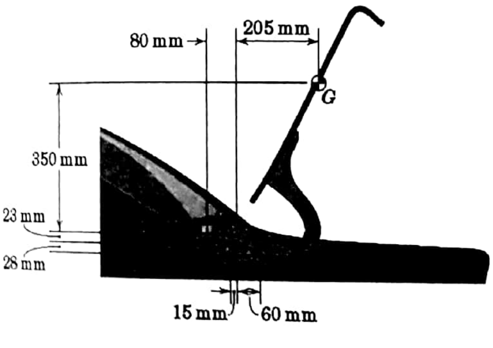
$\sum M_F = ۰$: $۳۰۶٫۵۶(۳۰۰) + ۱۸۳٫۹۴(۹۰۰) + ۱۲۲٫۶(۳۰۰) - E_x(۲۲۵) = ۰$

$E_x = ۱۳۰۸\ N$



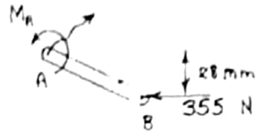
اندازه‌ها به mm

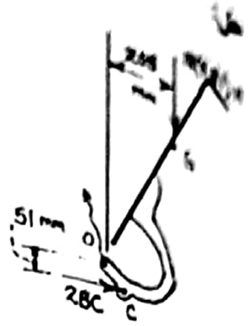
۱۰۲-۴. در تصویر مربوط به درب صندوق عقب یک ماشین، قسمت‌هایی از مکانیزم بارگذاری فنری نشان داده شده است. برای تعادل موردنظر، گشتاور M_A را که هر کدام از دو فنر پیچشی موجود در A باید به میله‌ی اتصال AB وارد کنند، تعیین کنید. وزن درب $۱۸kg$ و مرکز ثقل آن در G واقع است. تأثیر وزن اعضای دیگر ناچیز است.



Scanned by CamScanner

$\circlearrowleft \sum M_O = ۰ \quad : \quad ۲BC(۵۱) - ۱۸(۹/۸۱)(۲۰۵) = ۰ \quad , \quad BC = ۲۵۵\ N$

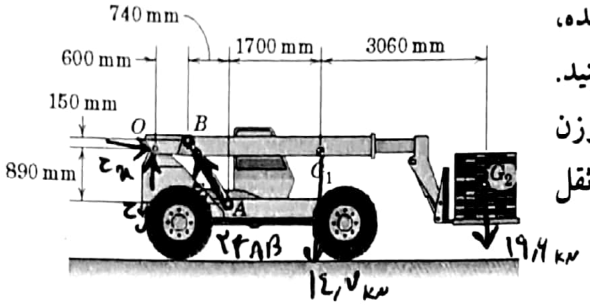




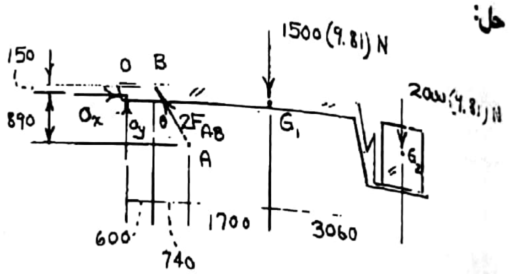
هر کدام از اتصالات : $\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad M_A - ۳۵۵(۲۸) = ۰$

$M_A = ۹۹۴۰\ N.mm$ یا $۹/۹۴\ N.m$ پادساعتگرد

۱۰۳-۴. ماشین نشان داده شده برای حمل اجسام سنگین نظیر پالت‌های آجری در ساخت و سازها استفاده می‌شود. با توجه به موقعیت افقی بازوی نشان داده شده، نیروی هر کدام از دو استوانه‌ی هیدرولیکی AB را تعیین کنید. وزن بازو $۱۵۰۰kg$ بوده و مرکز ثقل آن در $G_۱$ قرار دارد. وزن قطعه‌ی مکعبی ساخته شده از آجر $۲۰۰۰kg$ بوده و مرکز ثقل آن در $G_۲$ واقع است.



حل:

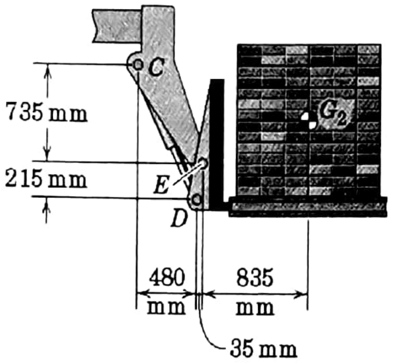


$\theta = \tan^{-۱} \frac{۷۴۰}{۱۰۴۰} = ۳۵/۴^\circ$

$\circlearrowleft + \sum M_o = ۰ \quad : \quad ۲F_{AB}\cos\theta(۶۰۰) - ۲F_{AB}\sin\theta(۱۵۰) - ۱۵۰۰(۹/۸۱)(۳۰۴۰) - ۲۰۰۰(۹/۸۱)(۶۱۰۰) = ۰$

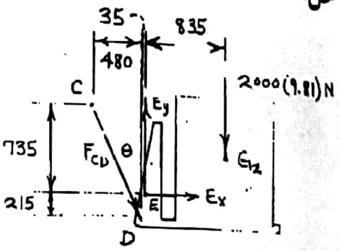
$F_{AB} = ۱۴۲۸۰۰\ N$ یا $۱۴۲/۸\ kN$

۱۰۴-۴. قسمت بلندکننده‌ی ماشین مسئله‌ی ۱۰۳، با جزئیات اضافی در مورد اندازه‌ها نشان داده شده است. نیروی تک‌استوانه‌ی هیدرولیکی CD را محاسبه کنید. وزن قطعه‌ی مکعبی ساخته شده از آجر $۲۰۰۰kg$ بوده و مرکز ثقل آن در $G_۲$ قرار دارد. تأثیر جرم اجزای بلندکننده ناچیز است.



حل:

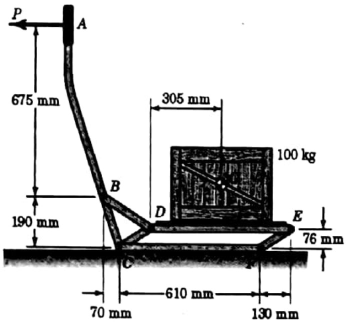
$\theta = \tan^{-۱} \frac{۴۸۰}{۹۵۰} = ۲۶/۸^\circ$



$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ \quad : \quad -۲۰۰۰(۹/۸۱)(۸۳۵) + F_{CD}\cos\theta(۳۵) + F_{CD}\sin\theta(۲۱۵) = ۰$

$F_{CD} = ۱۲۷۸۰۰N$ یا $۱۲۷/۸\ kN$

۱۰۵-۴. نیروی اعمالی P بر دسته در نقطه‌ی A، برای تحمل جعبه‌ای به جرم $۱۰۰kg$ را تعیین کنید. از هر عضو نشان داده شده به همراه اتصال‌دهنده‌ی اعضا (در راستای عمود بر صفحه) دو تا وجود دارد، روی دو عضو DE یک پل مسطح سبک قرار دارد. اصطکاک در مفاصل قابل چشم‌پوشی است و تمامی اعضا سبک‌اند. اصطکاک زیر عضو CF برای جلوگیری از لغزش کفایت می‌کند.

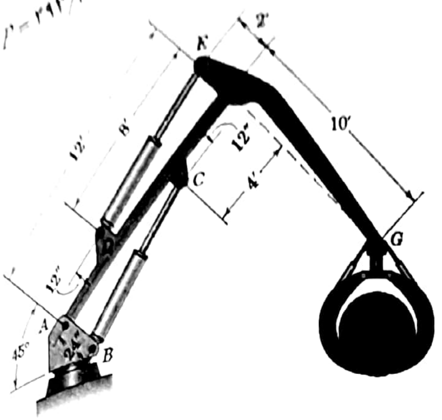


Scanned by CamScanner

حل:

$\sum M_C = ۰ \quad : \quad P \times (۶۷۵ + ۱۹۰) - ۱۰۰ \times ۹{,}۸۱ \times (۱۳۰ + ۲۰۵) = ۰$

$P = ۳۷۹/۳ N$

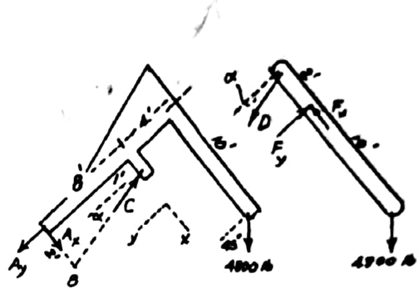


۱۰۶-۴. برای موقعیت ویژه‌ی نشان داده شده که بالابر در حال بالابردن کنده است، بازوهای AF و EG بر هم عمودند. چنانچه وزن کنده‌ای که بالابر، بالا می‌برد $۴۸۰۰ lb$ باشد، در این موقعیت و با توجه به وزن کنده، عکس‌العمل لولاهای A و D را محاسبه کنید.

حل:

$\tan\alpha = \frac{۱}{۸} \quad , \quad \alpha = ۷{,}۱۳°$

$\sin\alpha = ۰{,}۱۲۴ \quad , \quad \cos\alpha = ۰{,}۹۹۲۳$



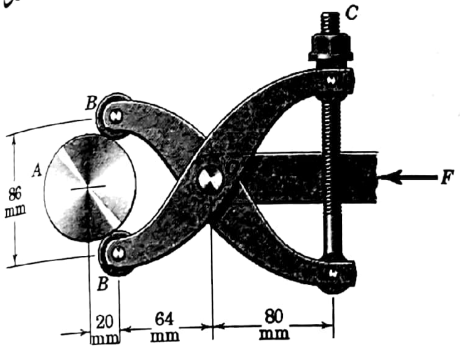
$\sum M_B = ۰ : \quad ۲A_y - \frac{۴۸۰۰}{\sqrt{۲}}(۱۰ - ۲ + ۱۲) = ۰ \;, \quad A_y = ۳۳۹۴۰ lb$

$\sum M_C = ۰ : \quad ۸A_x + ۳۳۹۴۰(۱) - \frac{۴۸۰۰}{\sqrt{۲}}(۱۰ - ۱ + ۴) = ۰ \;, \quad A_x = ۱۲۷۳ lb$

$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۳۴۰۰۰ \; lb$

$\sum M_F = ۰ \quad : \quad \frac{۴۸۰۰}{\sqrt{۲}}(۱۰) - ۰{,}۹۹۲۳ D(۲) = ۰ \quad , \quad D = ۱۷۱۰۰ lb$

۱۰۷-۴. دستگاه نشان داده شده با چرخیدن میله‌ی A در ماشین تراش روی سطح آن آج ایجاد می‌کند. نیروی اعمالی روی میله توسط غلتک‌های آج زن B توسط پیچ تنظیم C تولید می‌شود و نیروی F از قلم‌گیر تراش بر ساق ابزار آج زن اعمال می‌شود. با توجه به وضعیت موردنظر، اگر پیچ تنظیم C تحت کشش $۱{,}۲kN$ باشد، نیروی F و نیروی P که توسط هر کدام از غلتک‌های B تحمل می‌شود، را تعیین کنید.

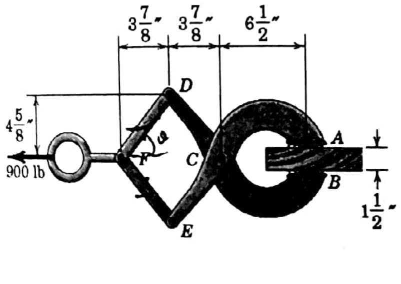


حل:

$\sum M_o = ۰ \;\Rightarrow\; P = ۱{,}۲۶ \; kN$

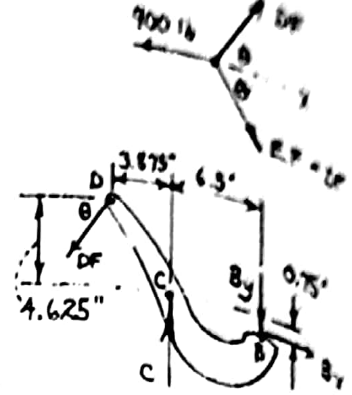
برای کل دستگاه $\quad \sum F_x = ۰ \;\Rightarrow\; F = ۲P\cos\left(\tan^{-۱}\left(\frac{۴۳}{۲۰}\right)\right) = ۱{,}۰۶۳ \; kN$

۱۰۸-۴. دستگاه نشان داده شده، برای کشیدن پالت‌های چوبی بارگذاری شده در کف انبار استفاده می‌شود. تخته‌ی چوبی نشان داده شده، یکی از چندین عضوی است که پایه‌ی پالت را تشکیل می‌دهند. با توجه به نیروی اعمالی $۹۰۰ lb$ به چنگ، نیرویی که لولای C تحمل می‌کند و همچنین نیروی عمودی گیره در A و B را تعیین کنید.



حل:

Scanned by CamScanner



گره F :

$\theta = \tan^{-1}\frac{۳/۶۲۵}{۲/۸۷۵} = ۵۰^\circ$, $DF = ۷۰۱\ lb$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad ۲DF\cos ۵۰^\circ - ۹۰۰ = ۰$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۷۰۱\cos ۵۰^\circ + B_x = ۰ \quad , \quad B_x = ۴۵۰ lb$

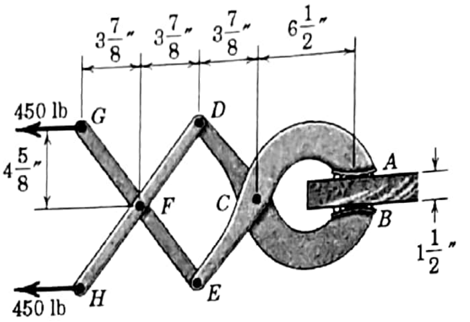
$\curvearrowright + \sum M_B = ۰ \quad : \quad -C(۶/۵) + ۷۰۱\cos ۵۰^\circ(۴/۶۲۵ + ۰/۷۵)$
$+ ۷۰۱\sin ۵۰^\circ(۱۰/۳۷۵) = ۰$

$C = ۱۲۲۹\ lb$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -۷۰۱\sin ۵۰^\circ + ۱۲۲۹ + B_y = ۰ \quad , \quad B_y = ۶۹۲\ lb = A_n = B_n$

(در گره C به علت تقارن مؤلفه‌ی افقی وجود ندارد)

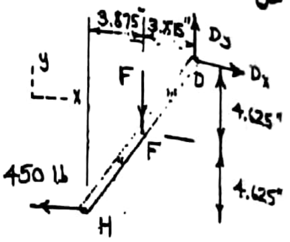
۱۰۹-۴. مدل دیگری از پالت مسئله ۱۰۸ در اینجا نشان داده شده است. مشابه مسئله‌ی ۱۰۸ در اثر اعمال نیروی ۹۰۰lb، نیرویی که لولای C متحمل می‌شود و نیروی گیره در A و B را تعیین کنید.



حل:

عضو DFH :

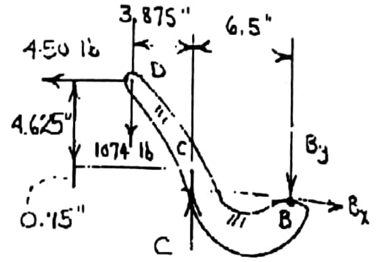
$\sum F_x = ۰ \Rightarrow D_x = ۴۵۰\ lb$



$\curvearrowright + \sum M_D = ۰ \quad : \quad F(۳/۸۷۵) - ۴۵۰(۹/۲۵) = ۰ \quad , \quad F = ۱۰۷۴\ lb$

$\sum F_y = ۰ \quad , \quad D_y = ۱۰۷۴\ lb$

با توجه به تقارن C و F فقط مؤلفه قائم دارند.

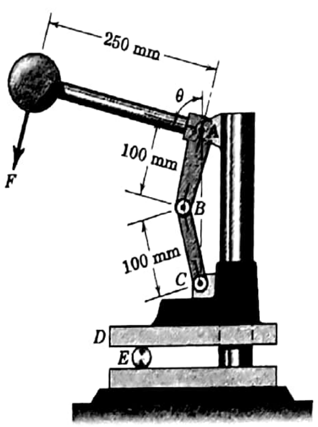


$\curvearrowright + \sum M_B = ۰ \quad : \quad ۴۵۰(۵/۳۷۵) + ۱۰۷۴(۱۰/۳۷۵) - C(۶/۵) = ۰$

$C = ۲۰۹۰\ lb$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -۱۰۷۴ + ۲۰۹۰ - B_y = ۰ \quad , \quad B_y = ۱۰۱۲\ lb$

۱۱۰-۴. فک بالایی D از این دستگاه پرس ضامن‌دار بدون هیچ‌گونه مقاومت اصطکاکی، در امتداد ستون ثابت قائم می‌لغزد. چنانچه در $\theta = ۷۵^\circ$ نیروی $F = ۲۰۰N$ به دسته اعمال شود، نیروی فشاری R که به استوانه‌ی E وارد می‌شود و همچنین عکس‌العمل لولای A را محاسبه کنید.



حل:

$\sum M_A = ۰ \Rightarrow B = ۱۰۰۰ \Rightarrow \begin{cases} B_x = ۲۵۹\ N \\ B_y = ۹۶۶\ N \end{cases}$

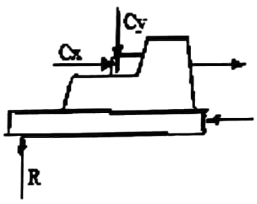
$C_y = B_y = ۹۶۶\ N$

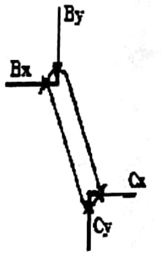
$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۳۱۱\ N$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۷۷۳\ N$

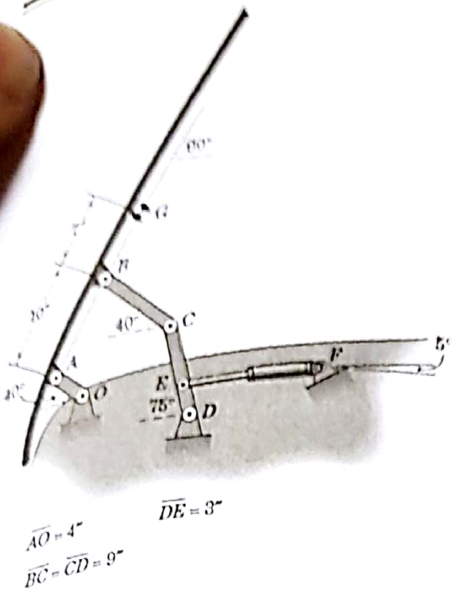
$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۸۳۳\ N$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R = C_y = ۹۶۶\ N$



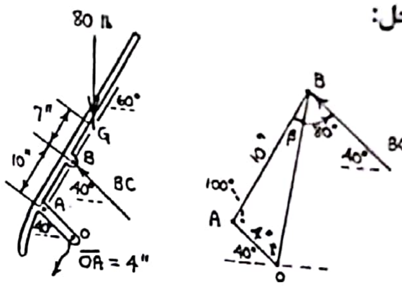


Scanned by CamScanner



۱۱۱-۴. بخش‌هایی از مجموعه کاپوت یک اتومبیل از نمای جانبی در تصویر نشان داده شده است. میله‌های اتصال سبک BC و CD و لوله‌ی گاز تحت فشار EF کاپوت را در وضعیت باز موردنظر نگه داشته‌اند. در این وضعیت، کاپوت می‌تواند آزادانه به صورت ساعتگرد حول لولای A بچرخد؛ لولای A قفل است تا زمانی که کاپوت پایین آمده و تقریباً در حالت بسته و افقی قرار گیرد. چنانچه وزن کاپوت $80 lb$ بوده و مرکز ثقل آن در G باشد، کمترین نیروی فشاری C در لوله که در آن وضعیت باز کاپوت حفظ خواهد شد، را تعیین کنید. توجه کنید که در قسمت جلو ماشین دو میله‌ی اتصال OA وجود دارد، درحالی که از میله‌های اتصال باقی‌مانده، فقط یک مجموعه در قسمت داخلی، جلو سمت راست سپر وجود دارد.

حل:



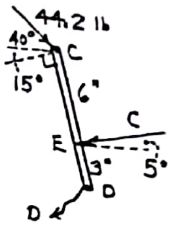
$$\overline{OB}^2=4^2+10^2-2(4)(10)\cos 100°$$

$$\overline{OB}=11.4\,in$$

$$\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin 100°}{11.4}\quad,\quad \beta=20.2°$$

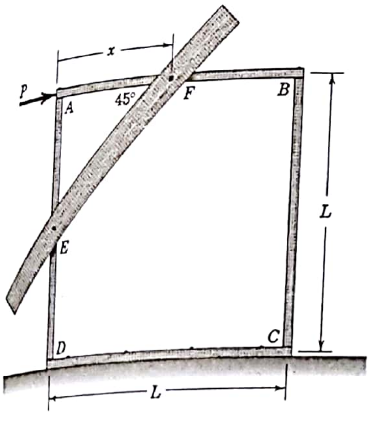
$$\circlearrowleft + \sum M_o=0\ :\ -80(17\cos 60°-4\cos 40°)+BC(11.4\sin(80°-20.2°))=0$$

$$BC=44.2\,lb$$



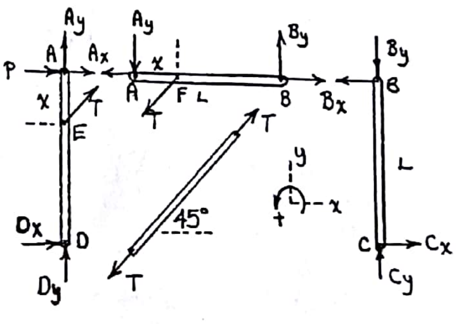
$$\circlearrowleft + \sum M_D=0\ :\ -44.2\cos 55°(9)-C\cos 10°(3)=0$$

$$C=77.2\,lb$$



۱۱۲-۴. یک نجار قاب مربعی $ABCD$ را ساخته و مطابق شکل قاب را برای جلوگیری از مایل شدن (انحراف به شکل لوزی) در اثر اعمال بار P با عضو EF مقاوم کرده است. کشش T در عضو اضافه شده را به صورت تابعی از x تعیین کنید. تمامی اتصالات را لولایی درنظر بگیرید. عضو DC محکم به زمین بسته شده است.

حل:



(AD)

$$\sum F_x=0\ :\ D_x+A_x+P+T\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y=0\ :\ D_y+A_y+T\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A=0\ :\ D_x(L)+T\frac{\sqrt{2}}{2}(x)=0 \qquad (3)$$

Scanned by CamScanner

(AB)

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -A_x + B_x - T\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \qquad (۴)$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -A_y + B_y - T\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \qquad (۵)$$

$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad B_y(L) - T\frac{\sqrt{۲}}{۲}x = ۰ \qquad (۶)$$

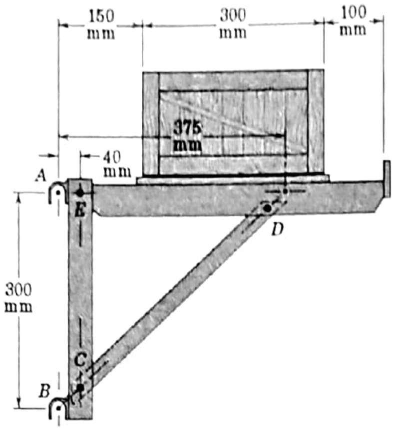
(BC)

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -B_x + C_x = ۰ \qquad (۷)$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -B_y + C_y = ۰ \qquad (۸)$$

$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad B_x(L) = ۰ \qquad (۹)$$

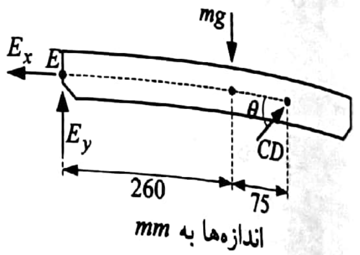
$$(۱)-(۹) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\sqrt{۲}PL}{x} \qquad (x \neq ۰)$$



۱۱۳-۴. قلاب‌های A و B به یک نردبان جوش داده شده‌اند و یک انتهای الوار داربست را نگه داشته‌اند. جعبه‌ی همگن و خود الوار که توسط جک حمایت می‌شود، مجموعاً جرمی معادل ۸۴ kg دارند. تمامی نیروهای قائم توسط قلاب A تحمل می‌شود، سه پیچ قطعه فقط نیرو تحمل می‌کنند و توانایی تحمل گشتاور را ندارند. تمام نیرویی را که توسط پیچ E تحمل می‌شود، تعیین کنید. مؤلفه‌ی قائم نیرو در E را با مؤلفه‌ی قائم نیرویی که قلاب A تحمل می‌کند، مقایسه کنید.

حل:

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{۳۰۰}{۳۷۵} = ۳۸/۶۶^\circ$$



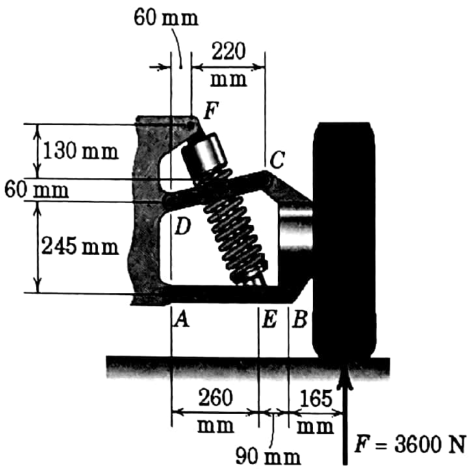
$$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ \quad : \quad CD\sin\theta(۳۳۵) - mg(۲۶۰) = ۰$$

$$CD = ۱۰۲۳/۷۸ \ N$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : \quad CD\cos\theta - E_x = ۰ \quad , \quad E_x = ۷۷۹/۴۳۶ \ N$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad E_y + CD\sin\theta - mg = ۰ \quad , \quad E_y = ۱۸۴/۴۹ \ N$$

$$E = \sqrt{E_x^۲ + E_y^۲} = ۸۲۰N$$



۱۱۴-۴. قسمت‌هایی از سیستم تعلیق پشت چرخ جلو اتومبیلی در تصویر نشان داده شده است. چنانچه مقدار نیروی عمودی F که روی چرخ اعمال می‌شود معادل ۳۶۰۰ N باشد، مقدار نیروی وارده بر هر مفصل (گره) را تعیین کنید.

حل:

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{۶۰}{۲۸۰} = ۱۲/۰۹^\circ$$

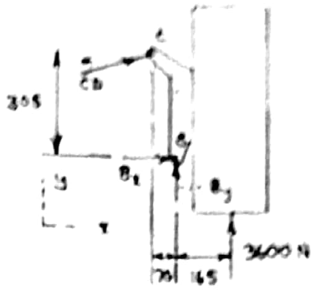
$$\circlearrowleft + \sum M_B = ۰ \quad : \quad ۳۶۰۰(۱۶۵) - CD\cos\alpha(۳۰۵) - CD\sin\alpha(۷۰) = ۰$$

Scanned by CamScanner

$CD = ۱۸۹۸\,N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad B_x + CD\cos\alpha = ۰ \quad , \quad B_x = -۱۸۵۶\,N$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad B_y + CD\sin\alpha + ۳۶۰۰ = ۰ \quad , \quad B_y = -۴۰۰۰\,N$



$AEB:$

$\theta = \tan^{-۱}\frac{۳۲۵}{۲۰۰} = ۶۵/۳°$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad : \quad -EF\sin\theta(۲۶۰) + ۴۰۰۰(۳۵۰) = ۰$

$EF = ۵۹۲۰\,N$

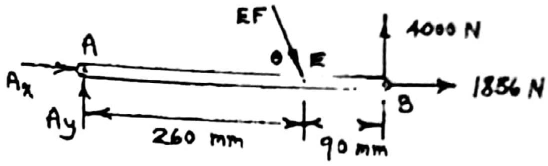
$\sum F_x = ۰ : A_x + EF\cos\theta + ۱۸۵۶ = ۰ \quad , \quad A_x = -۴۳۳۰\,N$

$\sum F_y = ۰ : A_y - EF\sin\theta + ۴۰۰۰ = ۰ \quad , \quad A_y = ۱۳۸۴\,N$

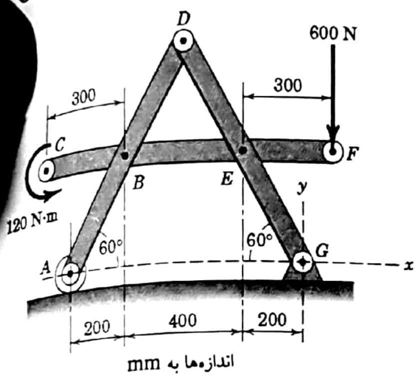
$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۴۵۵۰\,N$

$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = ۴۴۱۰\,N$

$C = D = ۱۸۹۸\,N \quad , \quad E = F = ۵۹۲۰\,N$



۱۱۵-۴. مؤلفه‌ی x و y تمام نیروهای وارده به هر کدام از اعضای قاب بارگذاری شده را محاسبه کنید.

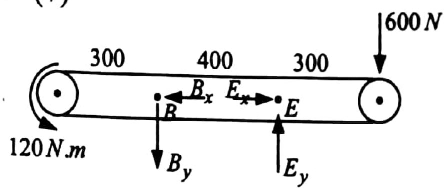


حل:

برای کل خرپا : $\sum M_G = ۰ \Rightarrow A_y = ۷۵N\ (\uparrow)$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow G_y = ۵۲۵N\ (\uparrow)$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow G_x = ۰$



$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : ۱۲۰ + E_y(۰/۴) - ۶۰۰(۰/۷) = ۰ \ , \ E_y = ۷۵۰N$

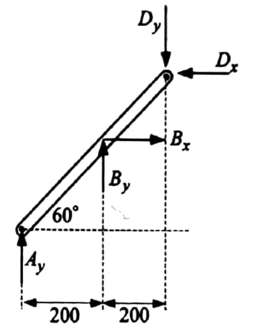
$\sum F_y = ۰ \Rightarrow B_y = ۱۵۰N$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = E_x$

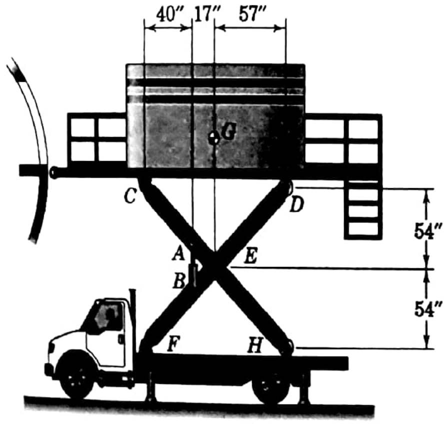
$+\circlearrowleft \sum M_D = ۰ \quad : \quad B_x = ۱۷۳/۲\,N = E_x$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = D_x = ۱۷۳/۲\,N$

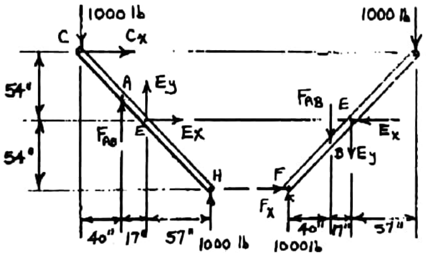
$\sum F_y = ۰ \Rightarrow D_y = ۲۲۵N$



۱۱۶-۴. کامیون نشان داده شده برای تحویل غذا به هواپیما استفاده می‌شود. واحد بالایی وزنی معادل $۲۰۰۰lb$ با مرکز ثقل G دارد. نیروی موردنیاز در استوانه‌ی هیدرولیکی AB را تعیین کنید.



حل:



(۱)

(CH)

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad C_x + E_x = ۰$ (۲)

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad F_{AB} + E_y + ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰ = ۰$ (۳)

$\circlearrowright + \sum M_C = ۰ \quad : \quad F_{AB}(۴۰) + E_y(۵۷) + E_x(۵۴) + ۱۰۰۰(۱۱۴) = ۰$

(۴)

(DF)

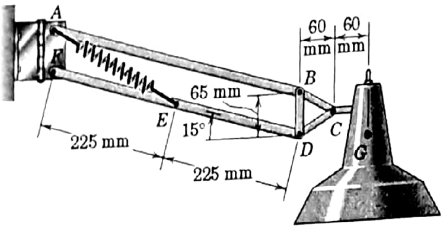
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad F_x - E_x = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad :$ (مشابه تعادل (۲))

$\circlearrowright + \sum M_F = ۰ \quad : \quad -F_{AB}(۴۰) - E_y(۵۷) + E_x(۵۴) - ۱۰۰۰(۱۱۴) = ۰$ (۵)

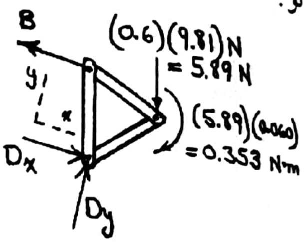
$C_x = F_x = E_x = ۰ \quad , \quad F_{AB} = ۶۷۱۰\ lb \quad , \quad E_y = -۶۷۱۰\ lb$

۴-۱۱۷. طراحان مکانیزم لامپ، نظیر چیزی که در تصویر می‌بینید، معمولاً به اصطکاک گره‌ها برای کمک به حفظ تعادل استاتیکی تکیه می‌کنند. برای این مسئله، فرض کنید اصطکاک کافی در نقطه‌ی C برای جلوگیری از چرخش وجود دارد، اما در دیگر گره‌ها اصطکاک ناچیز است. اگر جرم محافظ لامپ $۰/۶kg$ با مرکز G باشد، نیروی فنر F_s موردنیاز برای تعادل در موقعیت نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:

توجه کنید که AB یک عضو دو نیرویی است.

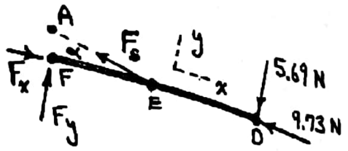


$\sum F_y = ۰ \quad : \quad D_y - ۵/۸۹\cos ۱۵° = ۰ \quad , \quad D_y = ۵/۶۹\ N$

$\sum M_D = ۰ : \quad B(۰/۰۶۵)\cos ۱۵° + ۵/۸۹(۰/۰۶) - ۰/۳۵۳ = ۰ \quad , \quad B = ۱۱/۲۵ N$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۱۱/۲۵ + D_x + ۵/۸۹\sin ۱۵° = ۰ \quad , \quad D_x = ۹/۷۳ N$

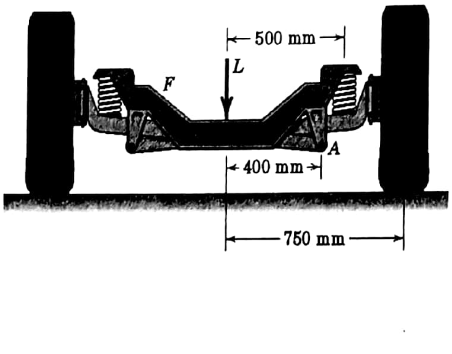
$$\alpha = \tan^{-۱}\left(\frac{۶۵\cos ۱۵°}{۲۲۵ + ۶۵\sin ۱۵°}\right) = ۱۴/۵۵°$$



$\sum M_F = ۰ : \quad (F_s \sin\alpha)(۰/۲۲۵) - ۵/۶۹(۰/۴۵) = ۰$

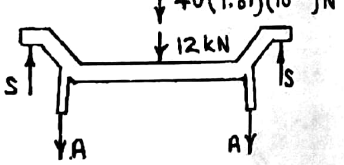
$F_s = ۴۵/۲\ N$

۴-۱۱۸. یک سیستم تعلیق دو محوری مورداستفاده در یک کامیون کوچک در تصویر نشان داده شده است. جرم قاب مرکزی F $۴۰kg$ است. جرم هر چرخ و اتصالات آن $۳۵kg$ بوده و مرکز ثقل آن به فاصله‌ی $۶۸۰mm$ از خط قائم مرکز گذر است. با توجه به بار منتقل شده $L = ۱۲kN$ به قاب F کل نیروی برشی که لولای A تحمل می‌کند را محاسبه کنید.



حل:

برای کل سیستم:



$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۲P = ۱۲ + [۴۰ + ۲(۳۵)](۹/۸۱)(۱۰^{-۳})$

$P = ۶/۵۴\ kN$

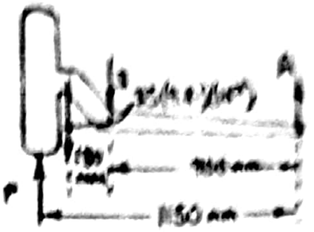
Scanned by CamScanner

مجموعه‌ی چرخ :

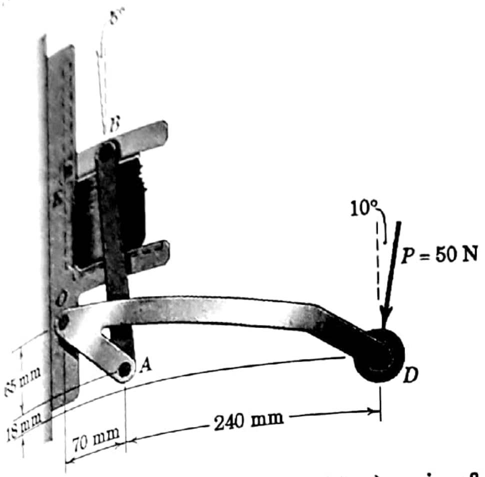
$\sum M_A = ۰$:

$۹۰۰A - ۶٫۵۲(۲۵۰) + ۲۵(۹٫۸۱)(۱۰^{-۲})(۱۸۰) = ۰$

$A = ۱٫۱۲۸ \, N$



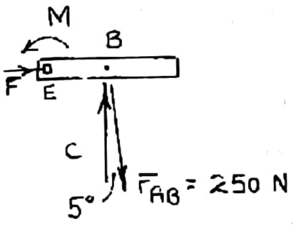
۱۱۹-۴. نیروی فشاری C را که به قوطی وارد می‌شود، تعیین کنید. مطابق شکل $P = ۵۰ N$ بوده و اهرم فشار در موقعیت موردنظر قرار دارد. توجه کنید که از هر کدام از میله‌های اتصال AOD و AB دو تا وجود دارد، هر زوج از اتصالات قوطی در یک طرف اهرم فشار قرار دارد. همچنین لولای B روی خط قائم مرکز گذر قوطی واقع است. توجه کنید که برآمدگی مربعی کوچک E از فک متحرک، در شیار فرورفته‌ی قاب ثابتی حرکت می‌کند.

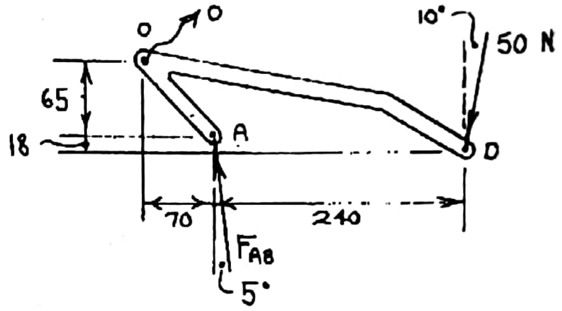


حل:

$\curvearrowleft + \sum M_O = ۰ \quad : \quad F_{AB}[\cos ۵^\circ (۷۰) - \sin ۵^\circ (۶۵)] - ۵۰[\cos ۱۰^\circ (۳۱۰) + \sin ۱۰^\circ (۸۳)] = ۰$

$F_{AB} = ۲۵۰ \; N$

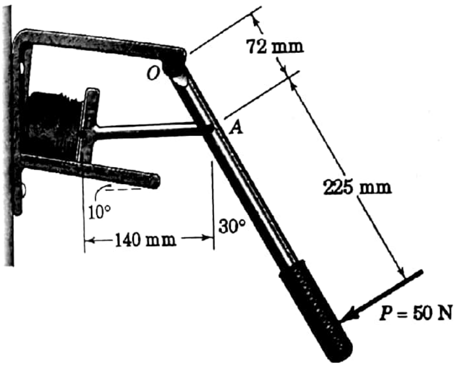




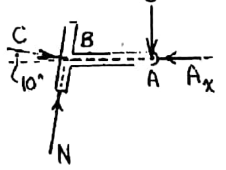
$M = ۰ \quad (\sum M_B = ۰)$

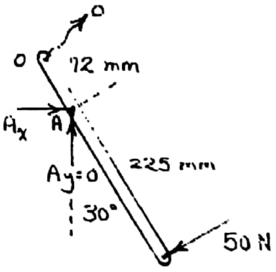
$+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad C - ۲۵۰ \cos ۵^\circ = ۰ \quad , \quad C = ۲۴۹ N$

۱۲۰-۴. با توجه به نیروی اعمالی $P = ۵۰ N$ و درحالی که اهرم فشار در موقعیت موردنظر قرار دارد، نیروی فشاری C که به قوطی اعمال می‌شود، را تعیین کنید. B نقطه‌ای روی ته قوطی و در مرکز آن است.



حل:





$A_y = ۰ \quad (\sum M_B = ۰)$

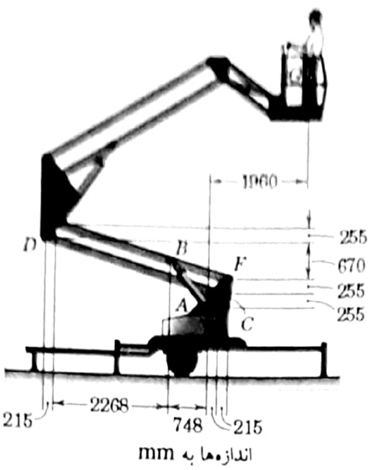
OA:

$\sum M_o = ۰ \; : \; A_x(۷۲ \cos ۳۰^\circ) - ۵۰(۷۲ + ۲۲۵) = ۰ \; , \; A_x = ۲۳۸ N$

AB:

$\overset{+}{\searrow} \sum F = ۰ \quad : \quad C - ۲۳۸ \cos ۱۰^\circ = ۰ \quad , \quad C = ۲۳۵ N$

Scanned by CamScanner



۱۲۱-۴. نیروی ایجاد شده در استوانه‌ی AB ناشی از مجموع وزن جایگاه و متصدی داخل آن را تعیین کنید. جرم کل $۱۸۰kg$ و مرکز ثقل آن در G واقع است.

حل:

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{۹۲۵}{۳۴۴۶} = ۱۵/۰۳^\circ$$

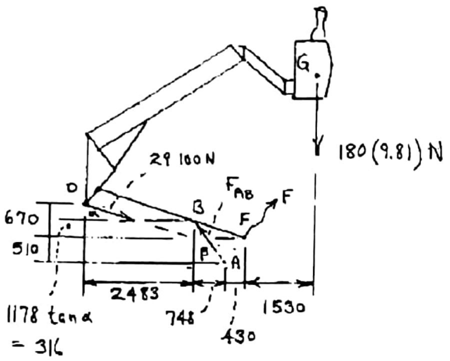
$$\circlearrowright + \sum M_E = ۰ : -۱۸۰(۹/۸۱)(۴۹۷۶) + F_{CD}\cos\alpha(۲۵۵) + F_{CD}\sin\alpha(۲۱۵) = ۰$$

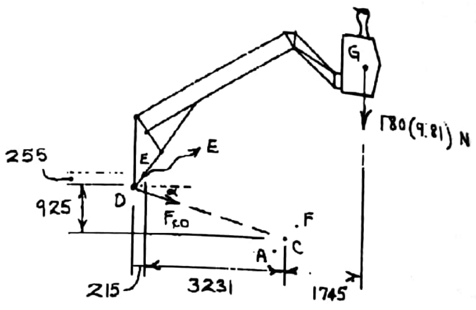
$$F_{CD} = ۲۹۱۰۰N$$

$$\beta = \tan^{-۱}\frac{۵۱۰+۳۱۶}{۷۴۸} = ۴۷/۸^\circ$$

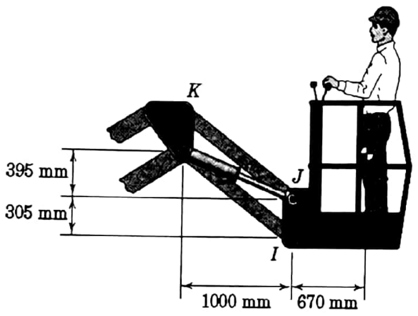
$$\circlearrowright + \sum M_F = ۰ \quad : -۲۹۱۰۰\cos\alpha(۶۷۰) + ۲۹۱۰۰\sin\alpha(۳۶۶۱) - F_{AB}\cos\beta(۵۱۰) - F_{AB}\sin\beta(۴۳۰) - ۱۸۰(۹/۸۱)(۱۵۳۰) = ۰$$

$$F_{AB} = ۹۲۰۰N$$





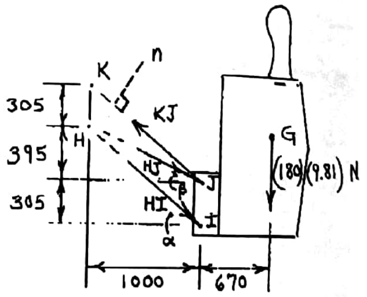
۱۲۲-۴. جزئیات اضافی از بالابر مسئله‌ی ۱۲۱ در تصویر آورده شده است. چنانچه جرم جایگاه به همراه متصدی داخل آن $۱۸۰kg$ باشد و مرکز ثقل آن در G، نیروی استوانه‌ی HJ را تعیین کنید.



حل:

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{۷۰۰}{۱۰۰۰} = ۳۵^\circ$$

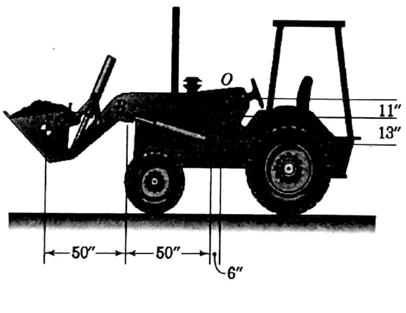
$$\beta = \tan^{-۱}\frac{۳۹۵}{۱۰۰۰} = ۲۱/۶^\circ$$



$$\sum F_n = ۰ \quad : \quad HJ\sin(\alpha-\beta) - ۱۸۰(۹/۸۱)\cos\alpha = ۰$$

$$HJ = ۶۲۲۰N$$

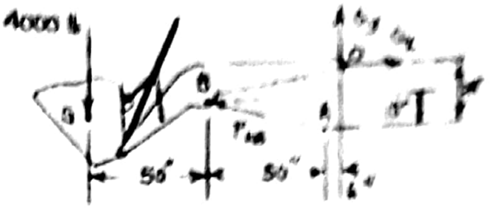
۱۲۳-۴. نیروی استوانه‌ی هیدرولیکی AB و مقدار عکس‌العمل لولای O را برای موقعیت نشان داده شده تعیین کنید. مجموع وزن بیل و بار درون آن $۴۰۰۰lb$ و مرکز ثقل آن در G واقع است. از تأثیر وزن دیگر اعضا چشم‌پوشی کنید.



حل:

$\angle OBA = \tan^{-1}\frac{۱۱}{۵۶} + \tan^{-1}\frac{۱۳}{۵۰} = ۱۱/۱۱° + ۱۴/۵۷° = ۲۵/۷°$

$\overline{OB} = \sqrt{۱۱^۲ + ۵۶^۲} = ۵۷/۱ in$



$+\sum M_O = ۰ \quad : \quad ۴۰۰۰(۱۰۶) - F_{AB}\sin ۲۵/۷°(۵۷/۱) = ۰$

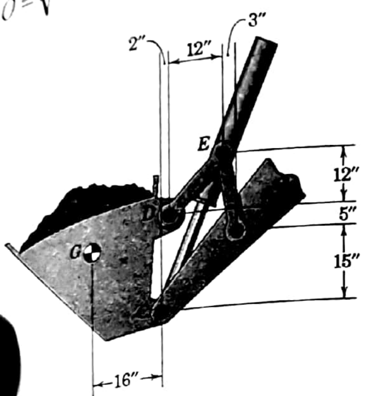
$F_{AB} = ۱۷۱۴۰ lb$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad O_x - ۱۷۱۴۰\cos ۱۴/۵۷° = ۰ \quad , \quad O_x = ۱۶۵۹۰ lb$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad O_y + ۱۷۱۴۰\sin ۱۴/۵۷° - ۴۰۰۰ = ۰ \quad , \quad O_y = -۳۱۲ lb$

$O = \sqrt{O_x^۲ + O_y^۲} = ۱۶۵۹۰ lb$

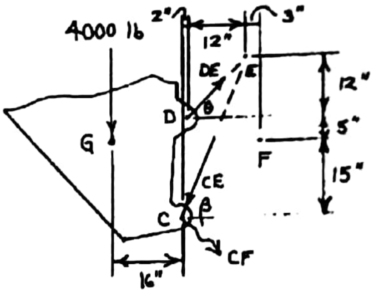
۴-۱۲۴. اطلاعات اضافی دیگری در مورد اندازه‌های بیل جلوی مسئله‌ی ۱۲۳ درنظر گرفته شده است. نیروی استوانه‌ی هیدرولیکی CE را تعیین کنید. وزن بیل و بار درون آن $۴۰۰۰ lb$ و مرکز ثقل آن در G واقع است. تأثیر وزن دیگر اعضا ناچیز است.



حل:

$\theta = ۴۵° \quad , \quad \beta = \tan^{-1}\frac{۳۲}{۱۴} = ۶۶/۴°$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{۱۷}{۳} = ۸۰°$

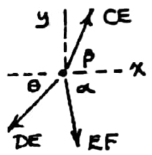


$+\sum M_C = ۰ \quad : \quad ۴۰۰۰(۱۶) - DE\cos ۴۵°(۲۰) + DE\sin ۴۵°(۲) = ۰$

$DE = ۵۰۳۰ lb$

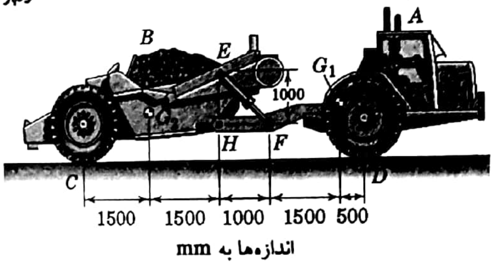
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -DE\cos\theta + CE\cos\beta + EF\cos\alpha = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -DE\sin\theta + CE\sin\beta - EF\sin\alpha = ۰$



$\begin{cases} CE = ۷۴۴۰ lb \\ EF = ۳۳۱۰ lb \end{cases}$

۴-۱۲۵. واحد قدرت اسکریپر، تراکتور A جرمی معادل $۴Mg$ داشته و مرکـز جـرم آن در $G_۱$ قـرار دارد. واحـد کاملاً تحت بار اسکریپر، تریلر B جرمی معادل $۲۴Mg$ داشته و مرکز جرم آن در $G_۲$ قرار دارد. موقعیت اسـکریپر توسط دو استوانه‌ی هیدرولیکی EF، هر کـدام از یـک طـرف ماشین کنترل می‌شود. نیروی F در هـر کـدام از اسـتوانه‌هـا و همچنین مقدار عکس‌العمل لولای H در هر طـرف را محاسـبه کنید. فرض کنید چرخ‌ها می‌توانند آزادانـه بچرخنـد، بنـابراین زیر چرخ‌ها مؤلفه‌ی افقی وجود ندارد.



حل:

برای کل دستگاه $\sum M_C = ۰ \quad : \quad ۲۴(۹/۸۱)۱۵۰۰ + ۴(۹/۸۱)۵۵۰۰ - D_y(۶۰۰۰) = ۰$

$D_y = ۹۴/۸۳ kN$ مربوط به دو چرخ جلو

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow C_y = ۱۷۹/۸۵ kN$ مربوط به دوچرخ عقب

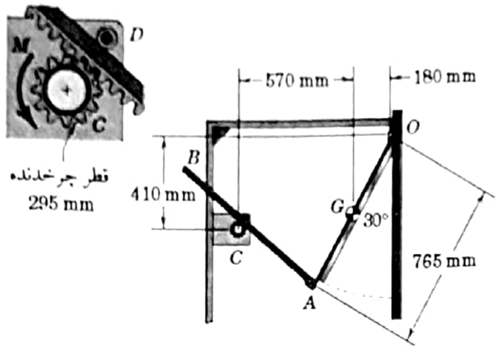
واحد A $\sum M_H = ۰ \quad : \quad ۲EF\sin ۴۵°(۱۰۰۰) + D_y(۲۰۰۰) - ۳۹/۲۴(۲۵۰۰) = ۰$

Scanned by CamScanner

$EF = -۱۳۱/۸ kN$

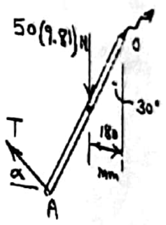
$\sum F_x = ۰ \;\Rightarrow\; H_x = -EF\cos ۴۵^\circ = ۹۱/۱۹۷ kN$

$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; H_y = ۶۵/۲\ kN \quad , \quad H = \sqrt{H_x^۲ + H_y^۲} = ۱۱۲/۲ kN$



۴-۱۲۶. در تصویر پنجره‌ی گلخانه‌ای نشان داده شده که موقعیت OA آن به صورت خودکار با دستگاهی تغییر می‌کند. پنجره‌ی OA جرمی معادل $۵۰kg$ داشته و مرکز ثقل آن در G قرار دارد یک موتور (نشان داده نشده) چرخدنده‌ی C را می‌چرخاند و موقعیت چنگ AB تغییر می‌کند. برای موقعیت موردنظر مربوط به پنجره، گشتاور M که باید موتور به چرخدنده‌ی C وارد کند را تعیین کنید. وزن چنگ AB ناچیز است.

حل:

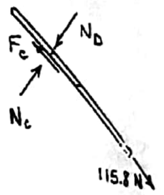


$$\alpha = \tan^{-۱}\left[\frac{۷۶۵\cos ۳۰^\circ - ۴۱۰}{۵۷۰ + ۱۸۰ - ۷۶۵\sin ۳۰^\circ}\right] = ۳۴/۵^\circ$$

$\overline{OA} = ۷۶۵\, mm$

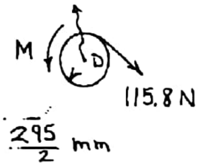
$\circlearrowleft + \sum M_O = ۰ \;:\; ۵۰(۹/۸۱)(۱۸۰) - T\cos\alpha(۷۶۵\cos ۳۰^\circ) - T\sin\alpha(۷۶۵\sin ۳۰^\circ) = ۰$

$T = ۱۱۵/۸\, N$

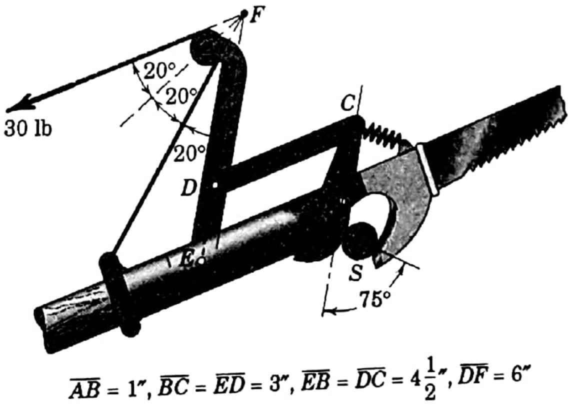


$AB: \quad \nwarrow + \sum F = ۰ \quad : \quad F_C - ۱۱۵/۸ = ۰ \quad , \quad F_C = ۱۱۵/۸ N$

چرخدنده : $\circlearrowleft + \sum M_D = ۰ \quad : \quad M - ۱۱۵/۸\left(\frac{۲۹۵}{۲}\right) = ۰$



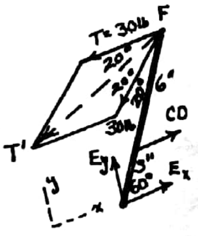
$M = ۱۷۰۸۰\ N.mm$ یا $۱۷/۰۸\ N.m$



$\overline{AB} = 1''$, $\overline{BC} = \overline{ED} = 3''$, $\overline{EB} = \overline{DC} = 4\frac{1}{2}''$, $\overline{DF} = 6''$

۴-۱۲۷. مکانیزم هرس یک اره‌ی دسته بلند درحالی که شاخه‌ی S را می‌برد، نشان داده شده است. با توجه به موقعیت خاص موردنظر، طناب به کار اندازنده‌ی اره با دسته موازی بوده و نیروی کشش $۳۰lb$ را تحمل می‌کند. نیروی برش‌دهنده‌ی P که اره به شاخه وارد می‌کند و همچنین کل نیرویی که لولای E تحمل می‌کند را تعیین کنید. نیروی اعمالی توسط فنر بازگرداننده‌ی سبک C ناچیز است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

حل:



$T'^۲ = ۳۰^۲ + ۳۰^۲ - ۲(۳۰)(۳۰)\cos ۱۴۰^\circ$

$T' = ۵۶/۴\ lb$

$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ \quad : \quad -CD(۳\sin ۶۰^\circ) + ۵۶/۴(۹\sin ۴۰^\circ) = ۰$

Scanned by CamScanner

$CD = ۱۲۵/۵ lb$

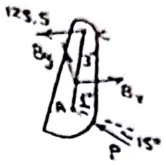
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad E_x + ۱۲۵/۵ - ۵۶/۲ \cos ۲۰° = ۰ \quad , \quad E_x = -۷۲/۶ lb$

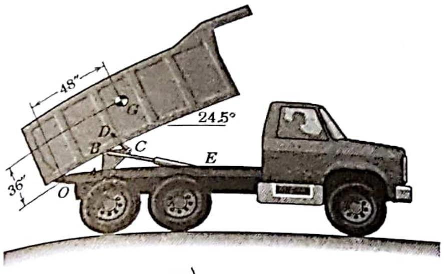
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad E_y - ۵۶/۲ \sin ۲۰° = ۰ \quad , \quad E_y = ۱۹/۲۸ lb$

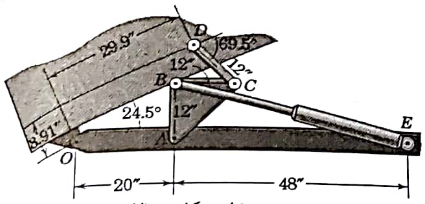
$E = \sqrt{E_x^۲ + E_y^۲} = ۷۵/۱ \ lb$

$\sum M_B = ۰ \quad : \quad ۱۲۵/۵(۳ \sin ۶۰°) - P \cos ۱۵°(۱) = ۰$

$P = ۲۲۸ lb$







جزئیات مکانیزم بالابر

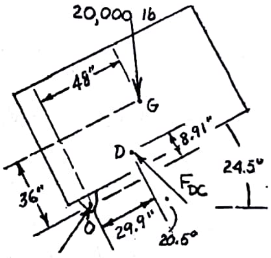
۴-۱۲۸. در نمای بزرگ، طرحی از مکانیزم بالابر یک ماشین کمپرسی نشان داده شده است. در موقعیت ویژه‌ی نشان داده شده که BA بر OAE و میله‌ی اتصال DC به AC عمود است، نیروی فشاری P در استوانه‌ی هیدرولیکی BE و مقدار عکس‌العمل لولای A را تعیین کنید. کمپرسی و بار درون آن در مجموع $۲۰۰۰۰ lb$ وزن داشته و مرکز ثقل آن در G قرار دارد. تمامی ابعاد مربوط به شکل هندسی در تصویر نشان داده شده است.

حل:

$\sin ۲۴/۵° = ۰/۴۱۴۷ \quad , \quad \cos ۲۴/۵° = ۰/۹۱$

$\sin ۲۰/۵° = ۰/۳۵۰۲ \quad , \quad \cos ۲۰/۵° = ۰/۹۳۶۷$

$$\sum M_o = ۰ \quad : \quad ۲۰۰۰۰(۰/۹۱)۴۸ - ۲۰۰۰۰(۰/۴۱۴۷)(۳۶) - F_{DC}(۰/۹۳۶۷)(۲۹/۹) - F_{DC}(۰/۳۵۰۲)(۸/۹۱) = ۰$$



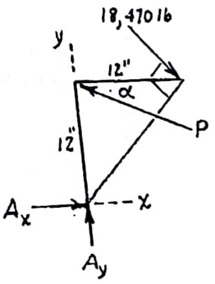
$F_{DC} = ۱۸۴۷۰ \ lb$

$\alpha = \tan^{-۱} \frac{۱۲}{۴۸} = ۱۴/۰۴°$

$\sin \alpha = ۰/۲۴۲۵ \quad , \quad \cos \alpha = ۰/۹۷۰۱$

$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۰/۹۷۰۱ P(۱۲) - ۱۸۴۷۰(۱۲\sqrt{۲}) = ۰$

$P = ۲۶۹۰۰ lb$



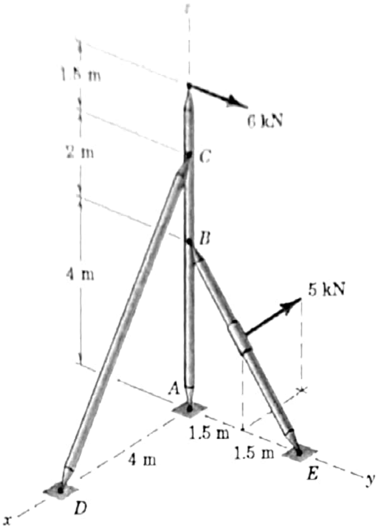
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad A_x + \frac{۱۸۴۷۰}{\sqrt{۲}} - ۲۶۹۰۰(۰/۹۷۰۱) = ۰$

$A_x = ۱۳۰۶۰ lb$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad A_y + ۲۶۹۰۰(۰/۲۴۲۵) - \frac{۱۸۴۷۰}{\sqrt{۲}} = ۰ \quad , \quad A_y = ۶۵۳۰ lb$

$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۱۴۶۰۰ lb$

۴-۱۲۹. مؤلفه‌های عکس‌العمل در A برای قاب فضایی بارگذاری شده را تعیین کنید. تمامی اتصالات را کاسه-ساچمه‌ای درنظر بگیرید.



حل:

$\sum M_x = ۰ \quad : \quad E_z(۲) - ۶(۷/۵) = ۰ \quad , \quad E_z = ۱۵kN$

$\sum M_y = ۰ \quad : \quad D_z(۴) - ۵(۲) = ۰ \quad , \quad D_z = ۲/۵kN$

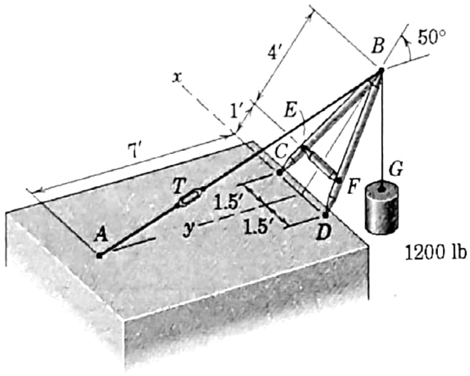
$\sum F_z = ۰ \quad \Rightarrow \quad A_z = D_z - E_z = -۱۲/۵kN$

$\sum M_z = ۰ \quad \Rightarrow \quad E_x = ۲/۵kN$

$D_x = \dfrac{D_z}{\tan ۵۶/۳°} = ۱/۶۶۷ kN$

$\sum F_x = ۰ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{E_z}{\tan ۵۳/۱۳} = ۱۱/۲۵kN$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۶ - E_y + A_y = ۰ \quad , \quad A_y = ۵/۲۵kN$



۱۳۰-۴. در تصویر شماتیکی از یک سازه‌ی واقعی، بست قورباغه‌ای T نمایانگر وسیله‌ای جهت تنظیم شل و سفت بودن کابل است. C و D لولاهایی غیرضربه‌گیر بوده و محور آنها در امتداد خط CD است، و همچنین B، E و F اتصالات کاسه- ساچمه‌ای هستند. نیروی کششی T و نیروی عضو EF را تعیین کنید.

حل:

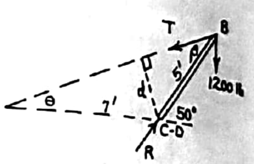
برای کل قاب : $\theta = \tan^{-۱} \dfrac{۵\sin ۵۰°}{۷ + ۵\cos ۵۰°} = ۲۰/۶°$

$d = ۷\sin ۲۰/۶° = ۲/۴۶ \ ft$

$\beta + ۲۰/۶° = ۵۰° \quad , \quad \beta = ۲۹/۴°$

$\sum M_x = ۰ \quad : \quad (۵\cos ۵۰°)(۱۲۰۰) - ۲/۴۶T = ۰ \quad , \quad T = ۱۵۶۹ \ lb$

$\sum F_{(C-D)-B} = ۰ \quad : \quad R - ۱۲۰۰\cos ۴۰° - ۱۵۶۹\cos ۲۹/۴° = ۰ \quad , \quad R = ۲۲۹۰lb$

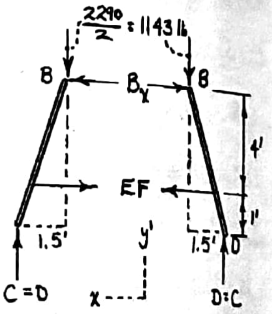


صفحه‌ی قاب :

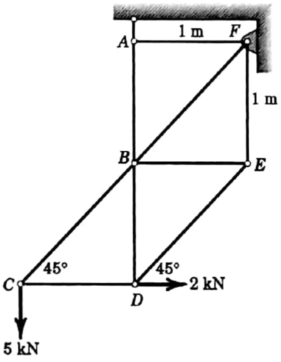
$\sum F_{y'} = ۰ \quad \Rightarrow \quad C = D = ۱۱۴۳lb$

$\sum M_B = ۰ \quad : \quad ۱۱۴۳(۱/۵) - ۴EF = ۰$

$EF = ۴۲۹lb$



۱۳۱-۴. نیرو در عضو BE از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



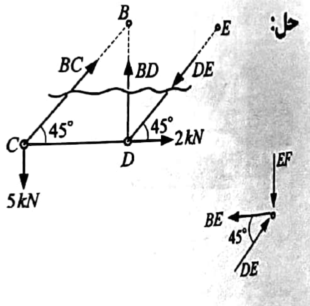
حل:

$+\circlearrowleft \ \sum M_B = ۰ : ۵(۱) + ۲(۱) - DE(\sin ۴۵°) = ۰$

$DE = ۷\sqrt{۲}$ (فشاری)

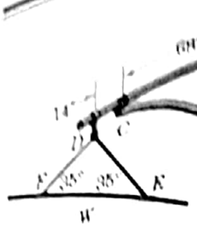
گره E : $\sum F_x = ۰ : DE\cos ۴۵° - BE = ۰$

$BE = ۷kN$ (کششی)

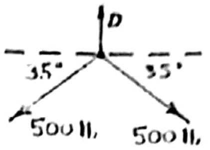


Scanned by CamScanner

۴-۱۳۲. در شکل زیر تکیه‌گاه یک خط قدرت برای قطار سریع‌السیر که وزن کمی را می‌تواند تحمل کند، نشان داده شده است. چنانچه نیروی کششی کابل EDF معادل $۵۰۰ lb$ باشد، نیرویی را که پیچ موجود در B تحمل می‌کند، تعیین کنید.



حل:

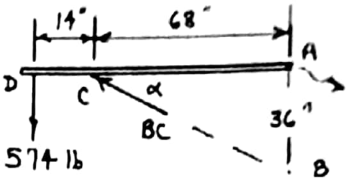


$D: \quad \uparrow\sum F=۰ \quad : \quad D-۲(۵۰۰)\sin ۳۵^\circ=۰ \quad , \quad D=۵۷۴ lb$

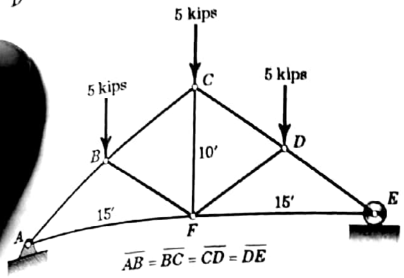
$ACD: \quad \alpha=\tan^{-۱}\frac{۳۶}{۶۸}=۲۷/۹^\circ$

$+\sum M_A=۰ \quad : \quad ۵۷۴(۸۲)-BC\sin ۲۷/۹^\circ(۶۸)=۰$

$BC=F=۱۴۷۸ lb$



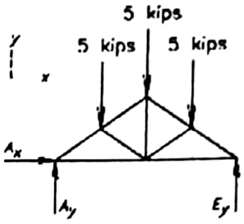
۴-۱۳۳. نیرو در هر عضو از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:

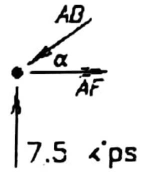
با توجه به تقارن : $A_y=E_y=۷/۵\ kips$

$\sum F_x=۰ \quad , \quad A_x=۰$



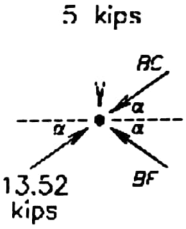
گره A :

$\alpha=\tan^{-۱}\frac{۱۰}{۱۵}=۳۳/۷^\circ$



$\begin{cases}\sum F_x=۰ \quad : \quad -۱۳/۵۲\cos ۳۳/۷^\circ+AF=۰ \quad , \quad AF=۱۱/۲۵\ kips \text{ (کششی)}\\ \sum F_y=۰ \quad : \quad -AB\sin ۳۳/۷^\circ+۷/۵=۰ \quad , \quad AB=۱۳/۵۲\ kips \text{ (فشاری)}\end{cases}$

گره B : $\begin{cases}\sum F_x=۰ \ : \ (۱۳/۵۲-BC-BF)\cos\alpha=۰\\ \sum F_y=۰ \ : \ (۱۳/۵۲-BC+BF)\sin\alpha-۵=۰\end{cases}$ $\begin{cases}BC=۹/۰۱ kips \text{ (فشاری)}\\ BF=۴/۵۱ kips \text{ (فشاری)}\end{cases}$



گره F :

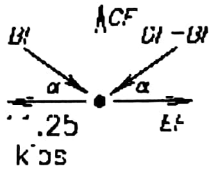
با توجه به تقارن ، $EF=AF=۱۱/۲۵\ kips$ (کششی)

$DF=BF=۴/۵۱\ kips$ (فشاری)

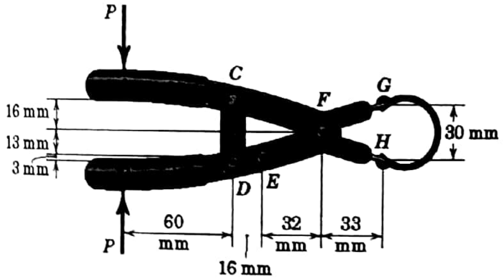
$\sum F_y=۰ \ : \ CF-۲(۴/۵۱)\sin ۳۳/۷^\circ=۰ \quad , \quad CF=۵ kips$ (کششی)

با توجه به تقارن کلی : $CD=۹/۰۱ kips$ (فشاری) , $DE=۱۳/۵۲\ kips$ (فشاری)

$DF=۴/۵۱ kips$ (فشاری)

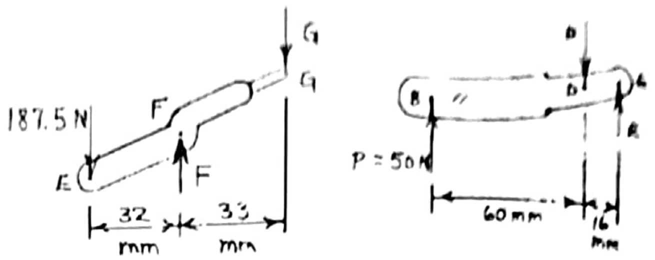


۴-۱۳۴. ابزار ویژه‌ی زیر برای نصب حلقه با ضربه‌ی ناگهانی و یا صاف کردن حلقه‌ها به کار می‌رود. اگر $P=۵۰N$ باشد، نیروی اعمالی منتقل شده در G و H را تعیین کنید.



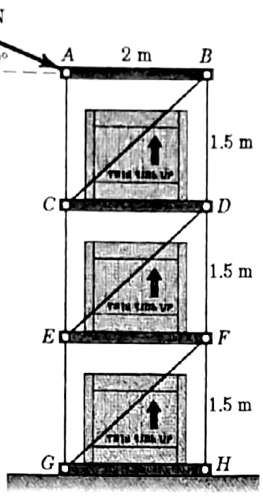
حل:

Scanned by CamScanner



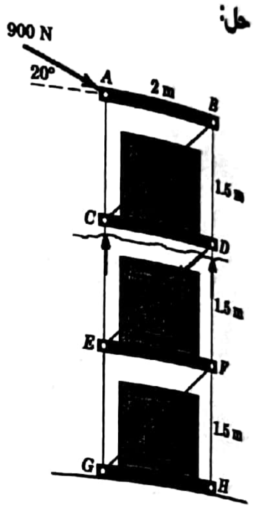
دسته‌ی BDE : $(+\sum M_D = ۰ \quad : \quad -۵۰(۶۰)+E(۱۶)=۰ \quad , \quad E=۱۸۷/۵\ N$

فک EFG : $(+\sum M_F = ۰ \quad : \quad ۱۸۷/۵(۳۲)-G(۳۳)=۰ \quad , \quad G=۱۸۱/۸\ N$



۴-۱۳۵. جرم هر کدام از این جایگاه‌های افقی مربوط به قفسه‌های انباری $۲۰kg$ بوده و در مرکز خود جعبه‌ای به جرم $۱۸۰kg$ را تحمل می‌کنند. مطابق شکل جایگاه‌ها با اعضای دو نیرویی با جرم ناچیز نگه داشته شده‌اند. چنانچه این قفسه در نقطه‌ی A تحت بار $۹۰۰N$ قرار بگیرد، نیروها در اعضای CE، DE و DF را تعیین کنید.

حل:



$\sum M_E = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲DF = ۸۴۵/۷(۳)+(۲۰+۱۸۰)۹/۸۱(۱)$

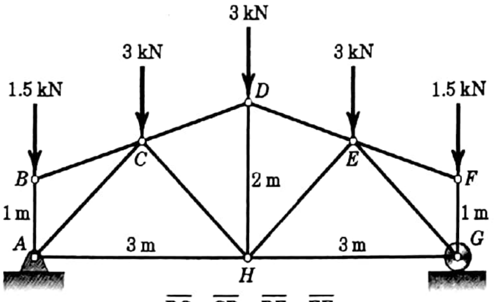
$DF = ۲۲۵۰N$

$\sum M_D = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲CE = -۸۴۵/۷(۱/۵)+(۲۰+۱۸۰)۹/۸۱(۱)+۲۰۷/۸۲(۲)$

$CE = ۶۵۵N$

$\sum F_x = ۰ \quad \Rightarrow \quad DE\cos ۳۶/۸۸ = ۸۴۵/۷ \quad , \quad DE = ۱۰۵۷\ N$

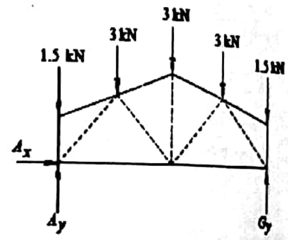
۴-۱۳۶. نیروها در اعضای CH، AH و CD از خرپای بارگذاری شده را تعیین کنید.



حل:

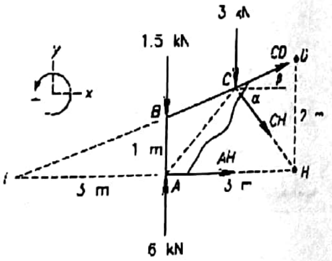
با توجه به تقارن $\quad , \quad A_y = G_y = ۶kN$

$\sum F_x = ۰ \quad , \quad A_x = ۰$



$\alpha = ۴۵° \quad , \quad \beta = \tan^{-1}\frac{۰/۵}{۱/۵} = ۱۸/۴۳°$

$\overline{AC} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} m$



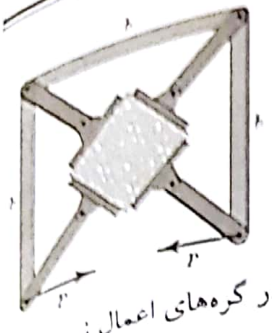
$\sum M_I = ۰ \quad : \quad ۶(۳)-۱/۵(۳)-۳(۴/۵)-CH(۲\overline{AC}) = ۰ \quad , \quad CH = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad : \quad ۶+CD\sin ۱۸/۴۳° -۱/۵-۳ = ۰$

$CD = -۴/۷۴kN$ یا $۴/۷۴\ kN$ (فشاری)

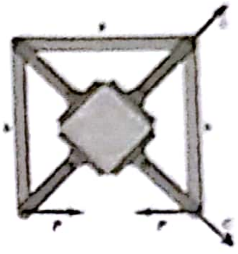
$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -۴/۷۴\cos ۱۸/۴۳° + AH = ۰ \quad , \quad AH = ۴/۵\ kN$ (کششی)

Scanned by CamScanner



۱۳۷-۴. یک قاب برای آزمایش مقاومت فشاری بلوک‌های بتنی طراحی شده است. مطابق شکل، این قاب از چهار صفحه‌ی فشاری، چهار میله‌ی رابط فشاری و سه میله‌ی رابط بیرونی که به صورت مربعی کنار هم قرار گرفته‌اند، تشکیل شده است. نیروی فشاری C وارد شده به هر طرف بلوک بتنی مربعی را برحسب نیروی اعمالی P بیان کنید.

حل:

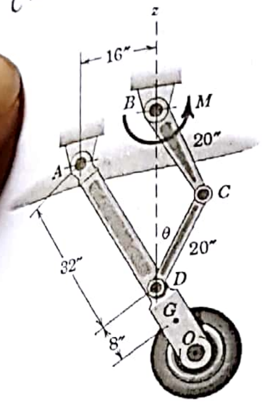


هر کدام از میله‌های رابط درونی دو نیرویی‌اند با نوشتن تعادل در گره‌های اعمال نیروی P داریم:

$\sum F_x = 0$

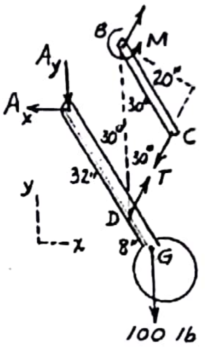
$C\cos 45^\circ - P = 0$

$C = P\sqrt{2}$



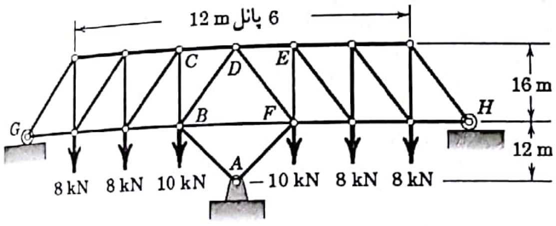
۱۳۸-۴. مجموعه‌ی چرخ جلوی هواپیما با اعمال گشتاور M به میله‌ی رابط BC از طریق شفت موجود در B در حال جمع شدن و بالا آمدن است. چنانچه بازو و چرخ OA در مجموع وزنی معادل $100 lb$ با مرکز ثقل G داشته باشند، موقعی که D دقیقاً زیر B قرار می‌گیرد، مقدار موردنیاز M برای بلند کردن چرخ را بیابید. در این حالت $\theta = 30^\circ$ است.

حل:



$ADG \ , \ \sum M_A = 0 \quad : \ 100(40\sin 30^\circ) - T(32\cos 30^\circ) = 0 \quad , \quad T = 72.2 lb$

$BC \ , \ \sum M_B = 0 \quad : \quad 72.2(20\cos 30^\circ) - M = 0 \quad , \quad M = 1250 lb.in$



۱۳۹-۴. اگر مشخص شده باشد که لولای مرکزی A نیمی از بارگذاری قائم نشان داده شده را تحمل می‌کند، نیرو در عضو BF را تعیین کنید.

حل:

$A_y = 26 kN \quad , \quad \sum M_G = 0$ (و با توجه به تقارن) $\Rightarrow H_y = G_y = 12 kN$

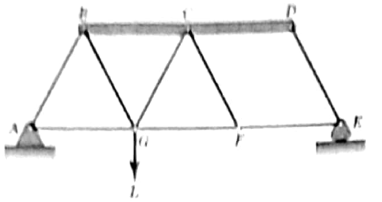
با توجه به تقارن $\Rightarrow$ گره A : $AF = BF = \dfrac{26}{2\sin 45^\circ} = 18.4 kN$ (فشاری)

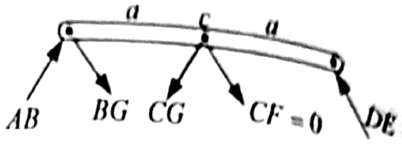
با زدن مقطعی از CD و DB و BF و AF و نگاه به سمت راست مقطع (یا چپ)

$\sum M_D = 0 \Rightarrow BF = 24.3 kN$ (کششی)

۱۴۰-۴. تمامی اعضای دو نیرویی این خرپای بارگذاری شده طول یکسانی دارند. عضو BCD یک تیر صلب است. نیروها در اعضای BG و CG را برحسب بار L تعیین کنید.

Scanned by CamScanner

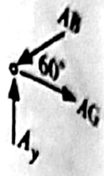




برای کل خرپا : $\sum M_C = 0$: $E_y\left(\frac{3a}{2}\right)+L\left(\frac{a}{2}\right)-A_y\left(\frac{3a}{2}\right)=0$ (۱)

(گره F : $\sum F_y = 0 \Rightarrow CF = 0$)

$\sum F_x = 0 \quad , \quad (AB+BG-CG-DE)\cos 60^\circ = 0$ (۲)



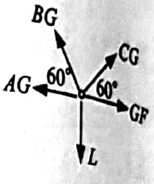
گره A : $\sum F_y = 0 \quad , \quad Ay - AB\sin 60^\circ = 0 \quad , \quad AB = \frac{2}{\sqrt{3}}A_y$ (۳)

$\sum F_x = 0 \quad , \quad AG - AB\cos 60^\circ = 0 \quad , \quad AG = \frac{1}{\sqrt{3}}A_y$ (۴)

گره E : $\sum F_y = 0 \Rightarrow DE = \frac{2}{\sqrt{3}}E_y$ (۵)

$\sum F_x = 0 \Rightarrow EF = \frac{1}{\sqrt{3}}E_y$ (۶)

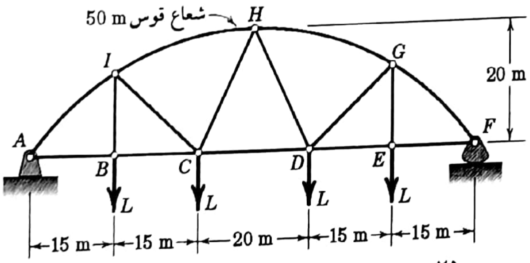
گره F $\Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow GF = EF = \frac{1}{\sqrt{3}}E_y$ (۷)



گره G : $\sum F_y = 0 \Rightarrow (BG+CG)\sin 60^\circ - L = 0$ (۸)

$\sum F_x = 0$: $-AG + GF + (CG-BG)\cos 60^\circ = 0$ (۹)

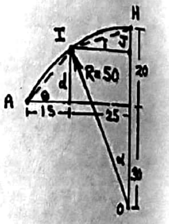
$(1)-(9) \Rightarrow BG = \frac{2L}{3\sqrt{3}}$ (کششی) , $CG = \frac{4L}{3\sqrt{3}}$ (کششی)



۴-۱۴۱. نیروها در اعضای AB، BI و CI از این خرپای ساده را تعیین کنید. دقت داشته باشید، تمامی اعضای منحنی شکل، دو نیرویی‌اند.

حل:

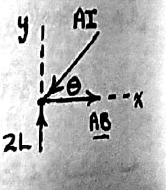
برای کل خرپا : $A = F = 2L$



$\sin\alpha = \frac{25}{50} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \quad , \quad \tan\alpha = \frac{25}{OJ}$

$\overline{OJ} = 43.3 \quad , \quad d = 43.3 - 30 = 13.3\,m$

$\tan\theta = \frac{d}{15} = \frac{13.3}{15} \quad , \quad \theta = 41.57^\circ \quad , \quad \tan\gamma = \frac{50-43.3}{25} \quad , \quad \gamma = 15^\circ$



گره A :

$y: 2L - AI\sin\theta = 0 \quad , \quad AI = 3.01L$ (فشاری)

$x: -3.01\cos\theta + AB = 0 \quad , \quad AB = 2.26L$ (کششی)

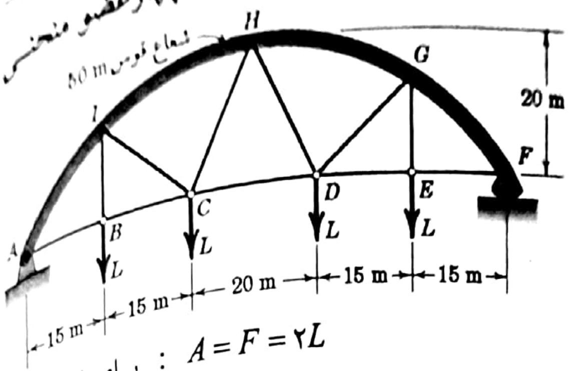
گره B : $\sum F_y = 0 \Rightarrow BI = L$ (کششی)

Scanned by CamScanner

گره I : $\sum F_x = ۰$ ، $\sum F_y = ۰$: $(۲٫۰۱L + CI)\sin\theta - HI\sin\gamma - L = ۰$

$CI = -۰٫۲۵۸L$ (کششی) ، $HI = ۲٫۶۹L$ (فشاری)

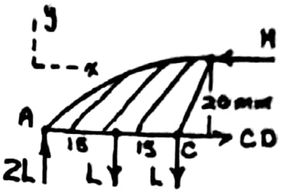
۴-۱۴۲. سازه‌ی مسئله‌ی ۱۴۱ اصلاح شده است، به صورتی که دو عضو AIH و HGF جایگزین چهارعضو منحنی شکل شده‌اند. ابزارهای دقیقی نشان داده‌اند کشش در هر کدام از اعضای CH و DH باید $۰٫۵L$ باشد. نیروها در اعضای AB، BI و CI را تعیین کنید. آیا مسئله بدون داشتن اطلاعاتی در مورد CH قابل حل بود؟



حل:

برای کل خرپا : $A = F = ۲L$

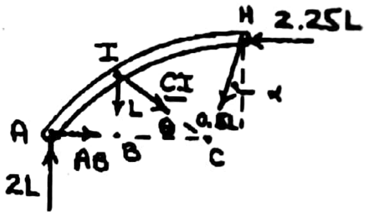
نیمی از سازه : $\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \; : \; ۲۰H + ۱۵L - ۳۰(۲L) = ۰$ ، $H = ۲٫۲۵L$



$\sum F_x = ۰ \Rightarrow CD = ۲٫۲۵L$ (کششی)

گره B : $\sum F_y = ۰$ ، $BI = L$ (کششی)

عضو AIH : $\theta = ۴۱٫۵۷^\circ$ ، $\alpha = \tan^{-1}\frac{۱۰}{۲۰} = ۲۶٫۵۷^\circ$ از سؤال قبل



$\sum F_y = ۰ \; : \; ۲L - L - CI\sin\theta - ۰٫۵L\cos\alpha = ۰$

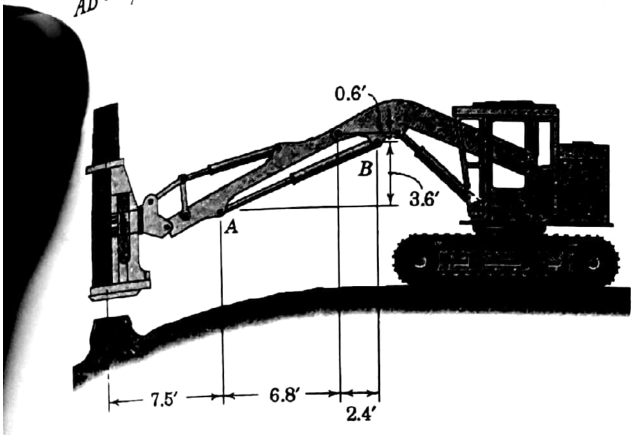
$CI = ۰٫۸۳۳L$ (کششی)

$\sum F_x = ۰ \; : \; AB + ۰٫۸۳۳L\cos\theta - ۰٫۵L\sin\alpha - ۲٫۲۵L = ۰$

$AB = ۱٫۸۵L$ (کششی)

مسئله بدون داشتن اطلاعاتی در مورد CH، غیرقابل حل بود.

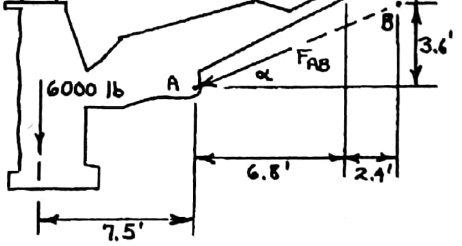
۴-۱۴۳. وسیله‌ای مطابق شکل، درختان را از سطحی نزدیک زمین قطع کرده و سپس تنه‌ی آنها را با چنگ‌های خود می‌گیرد. اگر وزن درخت $۶۰۰۰lb$ باشد، در موقعیت موردنظر، نیروی استوانه‌ی هیدرولیکی AB و همچنین فشار موردنیاز روی پیستون استوانه به قطر $۴٫۷۲in$ را تعیین کنید.



حل:

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۳٫۶}{۹٫۲}\right) = ۲۱٫۴^\circ$

$\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \; : \; -F_{AB}\cos\alpha(۰٫۶) - F_{AB}\sin\alpha(۲٫۴) + ۶۰۰۰(۱۴٫۳) = ۰$

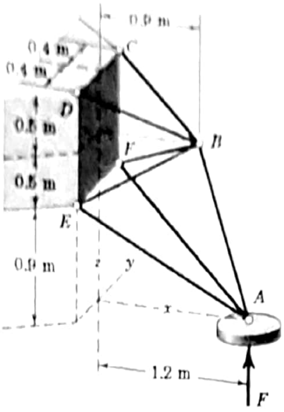


$F_{AB} = ۵۹۹۰۰lb$

$F_{AB} = pA \; : \; ۵۹۹۰۰ = p\left(\pi\frac{۴٫۷۲^۲}{۴}\right)$ ، $p = ۳۴۲۰\frac{lb}{in^۲}$

۴-۱۴۴. مطابق شکل، برای سیستم فرود یک فضاپیمای تحقیقاتی، یک خرپای فضایی متقارن نسبت به

Scanned by CamScanner



... طراحی شده است. برای نیروی $F=۲/۲kN$، نیروی ایجاد شده در عضو BE را محاسبه کنید. فرض کنید تعادل استاتیکی، اگر جرم خرپا ... برقرار می‌شود. فرض کنید در اعضای متقارن نیروهای مساوی ... ایجاد می‌شود.

حل:

$$F_{AE}=F_{AF}=F_۱ \quad , \quad F_{BE}=F_{BF}=P \quad , \quad F_{BD}=F_{BC}=C$$

$$\mathbf{F}_{AE}=\frac{F_۱}{۱/۵۵۲}(-۱/۲\mathbf{i}-۰/۴\mathbf{j}+۰/۹\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{F}_{AF}=\frac{F_۱}{۱/۵۵۲}(-۱/۲\mathbf{i}+۰/۴\mathbf{j}+۰/۹\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_{AB}=\frac{F_{AB}}{۱/۴۳۲}(-۰/۳\mathbf{i}+۱/۴\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{F}=۲/۲\mathbf{k}$$

$$A \text{ گره} \quad , \quad \sum\mathbf{F}=۰ \Rightarrow \left[\frac{F_{AB}}{۱/۴۳۲}(-۰/۳)+\frac{۲F_۱}{۱/۵۵۲}(-۱/۲)\right]\mathbf{i}+\left[۲/۲+\frac{F_{AB}}{۱/۴۳۲}(۱/۴)+\frac{۲F_۱}{۱/۵۵۲}(۰/۹)\right]\mathbf{k}=۰$$

$$\Rightarrow \quad F_{AB}=-۲/۶۸۱kN \quad , \quad F_۱=۰/۳۶۳kN$$

$$B \text{ گره} \quad , \quad \mathbf{F}_{BE}=\frac{P}{۱/۱۰۵}(-۰/۹\mathbf{i}-۰/۴\mathbf{j}-۰/۵\mathbf{k})$$

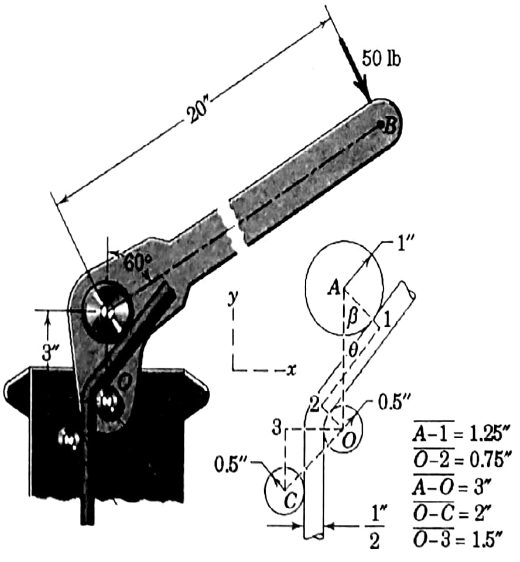
$$\mathbf{F}_{BF}=\frac{P}{۱/۱۰۵}(-۰/۹\mathbf{i}+۰/۴\mathbf{j}-۰/۵\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{F}_{BD}=\frac{C}{۱/۱۰۵}(-۰/۹\mathbf{i}-۰/۴\mathbf{j}+۰/۵\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_{BC}=\frac{C}{۱/۱۰۵}(-۰/۹\mathbf{i}+۰/۴\mathbf{j}+۰/۵\mathbf{k})$$

$$\sum\mathbf{F}=۰ \Rightarrow \left(\frac{-۱/۸P}{۱/۱۰۵}-\frac{۱/۸C}{۱/۱۰۵}+۰/۳\frac{-۲/۶۸۱}{۱/۴۳۲}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{-P}{۱/۱۰۵}+\frac{C}{۱/۱۰۵}-۱/۴\frac{-۲/۶۸۱}{۱/۴۳۲}\right)\mathbf{k}+۰\mathbf{j}=۰$$

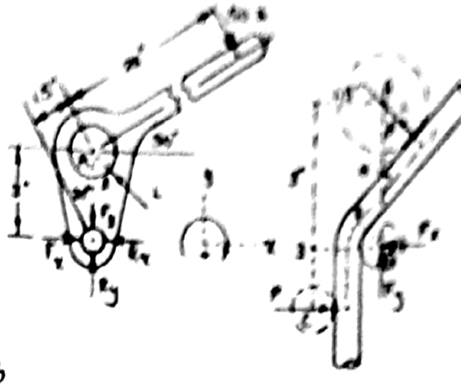
$$\Rightarrow \quad P=۱/۶۲\ kN \quad , \quad C=-۱/۲۷۵kN \quad , \quad F_{BE}=P=۱/۶۲kN$$

۱۴۵-۴. در شکل وسیله‌ای برای خم کردن آرماتور نشان داده شده است. اهرم OAB در نقطه‌ی O به صفحه‌ی پایه‌ی ثابتی لولا شده است. غلتک‌های شکل‌دهنده در A، O و C می‌توانند آزادانه بچرخند. برای موقعیت $۶۰°$ نشان داده شده، نیرویی معادل $۵۰lb$ بر اهرم موردنیاز است. در این وضعیت، مؤلفه‌های x و y نیروی R را که صفحه‌ی پایه به شفت غلتک O وارد می‌کند، محاسبه کنید. (پیشنهاد: نمودار جسم آزاد مربوط به آرماتور و اهرم و غلتک‌ها را جداگانه تحلیل کنید. مشاهده می‌شود که نیرویی که توسط آرماتور خمیده به غلتک O وارد می‌شود، اضافه بر نیرویی است (R) که توسط صفحه‌ی پایه به آن وارد می‌شود.)



حل:

$$\overline{۱-۲}=۳\sin\beta=۲/۲۴''$$



$$C = \sqrt{۲^۲ - ۱/۵^۲} = ۱/۳۲۳$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{۱/۱۲۵ + ۰/۷۵}{۲} = ۴۱/۸^\circ$$

$$\beta = ۹۰^\circ - \theta = ۴۸/۲^\circ$$

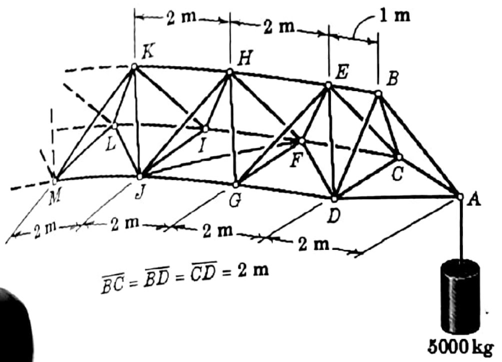
دسته ، $\sum M_O = ۰ : ۵۰(۲۱/۵) - L\sin ۴۸/۲^\circ(۳) = ۰$

$L = ۴۸۱ lb$

آرماتور
$$\begin{cases} \sum M_O = ۰ & : ۴۸۱(۲/۲۴) - P(۱/۳۲۳) = ۰ \quad , \; P = ۸۱۳ lb \\ \sum F_x = ۰ & : ۸۱۳ + ۴۸۱\sin ۴۸/۲^\circ - F_x = ۰ \; , \; F_x = ۱۱۷۱ lb \\ \sum F_y = ۰ & : F_y - ۴۸۱\cos ۴۸/۲^\circ = ۰ \quad , \; F_y = ۳۲۱ lb \end{cases}$$

دسته
$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ : ۱۱۷۱ - R_x - ۴۸۱\sin ۴۸/۲^\circ + ۵۰\sin ۳۰^\circ = ۰ \; , \; R_x = ۸۳۸ lb \\ \sum F_y = ۰ : R_y - ۳۲۱ + ۴۸۱\cos ۴۸/۲^\circ - ۵۰\cos ۳۰^\circ = ۰ \; , \; R_y = ۴۳/۳ lb \end{cases}$$

۴-۱۴۶. قسمتی از سازه‌های یک جرثقیل طویل هوایی در تصویر نشان داده شده است. این سازه، نمونه‌ای از سازه‌های متناوب است که از واحدهای مشابه و تکراری تشکیل شده است. با روش مقطع، نیروها در اعضای *FJ* و *GJ* را بیابید.



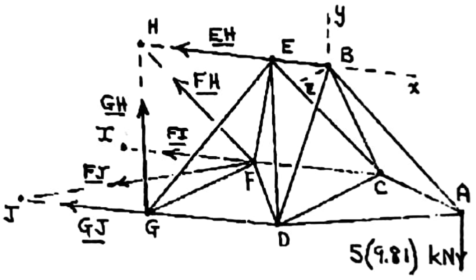
حل:

نیرو در تمامی اعضا کششی فرض شده است.

توجه کنید که مقطع از شش عضو عبور کرده است.

$$\mathbf{GJ} = -GJ\,\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{FI} = -FI\,\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{FJ} = \frac{FJ}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

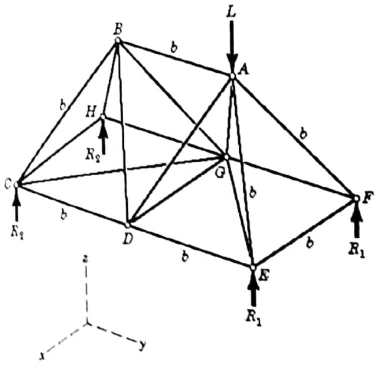
$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_H = ۰ \quad : \quad & -۴۹/۰۵(۵)\mathbf{k} + (-۲\cos ۳۰^\circ\,\mathbf{j} + ۲\sin ۳۰^\circ\,\mathbf{k}) \times (-GJ)\mathbf{i} \\ & + (-۲\cos ۳۰^\circ\,\mathbf{j} - ۲\sin ۳۰^\circ\,\mathbf{k}) \times (-FI)\mathbf{i} \\ & + (\mathbf{i} - ۲\cos ۳۰^\circ\,\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times \frac{FJ}{\sqrt{۲}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k}) = ۰ \end{aligned}$$



$$-۱/۲۲۵ FJ = ۰ \;\Rightarrow\; FJ = ۰$$

$$\left.\begin{aligned} & -GJ + FI = ۰ \\ & -۱/۷۳۲ GJ - ۱/۷۳۲ FI = ۲۴۵ \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & FI = GJ = -۷۰/۸ kN \\ & GJ = ۷۰/۸ kN \text{ (فشاری)} \end{aligned}$$

۴-۱۴۷. یک خرپای فضایی از دو هرم با قاعده‌ی مربعی تشکیل شده است. قاعده‌ها در صفحه‌ی افقی *x-y* قرار دارند و در ضلع *DG* مشترکند. خرپا در نقطه‌ی *A* تحت بار قائم رو به پایین *L* قرار گرفته است و مطابق شکل توسط عکس‌العمل‌های قائم در گوشه‌ها حمایت می‌شود. تمامی اعضا به جز دو قطر قاعده، طول مشابه *b* را دارا می‌باشند. از مزیت دو صفحه‌ی قائم متقارن استفاده کرده و نیروی ایجاد شده در *AB* و *DA* را تعیین کنید. (توجه کنید که میله‌ی رابط *AB* از چرخش دو هرم حول *DG* جلوگیری می‌کند.)



Scanned by CamScanner

$$\sum M_{EF} = ۰ \quad , \quad ۱R_۱(۱b) \;\; L\frac{b}{۲} = ۰$$

$$R_۱ = \frac{L}{۸} \quad , \quad R_۱ = \frac{۳L}{۸}$$

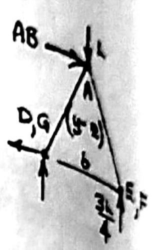
E گره : (صفحه‌ی قائم)

$$+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad \frac{۳L}{۸} - \frac{AE}{\sqrt{۲}} = ۰ \quad , \quad AE = \frac{۳L}{۲\sqrt{۲}}\ (C)$$

$$\sum M_{DG} = ۰ \quad ; \quad AB\frac{b}{\sqrt{۲}} + L\frac{b}{۲} - \frac{۳L}{۴}b = ۰$$

$$AB = \frac{L\sqrt{۲}}{۴}\ (C)$$

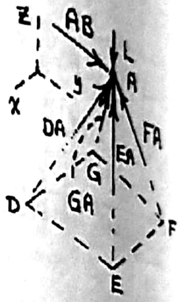
$$\mathbf{DA} = DA\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)$$



$$\mathbf{EA} = \frac{۳L}{۴\sqrt{۲}}\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{i} - \frac{۱}{۲}\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{GA} = GA\left(\frac{۱}{۲}\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{FA} = \frac{۳L}{۴\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\mathbf{i} - \frac{۱}{۲}\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{k}\right)$$



$$L = -L\,\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{AB} = \frac{L\sqrt{۲}}{۴}\mathbf{j}$$

$$\sum \mathbf{F} = ۰ \quad : \quad \mathbf{L} + \mathbf{AB} + \mathbf{DA} + \mathbf{EA} + \mathbf{GA} + \mathbf{FA} = ۰$$

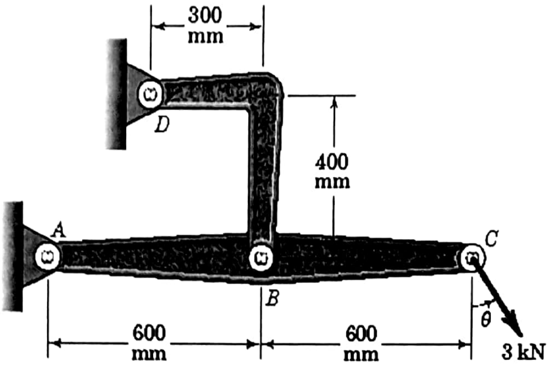
با توجه به تقارن : $DA = GA \quad , \quad EA = FA$

$$\mathbf{i} \;:\; -\frac{۱}{۲}DA - \frac{۳L}{۸\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۲}DA + \frac{۳L}{۸\sqrt{۲}} = ۰ \quad , \quad ۰ = ۰$$

$$\mathbf{j} \;:\; \frac{L\sqrt{۲}}{۴} + \frac{۱}{۲}DA - \frac{۳L}{۸\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۲}DA - \frac{۳L}{۸\sqrt{۲}} = ۰ \quad , \quad DA = GA = \frac{L\sqrt{۲}}{۸}\ (C)$$

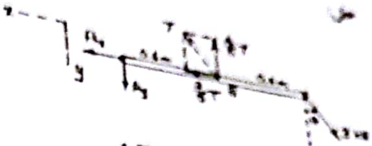
$$\mathbf{k} \;:\; -L + \frac{L}{۸} + \frac{۳L}{۸} + \frac{L}{۸} + \frac{۳L}{۸} = ۰ \quad , \quad ۰ = ۰$$

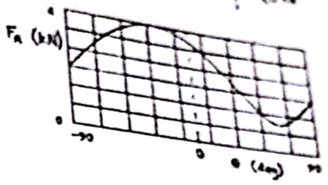
۱۴۸-۴. اعضای این سازه نیروی $۳kN$ را تحمل می‌کنند. این نیرو می‌تواند در هر زاویه‌ی θ بین -۹۰° تا $+۹۰^\circ$ اعمال شود. لولای A، باید برای بیشترین نیرویی که به آن منتقل می‌شود، طراحی شود. نیروی F_A در A را به صورت تابعی از θ رسم کنید و همچنین بیشترین مقدار آن و زاویه‌ی مربوط به آن را تعیین کنید.



Scanned by CamScanner

حل:





$$\sum M_A = 0 : 2\cos\theta(1/2) - \frac{4}{5}T(0/6) = 0 \ , \ T = \frac{15}{2}\cos\theta$$

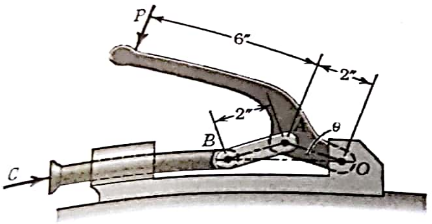
$$\sum F_x = 0 \ : A_x + \frac{3}{5}\left(\frac{15}{2}\cos\theta\right) - 2\sin\theta = 0$$

$$A_x = 2\sin\theta - \frac{9}{2}\cos\theta$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + 2\cos\theta - \frac{4}{5}\left(\frac{15}{2}\cos\theta\right) = 0 \ , \ A_y = 4\cos\theta$$

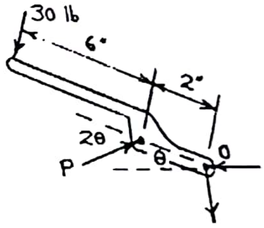
$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 2\sqrt{1 - 2\sin\theta\cos\theta + \frac{9}{4}\cos^2\theta}$$

$(F_A)_{max} = 6kN$ در $\theta = -26/6°$



۴-۱۴۹. با توجه به نیروی P روی دسته‌ی انبرک ضامن‌دار، اگر زاویه‌ی θ کاهش یابد، نیروی فک C به مقادیر خیلی بزرگی افزایش پیدا می‌کند. برای نیروی $P = 30lb$، رابطه‌ی بین C و θ را تعیین کرده و به عنوان تابعی از θ برای محدوده‌ی $\theta = 2°$ تا $\theta = 30°$ رسم کنید. فرض کنید که شفت می‌تواند آزادانه در جایگاهش بغلتد.

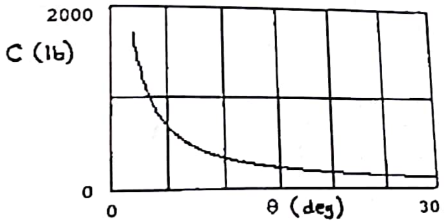
حل:



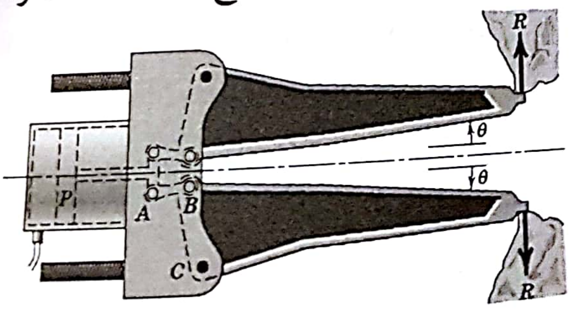
شفت ، $\sum F = 0 \ \Rightarrow \ C = P\cos\theta$

اهرم ، $\sum M_O = 0 \ : \ 30(8) - P\sin 2\theta(2) = 0$

$$P = \frac{120}{\sin 2\theta} = \frac{60}{\sin\theta\cos\theta} \quad , \quad C = \frac{60}{\sin\theta}\, lb$$



۴-۱۵۰. فک‌های نجات مسئله‌ی ۸۸ دوباره در اینجا نشان داده شده است درحالی که فک‌ها باز است. فشار P معادل $500lb/in^2$ پشت پیستونی به مساحت $20in^2$ تولید شده است. مطابق شکل با توجه به اینکه نیروی R به صورت قائم به لاشه وارد می‌شود، نیروی R را به صورت تابعی از θ محاسبه کرده و تابع به دست آمده را برای $0 \le \theta \le 45°$ رسم کنید. بیشترین مقدار R و زاویه‌ی مربوط به آن را تعیین کنید. برای دانستن اندازه‌ها و هندسه‌ی مسئله در حالت $\theta = 0$ به مسئله‌ی ۸۸ رجوع کنید. توجه کنید که میله‌ی اتصال AB و همتای مقابل آن در $\theta = 0$ افقی‌اند ولی وقتی فک‌ها باز می‌شود، از حالت افقی خارج می‌شوند.



Scanned by CamScanner

... توجه کنید که حالت افقی $\theta = ۰$ بوده و حالت دیگر $\theta \neq ۰$ است.

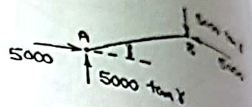
$$\alpha = \tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱۴/۰۳۶°$$

$$d = \sqrt{۱۷}(۱ - \cos\alpha)$$

$$d - h = \sqrt{۱۷}\,(۱ - \cos(\alpha - \theta)) \;\Rightarrow\; h = \sqrt{۱۷}\,[\cos(\alpha - \theta) - \cos\alpha]$$

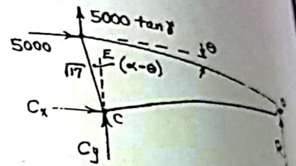
$$\sin\gamma = \frac{h}{۲} = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}[\cos(\alpha - \theta) - \cos\alpha]$$

AB یک عضو دو نیرویی است.



$$\left(۵۰۰۰\,lb = \frac{PA}{۲}\right)$$

نمودار آزاد فک پایین : $\overline{CD} = \sqrt{۱۸^۲ + ۳/۷۵^۲} = ۱۸/۳۹''$

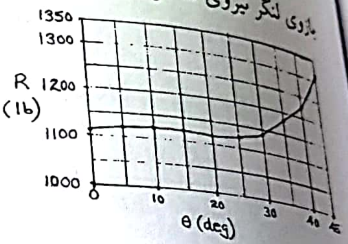


در حالت $\theta = ۰$ ، $\angle ECD = \beta = \tan^{-۱}\dfrac{۱۸}{۳/۷۵} = ۷۸/۲۳°$

در حالت $\theta \neq ۰$ ، $\angle ECD = \beta + \theta$

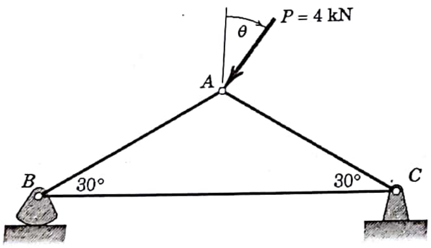
بازوی لنگر نیروی R حول C = $\overline{CD}\sin(\beta + \theta)$

$$\sum M_C = ۰ \;:\; CD\sin(\beta + \theta)R - ۵۰۰۰\sqrt{۱۷}\cos(\alpha - \theta) - ۵۰۰۰\sqrt{۱۷}\tan\gamma\sin(\alpha - \theta) = ۰$$



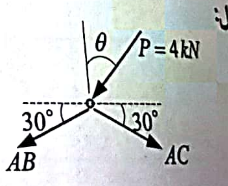
$$R = \frac{۱۱۲۱/۲۳۳}{\sin(۷۸/۲۳° + \theta)}[\cos(\theta - ۱۴/۰۳۶°) - \tan\gamma\sin(\theta - ۱۴/۰۳۶°)]$$

$R_{max} = ۱۳۱۴\;lb$ در $\theta = ۴۵°$



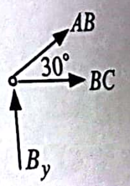
۱۵۱-۴. نیروها در اعضای این خرپای ساده را برحسب θ تعیین کرده و برای مقادیر θ در محدوده‌ی $۰ \le \theta \le ۱۲۰°$ رسم کنید. اگر زاویه‌ی θ به $۱۲۰°$ برسد چه اتفاقی می‌افتد؟ برای رسم نیروها، نیروی کششی را مثبت درنظر بگیرید. بیشترین مقدار نیروی کششی و بیشترین مقدار نیروی فشاری در هر عضو را تعیین کنید.

حل:



$$\text{گره } A \;:\; \begin{cases} \sum F_y = ۰ \;:\; -P\cos\theta - (AC + AB)\sin ۳۰° = ۰ \\ \sum F_x = ۰ \;:\; (AC - AB)\cos ۳۰° - P\sin\theta = ۰ \end{cases}$$

$$P = ۴kN \;\Rightarrow\; AB = -۴\left(\cos\theta + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\sin\theta\right)$$



$$AC = ۴\left(-\cos\theta + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\sin\theta\right)$$

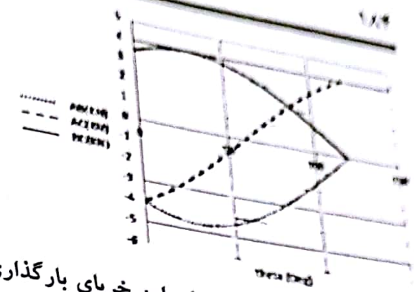
$$B \text{ گره}: \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow BC = -AB\cos 30^\circ$$

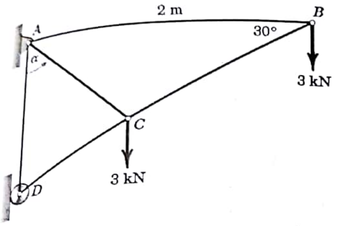
$$BC = 2\sqrt{3}\left(\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$-3/46 \le AB \le 0 \ kN$$

$$-3/46 \le AC \le 4 \ kN$$

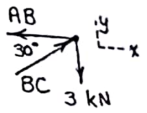
$$0 \le BC \le 4 \ kN$$





۴-۱۵۲. نیروها در تمامی اعضای این خرپای بارگذاری شده را برحسب تابعی از α تعیین کرده و در محدوده $0 \le \alpha \le 90^\circ$، تابع را رسم کنید. کمترین مقدار نیروی اعضای AC و CD و مقادیر α مربوط به این نیروها را مشخص کنید.

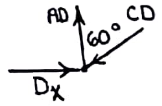
حل:



$$B \text{ گره}: \begin{cases} \sum F_y = 0 : \ BC\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 0 \ , \quad BC = 6\,kN \ (C) \\ \sum F_x = 0 : \ -AB + 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \ , \quad AB = 3\sqrt{3}\ kN \ (T) \end{cases}$$

$$C \text{ گره}: \begin{cases} \sum F_x = 0 : \ -AC\sin\alpha - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + CD\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ \sum F_y = 0 : \ AC\cos\alpha - 6\left(\frac{1}{2}\right) + CD\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 0 \end{cases}$$

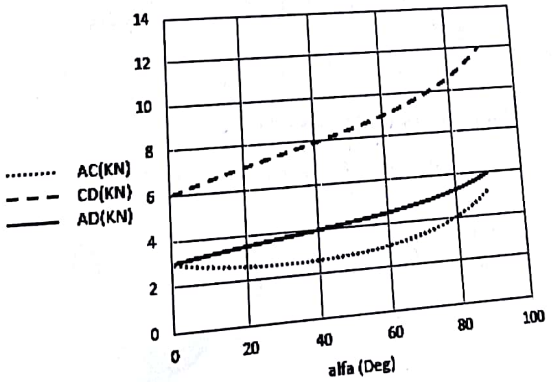
$$\Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{3}\,kN}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}\ (T) \quad , \quad CD = 12 - \frac{6\sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}\,kN\ (C)$$



$$D \text{ گره}: \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow AD - CD\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$AD = 6 - \frac{3\sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}\,kN\ (T)$$

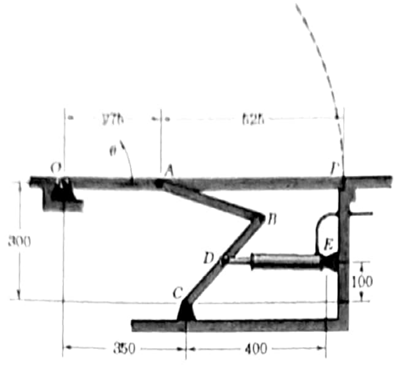
در نمودارها نیروی کششی (+) و نیروی فشاری (−) است.



$(CD)_{min} = 6\,kN$ (فشاری) در $\alpha = 0$

$(AC)_{min} = 2/6\,kN\ (T)$ در $\alpha = 30^\circ$ ،

درب تهویه‌ی یکنواخت OAP به جرم $۳۰kg$ با مکانیزم نشان داده شده باز می‌شود. نیروی موردنیاز در استوانه‌ی DE را به عنوان تابعی از θ (میزان باز شدن درب) در محدوده‌ی $۰ \le \theta \le \theta_{max}$ رسم کنید. θ_{max} بیشترین مقداری است که درب می‌تواند باز شود. کمترین و بیشترین مقدار این نیرو و زاویه‌ی مربوط به آن را تعیین کنید. توجه کنید که در حالت $\theta = ۰$، استوانه افقی نیست.



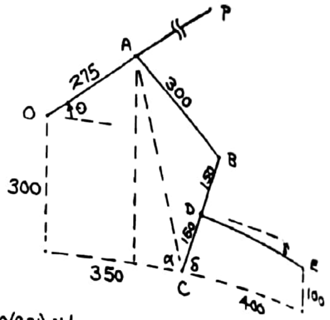
$\overline{AB} = 300 \quad \overline{CD} = \overline{DB} = 150$

اندازه‌ها به mm

حل:

$$\overline{AC} = \sqrt{(۲۵۰ - ۲۷۵\cos\theta)^۲ + (۲۰۰ + ۲۷۵\sin\theta)^۲}$$

$$\angle ABC = \cos^{-۱}\left[\frac{\overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ - \overline{AC}^۲}{۲\overline{AB}\,\overline{BC}}\right]$$

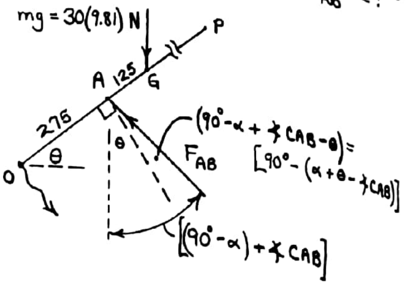


$$\alpha = \tan^{-۱}\left[\frac{۲۰۰ + ۲۷۵\sin\theta}{۲۵۰ - ۲۷۵\cos\theta}\right]$$

$$\angle CAB = \angle ACB = \frac{۱۸۰^\circ - \angle ABC}{۲}$$

$$\delta = ۱۸۰^\circ - \alpha - \angle ACB$$

$$\circlearrowright + \sum M_o = ۰ \quad : \quad F_{AB}\cos[۹۰^\circ - (\alpha + \theta - \angle CAB)]\overline{OA} - mg\overline{OG}\cos\theta = ۰$$

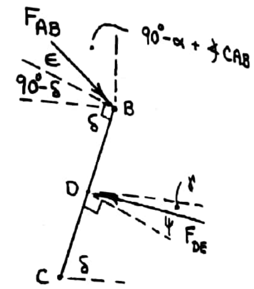


$$F_{AB} = \frac{mg\,\overline{OG}\cos\theta}{\overline{OA}\sin(\alpha + \theta - \angle CAB)}$$

$$(۹۰^\circ - \delta) + \varepsilon + (۹۰^\circ - \alpha - \angle CAB) = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \alpha + \delta - \angle CAB - ۹۰^\circ = \alpha + (۱۸۰^\circ - \alpha - \angle ACB) - \angle CAB - ۹۰^\circ$$

$$\varepsilon = ۹۰^\circ - ۲\angle ACB$$



همچنین , $\gamma + \psi = ۹۰^\circ - \delta$, $\psi = ۹۰^\circ - \delta - \gamma$

$$\gamma = \tan^{-۱}\left[\frac{۱۵۰\sin\delta - ۱۰۰}{۴۰۰ - ۱۵۰\cos\delta}\right]$$

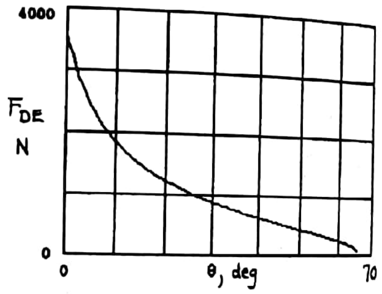
$$\circlearrowright + \sum M_C = ۰ \quad : \quad -F_{AB}\cos\varepsilon(\overline{CB}) + F_{DE}\cos\psi(\overline{CD}) = ۰$$

$$F_{DE} = \frac{F_{AB}\cos\varepsilon(\overline{CB})}{\overline{CD}\cos\psi}$$

بیشترین مقدار $\overline{AC} = ۶۰۰mm$, $\theta_{max} = ۶۵/۹^\circ$

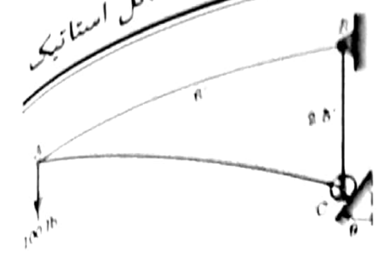
$(F_{DE})_{max} = ۲۵۸۰\ N$ در $\theta = ۰$

$(F_{DE})_{min} = ۰$ در $\theta = ۶۵/۹^\circ$



۱۵۴-۴. زاویه‌ی سطح تکیه‌گاه C می‌تواند از زاویه‌ی صفر (قائم) تا ۹۰° (افقی) تغییر کند. (الف) در این محدوده نیروی عضو BC را به عنوان تابعی از θ رسم کنید. به شرایط غیرمعمول توجه کنید. (ب) برای چه مقدار θ، نیروی عضو BC صفر می‌شود؟ (ج) اگر طراحی عضو BC به گونه‌ای باشد که با نیروی $۱۰۰۰lb$ چه

Scanned by CamScanner



کششی چه فشاری فرو بریزد، محدوده‌ی مجاز برای θ چقدر است؟

حل:

گره A :

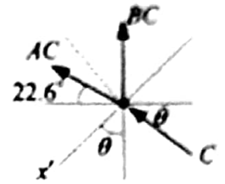
$$\alpha=\tan^{-1}\frac{۲/۵}{۶}=۲۲/۶^\circ$$

$$\Sigma F_y=۰\ :\ -۱۰۰-AC\sin\alpha=۰\quad,\quad AC=-۲۶۰\,lb$$

گره C :

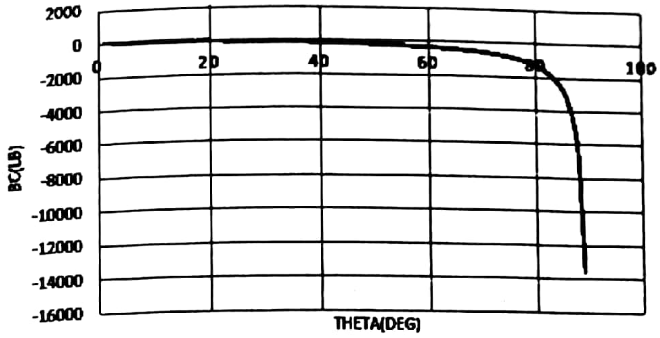
$$\Sigma F_{x'}=۰\ :\ AC\cos(۹۰-(\theta-۲۲/۶^\circ))-BC\cos\theta=۰$$

$$BC=\frac{-۲۶۰\sin(\theta-۲۲/۶^\circ)}{\cos\theta}\ lb\ \text{(کششی)}$$

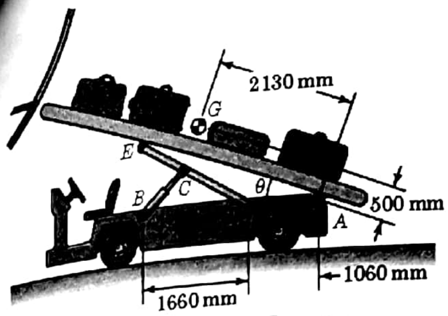


$$\theta=۲۲/۶^\circ\ \Rightarrow\ BC=۰$$

$$BC\le ۱۰۰۰\,lb\ \Rightarrow\ ۰\le\theta\le ۷۷/۷$$

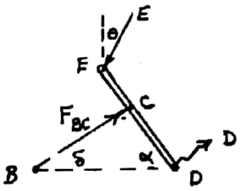


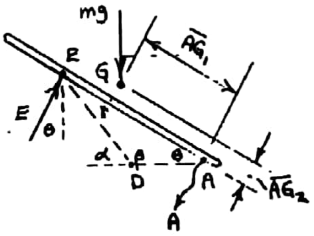
۴-۱۵۵. ماشین نشان داده شده برای حمل چمدان‌ها به داخل هواپیما استفاده می‌شود. مجموع جرم حامل و چمدان‌ها $۱۰۰kg$ بوده و مرکز جرم آن در G قرار دارد. نیرو در استوانه‌ی هیدرولیکی را برحسب تابعی از θ تعیین کرده و در محدوده‌ی $۰\le\theta\le ۳۵^\circ$ رسم کنید و بیشترین مقدار این محدوده را مشخص کنید.



$\overline{DE}=1945$ mm $\quad\overline{CD}=1150$ mm

حل:





$$\frac{\sin\gamma}{\overline{AD}}=\frac{\sin\theta}{\overline{DE}}\quad,\quad\gamma=\sin^{-۱}\left(\frac{\overline{AD}\sin\theta}{\overline{DE}}\right)$$

$$\beta=۱۸۰-(\theta+\gamma)\quad,\quad\alpha=۱۸۰-\beta$$

$$\overline{AE}=\sqrt{\overline{DE}^۲+\overline{AD}^۲-۲(\overline{DE})(\overline{AD})\cos\beta}$$

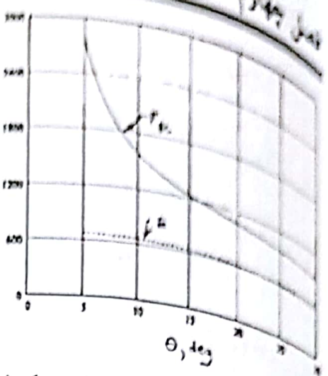
$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BD}^۲+\overline{CD}^۲-۲(\overline{BD})(\overline{CD})\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\overline{BC}}=\frac{\sin\delta}{\overline{CD}}\quad,\quad\delta=\sin^{-۱}\left(\frac{\overline{CD}\sin\alpha}{\overline{BC}}\right)$$

حامل : $\circlearrowright+\Sigma M_A=۰\ :\ -E(\overline{AE})+mg(\overline{AG_۱})\cos\theta-mg(\overline{AG_۲})\sin\theta=۰$ (۱)

DE : $\circlearrowright+\Sigma M_D=۰\ :\ E\cos\theta(\overline{DE}\cos\alpha)+E\sin\theta(\overline{DE}\sin\alpha)-F_{BC}\sin\delta(\overline{BD})=۰$ (۲)

Scanned by CamScanner



با توجه به اندازه‌ها : $\overline{AD} = ۱۶۴۰\,mm$

$\overline{BD} = ۱۴۴۰\,mm$, $\overline{DE} = ۱۹۲۵\,mm$

$\overline{CD} = ۱۱۵۰\,mm$, $\overline{AG_1} = ۲۱۲۰\,mm$

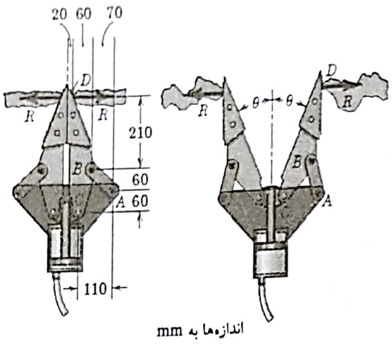
$\overline{AG_2} = ۵۰۰\,mm$, $mg = ۱۰۰(۹/۸۱)\,N$

$\theta = ۵°$

$\Downarrow$

$(F_{BC})_{max} = ۲۸۰۰\,N$

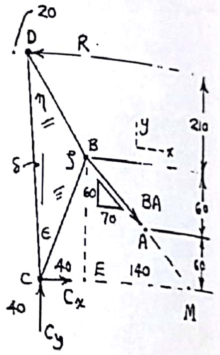
۱۵۶-۴. فک‌های نجات وسیله‌ای است که امدادگران برای باز کردن لاشه‌ها از آن استفاده می‌کنند. فشار $۳۵\,MPa\,(۳۵(۱۰^۶)\,N/m^۲)$ پشت پیستونی با شعاع $۵۰mm$ تولید شده است. ابتدا نیروی R نیروی میله‌ی رابط AB و عکس‌العمل افقی در C را برای وضعیت نشان داده شده در قسمت چپ تصویر تعیین کنید. سپس این مقادیر را برحسب زاویه‌ی θ به دست آورده و در محدوده‌ی $۰ \le \theta \le ۴۵°$ رسم کنید. کمترین مقدار R و مقدار θ مربوط به آن را مشخص کنید.



اندازه‌ها به mm

حل:

$$\theta = ۰ \quad : \quad C_y = \frac{PA}{۲} = \frac{P\pi r^۲}{۲} = \frac{۳۵(۱۰^۶)\pi(۰/۰۵)^۲}{۲} = ۱۳۷۴۰۰N$$



$$\delta = \tan^{-۱}\frac{۲۰}{۳۳۰} = ۳/۴۷°$$

$$\overline{CD} = \sqrt{۲۰^۲ + ۳۳۰^۲} = ۳۳۱mm$$

به صورت مشابه $\Rightarrow$ $\overline{BD} = ۲۱۸mm$, $\overline{BC} = ۱۲۶/۵mm$

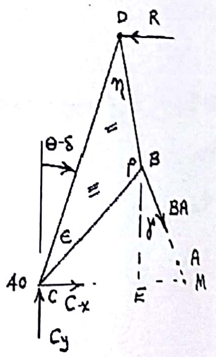
$$\circlearrowright + \sum M_M = ۰ \quad : \quad R(۲۳۰) - ۱۳۷۴۰۰(۱۸۰) = ۰ \quad , \quad R = ۷۵۰۰۰N$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad -BA\sin\left(\tan^{-۱}\frac{۶}{۷}\right) + ۱۳۷۴۰۰ = ۰ \quad , \quad BA = ۲۱۱۰۰۰N$$

$$\sum F_x = ۰ \; : \; -۷۵۰۰۰ + ۲۱۱۰۰۰\cos\left(\tan^{-۱}\frac{۶}{۷}\right) + C_x = ۰ \; , \; C_x = -۸۵۴۰۰N$$

$\theta > ۰$

$\overline{BD}^۲ = \overline{CD}^۲ + \overline{BC}^۲ - ۲\overline{CD}\,\overline{BC}\cos\varepsilon \quad \Rightarrow$ برای یافتن ε



$\dfrac{\sin\rho}{\overline{CD}} = \dfrac{\sin\varepsilon}{\overline{BD}}$ برای ρ

$\dfrac{\sin\rho}{\overline{CD}} = \dfrac{\sin\eta}{\overline{BC}}$ برای یافتن η

$$\overline{CE} = \overline{BC}\sin(\theta - \delta + \varepsilon)$$

$$\overline{BE} = \overline{BC}\cos(\theta - \delta + \varepsilon)$$

$۱۱۰ = \overline{AB}\sin\gamma + \overline{BC}\sin(\theta - \delta + \varepsilon) \quad \Rightarrow$ برای یافتن γ

Scanned by CamScanner

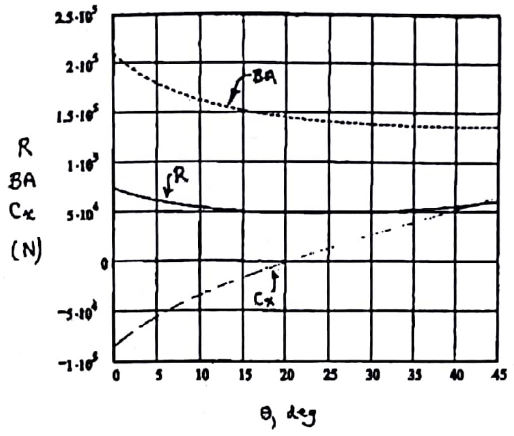
$\overline{EM} = \overline{BE}\tan\gamma \quad , \quad \overline{CM} = \overline{CE} + \overline{EM}$

$\circlearrowleft + \sum M_M = ۰ : R(\overline{CD}\cos(\theta-\delta)) - C_y(\overline{CM}) = ۰ \ , \ R = \dfrac{C_y\overline{CM}}{\overline{CD}\cos(\theta-\delta)}$

$\sum F_x = ۰ \quad : \quad -R + BA\sin\gamma + C_x = ۰ \quad , \quad C_x = R - BA\sin\gamma$

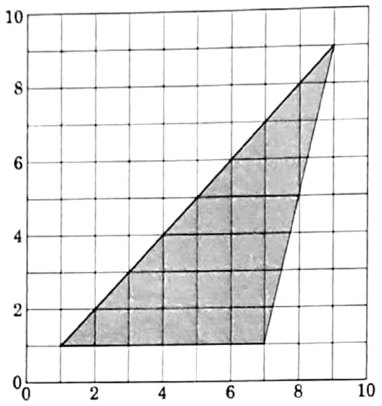
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad C_y - BA\cos\gamma = ۰ \quad , \quad BA = \dfrac{C_y}{\cos\gamma}$

$R_{min} = ۴۹۴۰۰N$ در $\theta = ۲۳/۲^\circ$



فصل پنجم

نیروهای گسترده



۵-۱. با مداد، مرکز سطح مثلث را به صورت تخمینی علامت بزنید. موقعیت تخمین زده خود را با نتایج مسئله ۵-۲ و جدول $D/۳$ بررسی کنید؟

حل:

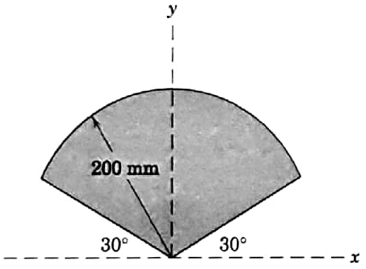
از جدول $D/۳$ مرکز سطح افقی برابر است با:

$$۱+\frac{(۹-۱)+(۷-۱)}{۳}=۵/۶۷$$

مرکز سطح عمودی:

$$۱+\frac{۹-۱}{۳}=۳/۶۷$$

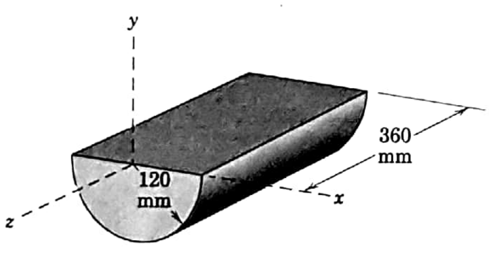
۵-۲. با مداد مرکز سطح قطاع دایره‌ای را تخمین بزنید. با استفاده از نتایج مسئله نمونه ۵-۳، تخمین خود را بررسی کنید.



حل:

$$\bar{x}=۰$$

$$\bar{y}=\frac{۲}{۳}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}=\frac{۲}{۳}\frac{۲۰۰\sin(\frac{۱۲۰^\circ}{۲})}{\frac{۱۲۰^\circ}{۲}(\frac{\pi}{۱۸۰})}=۱۱۰/۳mm$$



۵-۳. مرکز جرم استوانه همگن زیر را در مختصات x و y و z تعیین کنید.

حل:

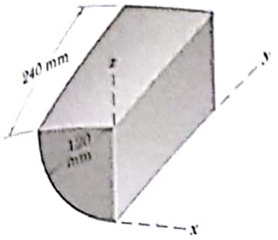
$$\bar{x}=۰$$

$$\bar{y}=-\frac{۴r}{۳\pi}=-\frac{۴(۱۲۰)}{۳\pi}=-۵۰/۹mm$$

$$\bar{z}=-\frac{۳۶۰}{۲}=-۱۸۰mm$$

Scanned by CamScanner

۵-۴. مرکز جرم استوانه همگن زیر را در مختصات x و y و z تعیین کنید.

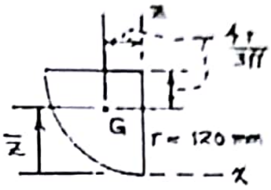


حل:

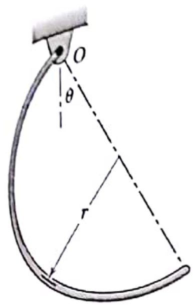
$$\bar{x} = -\frac{۴r}{۳\pi} = -\frac{۴(۱۲۰)}{۳\pi} = -۵۰/۹\,mm$$

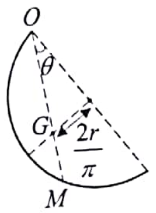
با بررسی : $\bar{y} = +۱۲۰\,mm$

$$\bar{z} = r - \frac{۴r}{۳\pi} = ۱۲۰ - ۵۰/۹ = ۶۹/۱\,mm$$



۵-۵. یک میله نیم‌دایره‌ای یکنواخت به شعاع r به کمک یک یاتاقانی در انتهـای بـالایی محار شده است و برای نوسان در یک صفحه عمودی آزاد است. θ که زاویه بـین قطـر با خط عمود برای حالت تعادل است را محاسبه کنید.





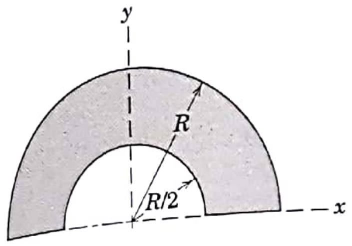
حل:

با گشتاورگیری حول نقطه O و برقراری تعادل داریم:

$$\tan\theta = \frac{۲}{\pi} \Rightarrow \theta = ۳۲/۵^\circ$$

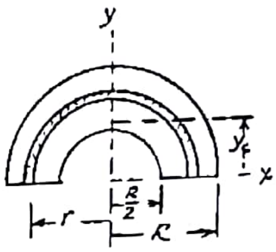
۵-۶. مختصات y مرکز سطح را به وسیله انتگرال‌گیری مستقیم تعیین کنید.

حل:



$$d_A = \pi r\,dr \Rightarrow A = \pi\int_{\frac{R}{۲}}^{R} r\,dr = \frac{۳\pi R^۲}{۸}$$

$$y_C = \frac{۲r}{\pi}$$

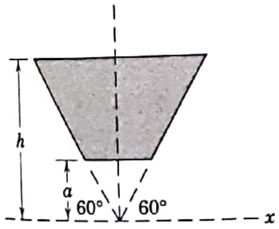


$$\int y_C dA = \int_{\frac{R}{۲}}^{R}\left(\frac{۲r}{\pi}\right)(\pi r\,dr) = \left[\frac{۲}{۳}r^۳\right]_{\frac{R}{۲}}^{R} = \frac{۷}{۱۲}R^۳$$

$$\bar{y}_A = \int y_C dA \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y_C dA}{A} = \frac{۷R^۳/۱۲}{۳\pi R^۲/۸} = \frac{۱۴R}{۹\pi}$$

۵-۷. مختصات‌های y مرکز سطح سایه‌زده شده را تعیین کنید. نتایج را برای مورد خاص $\alpha = ۰$ چک کنید.

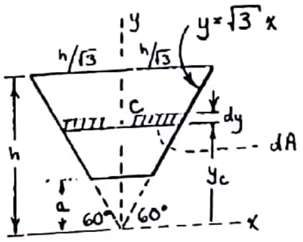
حل:



$$A = \frac{۱}{۲}\frac{۲}{\sqrt{۳}}hh - \frac{۱}{۲}\frac{۲}{\sqrt{۳}}aa = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(h^۲ - a^۲) = ۲x\,dy = ۲\left(\frac{y}{\sqrt{۳}}\right)dy$$

$$\int y_c dA = \int_a^h y\frac{۲}{\sqrt{۳}}y\,dy = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\frac{y^۳}{۳}\Bigg|_a^h = \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}(h^۳ - a^۳)$$

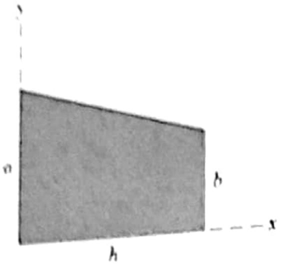
$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} = \frac{\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}(h^۳ - a^۳)}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}(h^۲ - a^۲)} = \frac{۲(h^۳ - a^۳)}{۳(h^۲ - a^۲)}$$



$(a = ۰, \bar{y} = \frac{۲}{۳}h,$ مقدار صحیح$)$

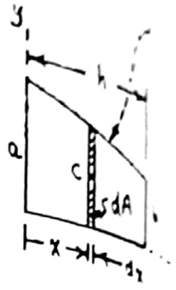
...مختصات‌های x و y مرکز سطح ذوزنقه را تعیین کنید.

حل:



$$y=\left(\frac{b-a}{h}\right)x+a$$

$$dA=y\,dx$$



$$A=\int dA=\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)x+a\right]dx=\left[\frac{b-a}{h}\frac{x^{۲}}{۲}+ax\right]_{۰}^{h}=\frac{h}{۲}(a+b)$$

$$\int x_c dA=\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)x^{۲}+ax\right]dx=\left[\frac{b-a}{h}\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{ax^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{h}=h^{۲}\left(\frac{b}{۳}+\frac{a}{۶}\right)$$

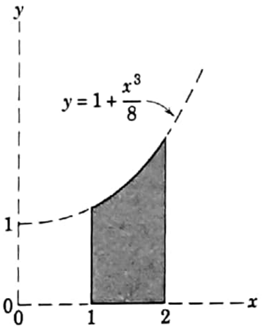
$$\int y_c dA=\int \frac{y}{۲}y\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{h}y^{۲}\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)^{۲}x^{۲}+z\left(\frac{b-a}{h}\right)ax+a^{۲}\right]dx$$

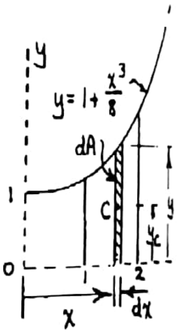
$$=\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)^{۲}\frac{x^{۳}}{۳}+۲\left(\frac{b-a}{h}\right)a\frac{x^{۲}}{۲}+a^{۲}x\right]_{۰}^{h}=\frac{h}{۶}[a^{۲}+ab+b^{۲}]$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c dA}{A}=\frac{h^{۲}(\frac{b}{۳}+\frac{a}{۶})}{\frac{h}{۲}(a+b)}=\frac{h(a+۲b)}{۳(a+b)}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y_c dA}{A}=\frac{\frac{h}{۶}(a^{۲}+ab+b^{۲})}{\frac{h}{۲}(a+b)}=\frac{(a^{۲}+ab+b^{۲})}{۳(a+b)}$$

۵-۹. مختصات‌های x و y مرکز سطح سایه‌زده شده زیر را تعیین کنید.

حل:





$$dA=y\,dx=\left(۱+\frac{x^{۳}}{۸}\right)dx$$

$$A=\int dA=\int_{۱}^{۲}\left(۱+\frac{x^{۳}}{۸}\right)dx=\left(x+\frac{x^{۴}}{۳۲}\right)\Bigg|_{۱}^{۲}=\frac{۴۷}{۳۲}$$

$$\int x_c dA=\int_{۱}^{۲}x\left(۱+\frac{x^{۳}}{۸}\right)dx=\left(\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۵}}{۴۰}\right)\Bigg|_{۱}^{۲}=\frac{۹۱}{۴۰}$$

$$\int y_c dA=\int \frac{y}{۲}y\,dx=\frac{۱}{۲}\int y^{۲}\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\left(۱+\frac{x^{۳}}{۸}\right)^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\left(۱+\frac{x^{۳}}{۴}+\frac{x^{۶}}{۶۴}\right)dx]$$

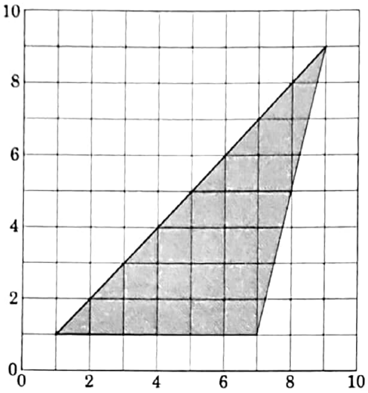
$$=\frac{۱}{۲}\left(x+\frac{x^{۴}}{۱۶}+\frac{x^{۷}}{۴۴۸}\right)\Bigg|_{۱}^{۲}=\frac{۹۹۵}{۸۹۶}$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c dA}{\int dA}=\frac{\frac{۹۱}{۴۱}}{\frac{۴۷}{۳۲}}=۱/۵۴۹\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y_c dA}{\int dA}=\frac{\frac{۹۹۵}{۸۹۶}}{\frac{۴۷}{۳۲}}=۰/۷۵۶$$

Scanned by CamScanner

فصل پنجم

نیروهای گسترده



۱-۵. با مداد، مرکز سطح مثلث را به صورت تخمینی علامت بزنید. موقعیت تخمین زده خود را با نتایج مسئله ۵-۲ و جدول $D/۳$ بررسی کنید؟

حل:

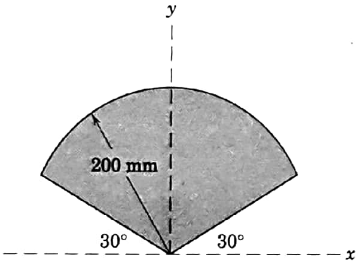
از جدول $D/۳$ مرکز سطح افقی برابر است با:

$$۱+\frac{(۹-۱)+(۷-۱)}{۳}=۵/۶۷$$

مرکز سطح عمودی:

$$۱+\frac{۹-۱}{۳}=۳/۶۷$$

۲-۵. با مداد مرکز سطح قطاع دایره‌ای را تخمین بزنید. با استفاده از نتایج مسئله نمونه ۵-۳، تخمین خود را بررسی کنید.

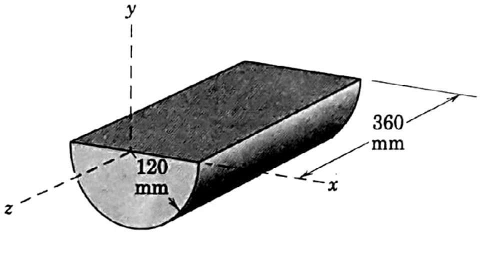


حل:

$$\bar{x}=۰$$

$$\bar{y}=\frac{۲}{۳}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}=\frac{۲}{۳}\frac{۲۰۰\sin(\frac{۱۲۰^\circ}{۲})}{\frac{۱۲۰^\circ}{۲}(\frac{\pi}{۱۸۰})}=۱۱۰/۳\,mm$$

۳-۵. مرکز جرم استوانه همگن زیر را در مختصات x و y و z تعیین کنید.



حل:

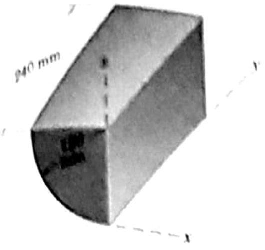
$$\bar{x}=۰$$

$$\bar{y}=-\frac{۴r}{۳\pi}=-\frac{۴(۱۲۰)}{۳\pi}=-۵۰/۹\,mm$$

$$\bar{z}=-\frac{۳۶۰}{۲}=-۱۸۰\,mm$$

Scanned by CamScanner

۴-۵. مرکز جرم استوانه همگن زیر را در مختصات x و y و z تعیین کنید.

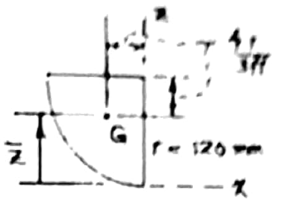


حل:

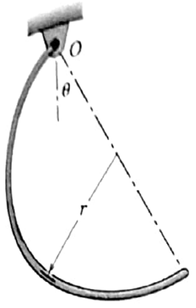
$$\bar{x} = -\frac{۴r}{۳\pi} = -\frac{۴(۱۲۰)}{۳\pi} = -۵۰/۹\,mm$$

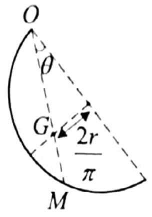
با بررسی : $\bar{y} = +۱۲۰\,mm$

$$\bar{z} = r - \frac{۴r}{۳\pi} = ۱۲۰ - ۵۰/۹ = ۶۹/۱\,mm$$



۵-۵. یک میله نیم‌دایره‌ای یکنواخت به شعاع r به کمک یک یاتاقانی در انتهای بالایی محار شده است و برای نوسان در یک صفحه عمودی آزاد است. θ که زاویه بین قطر با خط عمود برای حالت تعادل است را محاسبه کنید.



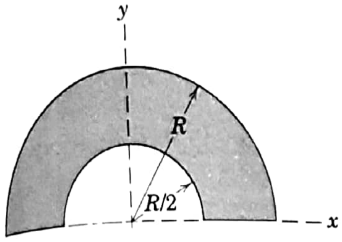


حل:

با گشتاورگیری حول نقطه O و برقراری تعادل داریم:

$$\tan\theta = \frac{۲}{\pi} \Rightarrow \theta = ۳۲/۵^\circ$$

۶-۵. مختصات y مرکز سطح را به وسیله انتگرال‌گیری مستقیم تعیین کنید.

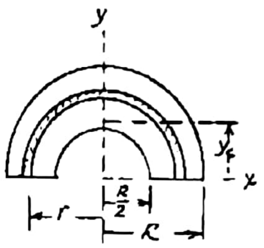


حل:

$$d_A = \pi r\,dr \Rightarrow A = \pi\int_{\frac{R}{۲}}^{R} r\,dr = \frac{۳\pi R^۲}{۸}$$

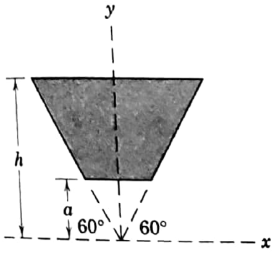
$$y_C = \frac{۲r}{\pi}$$

$$\int y_C dA = \int_{\frac{R}{۲}}^{R}\left(\frac{۲r}{\pi}\right)(\pi r\,dr) = \left[\frac{۲}{۳}r^۳\right]_{\frac{R}{۲}}^{R} = \frac{۷}{۱۲}R^۳$$



$$\bar{y}_A = \int y_C dA \Rightarrow \bar{y}\frac{\int y_C dA}{A} = \frac{۷R^۳/۱۲}{۳\pi R^۲/۸} = \frac{۱۴R}{۹\pi}$$

۷-۵. مختصات‌های y مرکز سطح سایه‌زده شده را تعیین کنید. نتایج را برای مورد خاص $\alpha = ۰$ چک کنید.



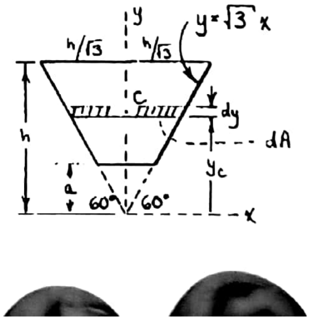
حل:

$$A = \frac{۱}{۲}\frac{۲}{\sqrt{۳}}hh - \frac{۱}{۲}\frac{۲}{\sqrt{۳}}aa = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(h^۲ - a^۲) = ۲x\,dy = ۲\left(\frac{y}{\sqrt{۳}}\right)dy$$

$$\int y_c dA = \int_a^h y\frac{۲}{\sqrt{۳}}y\,dy = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\frac{y^۳}{۳}\Big|_a^h = \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}(h^۳ - a^۳)$$

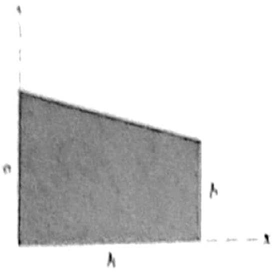
$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} = \frac{\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}(h^۳ - a^۳)}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}(h^۲ - a^۲)} = \frac{۲(h^۳ - a^۳)}{۳(h^۲ - a^۲)}$$

$(a = ۰, \bar{y} = \frac{۲}{۳}h,$ مقدار صحیح$)$



Scanned by CamScanner

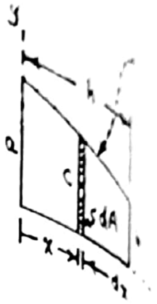
...مختصات‌های x و y مرکز سطح ذوزنقه را تعیین کنید.



$$y=\left(\frac{b-a}{h}\right)x+a$$

$$dA=y\,dx$$

$$A=\int dA=\int_0^h\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)x+a\right]dx=\left[\frac{b-a}{h}\frac{x^2}{2}+ax\right]_0^h=\frac{h}{2}(a+b)$$



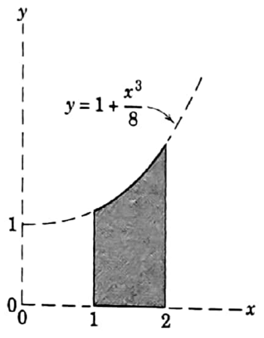
$$\int x_c dA=\int_0^h\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)x^2+ax\right]dx=\left[\frac{b-a}{h}\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}\right]_0^h=h^2\left(\frac{b}{3}+\frac{a}{6}\right)$$

$$\int y_c dA=\int\frac{y}{2}y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^h y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^h\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)^2x^2+z\left(\frac{b-a}{h}\right)ax+a^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{b-a}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}+2\left(\frac{b-a}{h}\right)a\frac{x^2}{2}+a^2x\right]_0^h=\frac{h}{6}[a^2+ab+b^2]$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c dA}{A}=\frac{h^2(\frac{b}{3}+\frac{a}{6})}{\frac{h}{2}(a+b)}=\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y_c dA}{A}=\frac{\frac{h}{6}(a^2+ab+b^2)}{\frac{h}{2}(a+b)}=\frac{(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

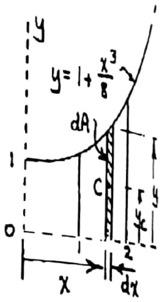
۵-۹۱. مختصات‌های x و y مرکز سطح سایه‌زده شده زیر را تعیین کنید.



حل:

$$dA=y\,dx=\left(1+\frac{x^3}{8}\right)dx$$

$$A=\int dA=\int_1^2\left(1+\frac{x^3}{8}\right)dx=\left(x+\frac{x^4}{32}\right)\Bigg|_1^2=\frac{47}{32}$$



$$\int x_c dA=\int_1^2 x\left(1+\frac{x^3}{8}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{40}\right)\Bigg|_1^2=\frac{91}{40}$$

$$\int y_c dA=\int\frac{y}{2}y\,dx=\frac{1}{2}\int y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(1+\frac{x^3}{8}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(1+\frac{x^3}{4}+\frac{x^6}{64}\right)dx]$$

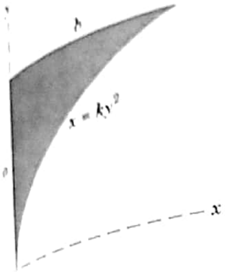
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^4}{16}+\frac{x^7}{448}\right)\Bigg|_1^2=\frac{995}{896}$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c dA}{\int dA}=\frac{\frac{91}{41}}{\frac{47}{32}}=1/549\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y_c dA}{\int dA}=\frac{\frac{995}{896}}{\frac{47}{32}}=0/756$$

Scanned by CamScanner

۵-۱۰. مختصات مرکز سطح سایه‌خورده زیر را تعیین کنید.

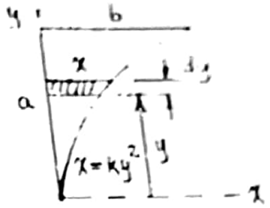
حل:



$$\begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases} \xrightarrow{x=ky^2} b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2} \Rightarrow x=\frac{b}{a^2}y^2$$

$$A=\int x\,dy=\int_0^a\left(\frac{b}{a^2}\right)y^2\,dy=\left(\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{a^3}{3}\right)=\frac{1}{3}ab$$

$$\int x_c\,dA=\int \frac{x}{2}x\,dy=\int_0^a\frac{b^2y^4}{2a^4}dy=\frac{ab^2}{10}$$



$$\bar{x}=\frac{\int x_c dA}{A}=\frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}}=\frac{3}{10}b$$

$$\int y_c\,dA=\int yx\,dy=\int_0^a\left(\frac{b}{a^2}y^3\right)dy=\frac{ba^2}{4}$$

$$\bar{y}=\frac{\int y_c dA}{A}=\frac{\frac{ab^2}{4}}{\frac{ab}{3}}=\frac{3}{4}a$$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dA}{\iint dA} \quad ; \quad \bar{y}=\frac{\iint y\,dA}{\iint dA}$$

$$\begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases} \xrightarrow{x=ky^2} b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

$$\iint dA=\int_0^a\int_0^{ky^2}dx\,dy=\int_0^a\left(x]_0^{ky^2}\right)dy=\frac{ka^3}{3}=\frac{ab}{3}$$

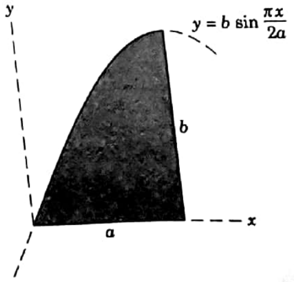
$$\iint x\,dA=\int_0^a\int_0^{ky^2}x\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^a\left(x^2]_0^{ky^2}\right)dy=\frac{k^2a^5}{10}=\frac{ab^2}{10}$$

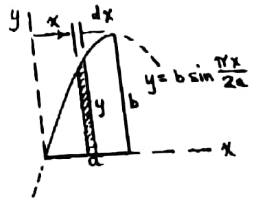
$$\iint y\,dA=\int_0^a\int_0^{ky^2}y\,dx\,dy=\int_0^a y\left(x]_0^{ky^2}\right)dy=\frac{ka^4}{4}=\frac{ba^2}{4}$$

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}}=\frac{3}{10}b \quad , \quad \bar{y}=\frac{\iint y\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{ba^2}{4}}{\frac{ab}{3}}=\frac{3}{4}a$$

۵-۱۱. مختصات مرکز سطح سایه‌خورده زیر را تعیین کنید.

حل:





Scanned by CamScanner

$$A=\int y\,dx=\int_0^a b\sin\frac{\pi x}{2a}dx=-\frac{2ab}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2a}\Big|_0^a=\frac{2ab}{\pi}$$

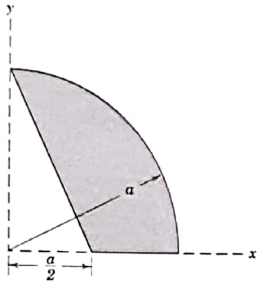
$$\int x_c dA=\int_0^a xy\,dx=\int_0^a bx\sin\frac{\pi x}{2a}dx=b\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2\left[\sin\frac{\pi x}{2a}-\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi x}{2a}\right]_0^a=\frac{4a^2b}{\pi^2}$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c\,dA}{A}=\frac{\frac{4a^2b}{\pi^2}}{\frac{2ab}{\pi}}=\frac{2a}{\pi}$$

$$\int y_c dA=\int_0^a\frac{y}{2}y\,dx=\frac{b^2}{2}\int_0^a\sin^2\frac{\pi x}{2a}dx=\frac{ab^2}{\pi}\left[\frac{\pi x}{4a}-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi x}{a}\right]_0^a=\frac{ab^2}{4}$$

$$\bar{y}=\frac{\int y_c\,dA}{A}=\frac{\frac{ab^2}{4}}{\frac{2ab}{\pi}}=\frac{\pi b}{8}$$

۵-۱۲. مختصات‌های x و y مرکز سطح سایه‌زده شده زیر را تعیین کنید.



حل:

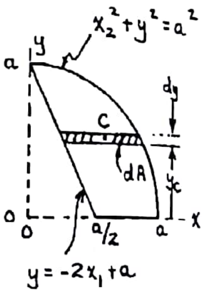
$$A=\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}\frac{a}{2}a=\frac{a^2}{4}(\pi-1)$$

$$dA=(x_2-x_1)\,dy=\left[\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a-y}{2}\right]dy$$

$$\int x_c dA=\int_0^a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)(x_2-x_1)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^a(x_2^2-x_1^2)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^a\left[(a^2-y^2)-\left(\frac{a-y}{2}\right)^2\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\left[a^2-y^2-\frac{1}{4}(a^2-2ay+y^2)\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{4}y^2+\frac{12}{ay}\right]dy$$

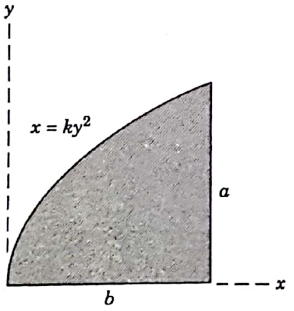
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}a^2y-\frac{5}{12}y^3+\frac{1}{4}ay^2\right]_0^a=\frac{7}{24}a^3$$



$$\int y_c dA=\int_0^a y\left[\sqrt{a^2-y^2}-\frac{a-y}{2}\right]dy=\left[-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-y^2)^3}-\frac{a}{2}\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}\right]_0^a=\frac{a^3}{4}$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c\,dA}{A}=\frac{\frac{7}{24}a^3}{\frac{a^2}{4}(\pi-1)}=\frac{7a}{6(\pi-1)}\quad,\quad\bar{y}=\frac{\int y_c\,dA}{A}=\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2}{4}(\pi-1)}=\frac{a}{\pi-1}$$

۵-۱۳. مختصات مرکز سطح سایه‌خورده زیر را تعیین کنید.



حل:

$$\begin{cases}x=b\\y=a\end{cases}\xrightarrow{x=ky^2}b=ka^2\;\Rightarrow\;k=\frac{b}{a^2}\;\Rightarrow\;x=\left(\frac{b}{a^2}\right)y^2$$

$$A=\int dA=\int y\,dx=\int_0^b a\sqrt{\frac{x}{b}}dx=\left[\frac{a}{\sqrt{b}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^b=\frac{2}{3}ab$$

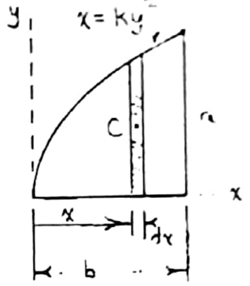
Scanned by CamScanner

$$\int x_c dA = \int_0^b \frac{a}{\sqrt{b}} x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{a}{\sqrt{b}}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^b = \frac{2}{5}ab^2$$

$$\int y_c dA = \int \frac{y}{2} y\,dx = \frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{a^2}{b} x\,dx = \frac{1}{4}a^2 b$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{\frac{2ab^2}{5}}{\frac{2ab}{3}} = \frac{3}{5}b \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{2ab}{3}} = \frac{3}{8}a$$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:



$$\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases} \xrightarrow{x = ky^2} b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

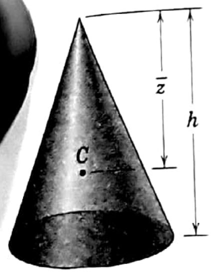
$$\iint dA = \int_0^a \int_0^{\sqrt{\frac{x}{k}}} dy\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} = \frac{ab}{3}$$

$$\iint x\,dA = \int_0^b \int_0^{\sqrt{\frac{x}{k}}} x\,dy\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^b x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5}ab^2$$

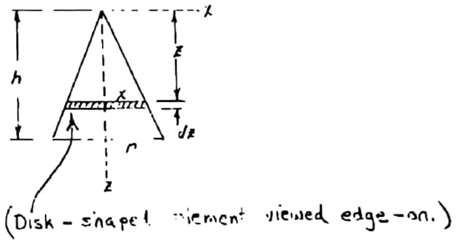
$$\iint y\,dA = \int_0^b \int_0^{\sqrt{\frac{x}{k}}} y\,dy\,dx = \frac{1}{2k}\int_0^b x\,dx = \frac{1}{4}a^2 b$$

$$\bar{x} = \frac{\iint x\,dA}{\iint dA} = \frac{\frac{2ab^2}{5}}{\frac{2ab}{3}} = \frac{3}{5}b \quad , \quad \bar{y} = \frac{\iint y\,dA}{\iint dA} = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{2ab}{3}} = \frac{3}{8}a$$

۵-۱۴. فاصله $\bar{z}$ را از رأس مخروط دایره‌ای شکل تا مرکز حجمش پیدا کنید.



حل:



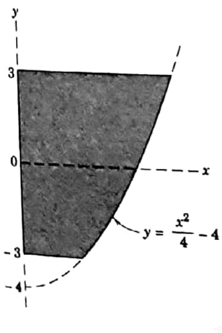
قضیه تالس : $\frac{h}{Z} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \frac{r}{h}Z$

$$dV = \pi x^2 dZ = \pi\left(\frac{rZ}{h}\right)^2 dZ$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2}\int_0^h z^2 dz = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\int z\,dV = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h z^3 dz = \frac{\pi r^2 h^2}{4} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int Z\,dv}{v} = \frac{3h}{4}$$

۵-۱۵. مرکز سطح سایه‌زده شده که در شکل زیر نشان داده شده است، در کجا واقع شده است؟



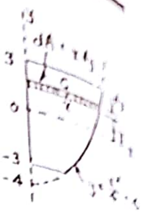
حل:

$$A = \int dA = \int x\,dy = \int_{-3}^{3} 2\sqrt{y+4}\,dy = \left[2\left(\frac{2}{3}\right)(y+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{3} = 23/4$$

$$\int x_c dA = \int \left(\frac{x}{2}\right) x\,dy = \frac{1}{2}\int x^2 dy = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} 4(y+4)\,dy = 48$$

$$\int y_c dA=\int yx\,dy=\int_{-۴}^{۳} y(۲\sqrt{y+۴})\,dy=۹/۴۷$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c dA}{A}=\frac{۴۸}{۲۳/۴}=۲/۰۵\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y_c dA}{A}=\frac{۹/۴۷}{۲۳/۴}=۰/۴۰۵$$



حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:

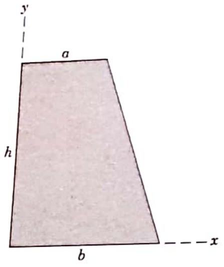
$$\iint dA=\int_{-۴}^{۳}\int_{۰}^{۲\sqrt{y+۴}} dx\,dy=\int_{-۴}^{۳} ۲\sqrt{y+۴}\,dy=۲۳/۴$$

$$\iint x\,dA=\int_{-۴}^{۳}\int_{۰}^{۲\sqrt{y+۴}} x\,dx\,dy=\frac{۱}{۲}\int_{-۴}^{۳}(۲\sqrt{y+۴})^{۲}\,dy=۴۸$$

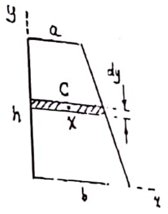
$$\iint y\,dA=\int_{-۴}^{۳}\int_{۰}^{۲\sqrt{y+۴}} y\,dx\,dy=\int_{-۴}^{۳} ۲\sqrt{y+۴}\,dy=۹/۴۷$$

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dA}{\iint dA}=\frac{۴۸}{۲۳/۴}=۲/۰۵\quad,\quad \bar{y}=\frac{\iint y\,dA}{\iint dA}=\frac{۹/۴۷}{۲۳/۴}=۰/۴۰۵$$

۱۶-۵. مختصات‌های x و y مرکز سطح ذوزنقه را تعیین کنید.



حل:



$$x=\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b$$

$$dA=x\,dy=\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]dy$$

$$A=\left(\frac{a+b}{۲}\right)h=\frac{h}{۲}(a+b)$$

$$\int x_c dA=\int_{۰}^{h}\frac{x}{۲}\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]dy=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]^{۲}dy=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)^{۲}y^{۲}+۲b\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b^{۲}\right]dy$$

$$\int x_c\,dA=\frac{h}{۶}(a^{۲}+b^{۲}+ab)$$

$$\int y_c dA=\int_{۰}^{h} y\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]dy=\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y^{۲}+by\right]dy$$

$$\int y_c dA=\frac{h^{۲}}{۳}\left(a+\frac{b}{۲}\right)$$

$$\bar{x}=\frac{\int x_c\,dA}{A}=\frac{\frac{h}{۶}(a^{۲}+b^{۲}+ab)}{\frac{h}{۲}(a+b)}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+ab}{۳(a+b)}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y_c\,dA}{A}=\frac{\frac{h^{۲}}{۳}(a+\frac{b}{۲})}{\frac{h}{۲}(a+b)}=\frac{h(۲a+b)}{۳(a+b)}$$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:

$$A|_{۰}^{b}\ ,\ B|_{h}^{a}\ \Rightarrow\ y=\frac{h}{a-b}(x-b)$$

$$\iint dA=\int_{۰}^{h}\int_{۰}^{(\frac{a-b}{h})y+b} dx\,dy=\int_{۰}^{h}\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]dy=\frac{h}{۲}(a+b)$$

$$\iint x\,dA=\int_0^h\int_0^{(\frac{a-b}{h})y+b} x\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^h\left[x^2\right]_0^{(\frac{a-b}{h})y+b}dy=\frac{1}{2}\int_0^h\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]^2dy$$

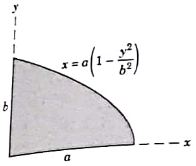
$$\iint x\,dA=\frac{h}{6}(a^2+b^2+ab)$$

$$\iint y\,dA=\int_0^h\int_0^{(\frac{a-b}{h})y+b} y\,dx\,dy=\int_0^h y\left[\left(\frac{a-b}{h}\right)y+b\right]dy$$

$$\iint y\,dA=\frac{h^2}{3}\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{h}{6}(a^2+b^2+ab)}{\frac{h}{2}(a+b)}=\frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)} \quad , \quad \bar{y}=\frac{\iint y\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{h^2}{3}(a+\frac{b}{2})}{\frac{h}{2}(a+b)}=\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

۵-۱۷. مرکز سطح سایه‌زده شده در کجا واقع شده است؟

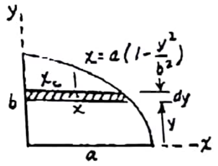


حل:

$$dA=x\,dy \quad , \quad A=\int_0^b a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=a\left[y-\frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b=\frac{2}{3}ab$$

$$\bar{x}A=\int x_c\,dA=\int_0^b\frac{y}{2}x\,dy=\frac{1}{2}\int_0^b a^2\left(1-\frac{2y^2}{b^2}+\frac{y^4}{b^4}\right)dy=\frac{a^2}{2}\left[y-\frac{2y^3}{3b^2}+\frac{y^5}{5b^4}\right]_0^b=\frac{4}{15}a^2y$$

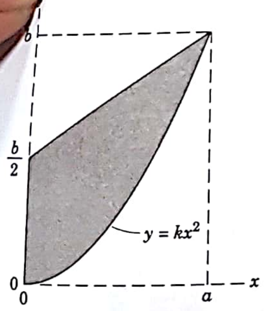
$$\bar{x}=\frac{\frac{4a^2b}{15}}{\frac{2ab}{3}}=\frac{2}{5}a$$



$$\bar{y}A=\int y\,dA=\int_0^b a\left(y-\frac{y^3}{b^2}\right)dy=a\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4b^2}\right]_0^b=\frac{1}{4}ab^2$$

$$\bar{y}=\frac{\frac{ab^2}{4}}{\frac{2ab}{3}}=\frac{3}{8}b$$

۵-۱۸. مختصات مرکز سطح سایه‌خورده زیر را تعیین کنید.



حل:

ابتدا ضریب k را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}x=a\\ y=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

سپس معادله y_2 را می‌یابیم:

$$\text{شیب خط}:\quad M=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b-\frac{b}{2}}{a-0}\Rightarrow M=\frac{b}{2a}$$

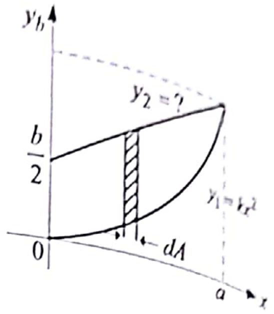
$$\text{معادله خط}\quad y_2-y_0=M(x-x_0)\Rightarrow y_2-\frac{b}{2}=\frac{b}{2a}(x-0)\Rightarrow y_2=\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2}$$

حال از تفاضل دو سطح و انتگرال‌گیری از آن داریم:

Scanned by CamScanner

$$dA=(y_{۲}-y_{۱})\,dx \;\Rightarrow\; A=\int_{۰}^{a}\left(\left(\frac{b}{۲a}x+\frac{b}{۲}\right)-\left(\frac{b}{a^{۲}}x^{۲}\right)\right)dx \;\Rightarrow\; A=\frac{b}{۴a}x^{۲}+\frac{b}{۲}x-\frac{b}{۳a^{۲}}x^{۳}\Big|_{۰}^{a}$$

$$\Rightarrow\; A=\frac{۵ab}{۱۲}$$

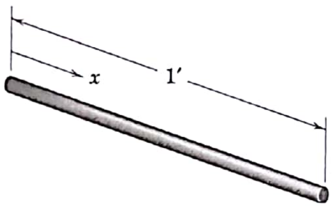


$$\bar{x}=\frac{\int x_c\,dA}{A}=\frac{\int_{۰}^{a}x\left(\frac{b}{۲a}x+\frac{b}{۲}-\frac{b}{a^{۲}}x^{۲}\right)dx}{\frac{۵ab}{۱۲}}=\frac{\left(\frac{b}{۶a}x^{۳}+\frac{b}{۴}x^{۲}-\frac{b}{۴a^{۲}}x^{۴}\right)_{۰}^{a}}{\frac{۵ab}{۱۲}}$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{ba^{۲}}{۶}+\frac{ba^{۲}}{۴}-\frac{ba^{۲}}{۴}}{\frac{۵ab}{۱۲}} \;\Rightarrow\; \bar{x}=\frac{۱۲a^{۲}b}{۶\times ۵ab} \;\Rightarrow\; \bar{x}=\frac{۲a}{۵}$$

$$\bar{y}=\frac{\int y_c\,dA}{A} \;\Rightarrow\; \bar{y}=\frac{\int_{۰}^{a}\left[\left(\frac{y_{۲}-y_{۱}}{۲}\right)+y_{۱}\right]dA}{A}$$

از جایگذاری dA و مقادیر $y_{۲}$ و $y_{۱}$ و انتگرال‌گیری از آن داریم: $\bar{y}=\frac{۲۳b}{۵۰}$

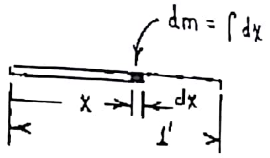


۵-۱۹. جرم بر واحد طول میله باریکی که با رابطه‌ی $\rho=\rho_{۰}(۱-x/۲)$ تطابق دارد، در زیر آورده شده است که x برحسب فوت است. موقعیت مرکز جرم میله را تعیین کنید؟

حل:

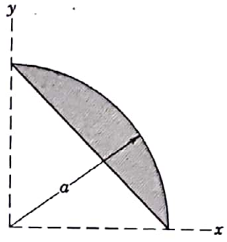
$dm=\rho\,dx$ (جرم واحد طول میله: ρ)

$$m=\int dm=\int\rho\,dx=\int_{۰}^{۱}\rho_{۰}\left(۱-\frac{x}{۲}\right)dx=\rho_{۰}\left[x-\frac{x^{۲}}{۴}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۳}{۴}\rho_{۰}$$



$$\int x\,dm=\int_{۰}^{۱}x\rho_{۰}\left(۱-\frac{x}{۲}\right)dx=\rho_{۰}\left[\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۶}\right]_{۰}^{۱}=\frac{\rho_{۰}}{۳}$$

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\frac{\rho_{۰}}{۳}}{\frac{۳\rho_{۰}}{۴}}=\frac{۴}{۹}\;ft$$

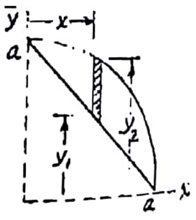


۵-۲۰. مختصات مرکز سطح قسمتی از دایره را تعیین کنید؟

حل:

$$x^{۲}+y_{۲}^{۲}=a^{۲} \quad ; \quad x+y_{۱}=a$$

$$dA=(y_{۲}-y_{۱})\,dx=(\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}-a+x)\,dx$$



$$A=\int_{۰}^{a}(\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}-a+x)\,dx=\left[\frac{۱}{۲}\left(x\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}+a^{۲}\sin^{-۱}\left(\frac{a}{x}\right)\right)-ax+\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{a}$$

$$A=\frac{a^{۲}}{۴}(\pi-۲)$$

Scanned by CamScanner

$$\int x_c dA = \int_{\circ}^{a} (x\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} - ax + x^{۲})\, dx = \left[-\frac{۱}{۳}\sqrt{(a^{۲} - x^{۲})^{۳}} - \frac{ax^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} \right]_{\circ}^{a} = \frac{a^{۳}}{۶}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{\frac{a^{۳}}{۶}}{\frac{a^{۲}(\pi - ۲)}{۴}} = \frac{۲a}{۳(\pi - ۲)} = \bar{y}$$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:

$$\iint dA = \int_{\circ}^{a} \int_{a-x}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} dy\, dx = \int_{\circ}^{a} (\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} - a + x)\, dy$$

$$= \left[-\frac{۱}{۲}\left(x\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} + a^{۲} \sin^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)\right) - ax + \frac{x^{۲}}{۲} \right]_{\circ}^{a} = \frac{a^{۲}}{۴}(\pi - ۲)$$

$$\iint x\, dA = \int_{\circ}^{a} \int_{a-x}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} x\, dy\, dx = \int_{\circ}^{a} (\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} - a + x)\, dx$$

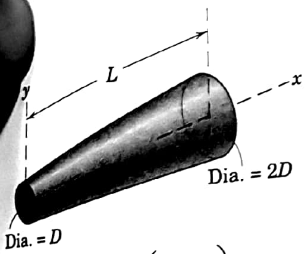
$$\iint x\, dA = \left[-\frac{۱}{۳}\sqrt{(a^{۲} - x^{۲})^{۳}} - \frac{ax^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} \right]_{\circ}^{a} = \frac{a^{۳}}{۶}$$

$$\iint y\, dA = \int_{\circ}^{a} \int_{a-x}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} y\, dy\, dx = \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{a} [(a^{۲} - x^{۲}) - (a + x)^{۲}]\, dx = \frac{a^{۳}}{۶}$$

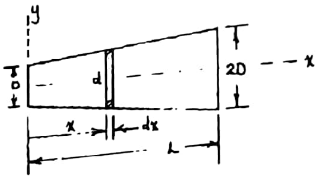
$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{a^{۳}}{۶}}{\frac{a^{۲}(\pi - ۲)}{۴}} = \frac{۲a}{۳(\pi - ۲)}$$

۵-۲۱. مختصات x مرکز جرم میله فولادی مخروطی شکل به طول L که قطر قاعده بزرگ دو برابر قطر قاعده کوچک است را تعیین کنید؟

حل:



چگالی ثابت : $\bar{x}v = \int x\, dv$



قطر : $d = D\left(۱ + \frac{x}{L}\right)$

$$dv = \frac{\pi d^{۲}}{۴} dx = \frac{\pi D^{۲}}{۴}\left(۱ + \frac{x}{L}\right)^{۲} dx$$

$$v = \frac{\pi D^{۲}}{۴}\int_{\circ}^{L}\left(۱ + \frac{x}{L}\right)^{۲} dx = \frac{\pi D^{۲}}{۴}\left[x + \frac{x^{۲}}{L} + \frac{x^{۳}}{۳L^{۲}} \right]_{\circ}^{L}$$

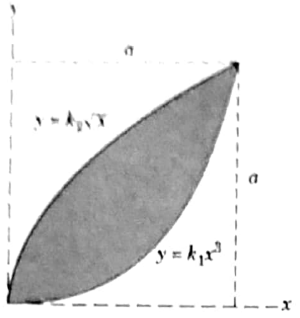
$$v = \frac{۷}{۱۲}\pi D^{۲} L$$

$$\int x\, dv = \frac{\pi D^{۲}}{۴}\int_{\circ}^{L} x\left(۱ + \frac{x}{L}\right)^{۲} dx = \frac{\pi D^{۲}}{۴}\left[x^{۲} + \frac{۲x^{۳}}{۳L} + \frac{x^{۴}}{۴L^{۲}} \right]_{\circ}^{L} = \frac{۱۷}{۴۸}\pi D^{۲} L^{۲}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{۱۷}{۴۸}\pi D^{۲} L^{۲}}{\frac{۷}{۱۲}\pi D^{۲} L} = \frac{۱۷}{۲۸} L$$

Scanned by CamScanner

۵-۲۲. مختصات x و y مرکز سطح سایه‌زده شده زیر را تعیین کنید.



حل:

$$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dA}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y_c \, dA}{A}$$

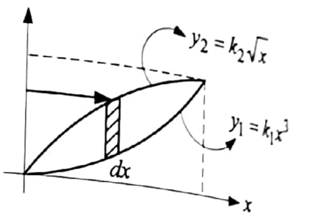
$$A = \int dA = \int_0^a (y_2 - y_1)\, dA \quad \Rightarrow \quad A = \int_0^a (k_2\sqrt{x} - k_1 x^3)\, dx$$

$$in\, x = a \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 \quad \Rightarrow \quad (k_2\sqrt{x} = k_1 x^3)_{x=a} = a$$ (۱)

$$\Rightarrow \quad k_2\sqrt{x} = k_1 a^3 = a \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{a^2} \qquad k_2 = \sqrt{a}$$

$$\int x_c \, dA = \int_0^a x(k_2\sqrt{x} - k_1 x^3)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^a \left(\sqrt{a}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a^2} x^4\right) dx$$ (۲)

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{a}\, x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5a^2} x^5\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{5}a^3 - \frac{1}{5}a^3 = \frac{1}{5}a^3$$



$$(1) \quad A = \int_0^a \left(\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{1}{a^2} x^3\right) dx = \left(\frac{2\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a^2} x^4\right)\Bigg|_0^a$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2a^2}{3} - \frac{1}{4}a^2 = \frac{8a^2 - 3a^2}{12} = \frac{5a^2}{12}$$

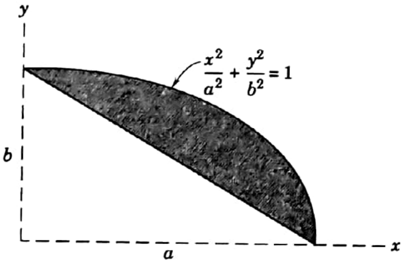
$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{5}a^3}{\frac{5}{12}a^2} = \frac{12}{25}a$$

$$\bar{y} = \int y_c \, dA = \int_0^a \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(y_2 - y_1)\, dA = \int_0^a \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\, dA = \frac{1}{2}\int_0^a (k_2^2 x - k_1^2 x^6)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{7a^4}x^7\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7a^3 - 2a^3}{14}\right) = \frac{5a^3}{28}\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{5a^3}{28}}{\frac{5a^2}{12}} = \frac{12a}{28} = \frac{3a}{7}$$

۵-۲۳. مختصات x و y مرکز سطح سایه‌زده شده زیر را تعیین کنید.



حل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}(a - x)$$

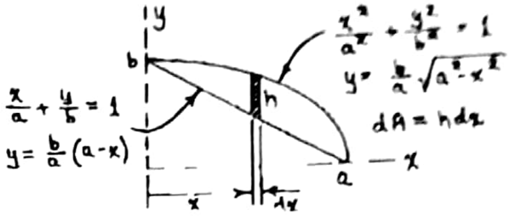
$$dA = h\, dx$$

$$h = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}(a - x) = \frac{b}{a}[\sqrt{a^2 - x^2} - (a - x)]$$

$$A = \int_0^a \frac{b}{a}[\sqrt{a^2 - x^2} - (a - x)]\, dx = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^a = \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

Scanned by CamScanner

$$\int x\,dA=\int_0^a x\left(\frac{b}{a}\right)[\sqrt{a^2-x^2}-(a-x)]\,dx=\frac{b}{a}\left[-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}-\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^a=\frac{ba^2}{6}$$



$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{\int dA}=\frac{\frac{ba^2}{6}}{ab(\frac{\pi}{2}-1)/2}=\frac{a}{3(\frac{\pi}{2}-1)}$$

به طور مشابه : $\bar{y}=\dfrac{b}{3(\frac{\pi}{2}-1)}$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:

$$\iint dA=\int_0^a\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\,dx=\int_0^a\frac{b}{a}[\sqrt{a^2-x^2}-(a+x)]\,dx=\frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$$

$$\iint x\,dA=\int_0^a\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}x\,dy\,dx=\int_0^a\frac{b}{a}[x\sqrt{a^2-x^2}-(ax-x^2)]\,dx$$

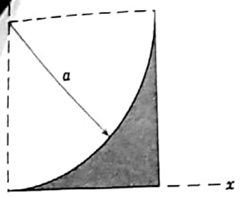
$$=\frac{b}{a}\left[-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}-\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^a=\frac{ba^2}{6}$$

$$\iint y\,dA=\int_0^a\int_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{b^2}{a^2}[(a^2-x^2)-(a-x)^2]\,dx=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\left[-\frac{2x^3}{3}+ax^2\right]_0^a=\frac{ba^2}{6}$$

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{ba^2}{6}}{ab(\frac{\pi}{2}-1)/2}=\frac{a}{3(\frac{\pi}{2}-1)}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\iint y\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{ab^2}{6}}{ab(\frac{\pi}{2}-1)/2}=\frac{b}{3(\frac{\pi}{2}-1)}$$

۵-۲۴. مرکز سطح نشان داده شده در شکل زیر را به وسیله انتگرال‌گیری مستقیم تعیین کنید. (هشدار: به علامت مناسب رادیکال توجه شود.)

حل:

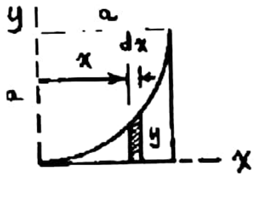


$$x^2+(y-a)^2=a^2$$

$$y=a-\sqrt{a^2-x^2}$$

$$A=\int y\,dx=\int_0^a[a-\sqrt{a^2-x^2}]\,dx=\left[ax-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_0^a=a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int x_c\,dA=\int_0^a xy\,dx=\int_0^a[ax-x\sqrt{a^2-x^2}]\,dx=\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$



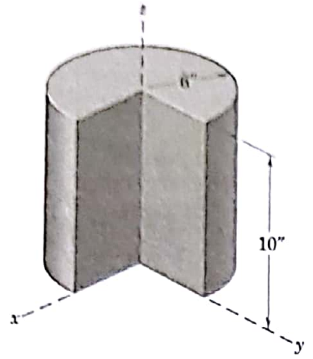
$$\bar{x}=\frac{\int x_c\,dA}{A}=\frac{\frac{a^3}{6}}{a^2(1-\frac{\pi}{4})}=\frac{2a}{3(4-\pi)}=0.777a$$

از تقارن $\bar{y}=a-\bar{x}=a-\dfrac{2a}{3(4-\pi)}=\dfrac{10-3\pi}{3(4-\pi)}a$

$\bar{y}=0.223a$

Scanned by CamScanner

۲۵-۵. از نتایج مسئله ۵-۳ برای محاسبه مختصات مرکز جرم قسمتی از استوانه همگن جامد نشان داده شده استفاده کنید.



حل: با توجه به مسئله نمونه ۵-۳ داریم:

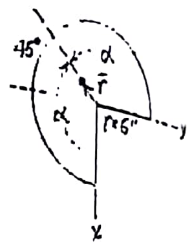
$$\bar{r} = \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{r\sin\alpha}{\alpha}\right) \quad ; \quad \alpha = ۱۳۵° = \frac{۳}{۴}\pi \ rad$$

$$\bar{r} = \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۶\sin ۱۳۵°}{\frac{۳\pi}{۴}}\right) = (۴)\left(\frac{۴}{۳\pi}\right)\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{۱۶}{۳\pi\sqrt{۲}} in$$

$$\bar{x} = \bar{y} = -\frac{\bar{r}}{\sqrt{۲}} = -\frac{۸}{۳\pi} in$$

با بررسی : $\bar{z} = ۵ in$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:



$$\iint dA = \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\int_{۰}^{۶} r\,dr\,d\theta = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۳۶)\left(۲\pi - \frac{\pi}{۲}\right) = ۲۷\pi$$

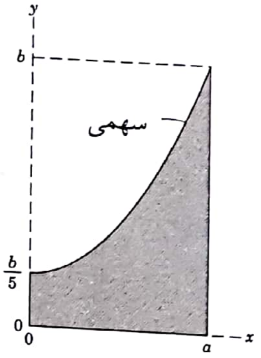
$$\iint x\,dA = \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\int_{۰}^{۶}(r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = \frac{۱}{۳}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\cos\theta[r^{۳}|_{۰}^{۶}]\,d\theta = \left(\frac{۲۱۶}{۳}\right)[\sin\theta]_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} = -۷۲$$

$$\iint y\,dA = \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\int_{۰}^{۶}(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \frac{۱}{۳}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\sin\theta[r^{۳}|_{۰}^{۶}]\,d\theta = \left(\frac{۲۱۶}{۳}\right)[-\cos\theta]_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} = -۷۲$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{-۷۲}{۲۷\pi} = -\frac{۸}{۳\pi} in$$

با بررسی $= \bar{z} = ۵in$

۲۶-۵. مختصات y قسمت سایه‌خورده را تعیین کنید؟



حل:

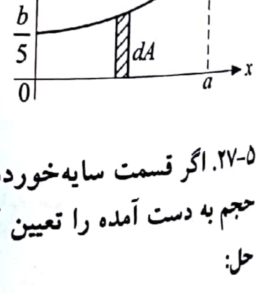
$$B = \frac{b}{۵}$$ از روی شکل

$$\left.\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = Aa^{۲} + \frac{b}{۵} \Rightarrow A = \frac{۴b}{۵a^{۲}}$$

$$dA = y\,dx \Rightarrow A = \int_{۰}^{a}\left(\frac{۴b}{۵a^{۲}}x^{۲} + \frac{b}{۵}\right)dx \Rightarrow A = \left(\frac{۴b}{۱۵a^{۲}}x^{۳} + \frac{bx}{۵}\right)_{۰}^{a}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۴ab}{۱۵} + \frac{ab}{۵} \Rightarrow A = \frac{۷ab}{۱۵}$$

$$\int y_c\,dA = \int\left(\frac{y}{۲}\right)(y)\,dx = \int_{۰}^{a}\frac{۱}{۲}y^{۲}\,dx = \int_{۰}^{a}\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴b}{۵a^{۲}}x^{۲} + \frac{b}{۵}\right)^{۲}dx = \frac{۱۰۳}{۷۵۰}ab^{۲}$$



$$\bar{y} = \frac{\int y_c\,dA}{A} = \frac{\frac{۱۰۳}{۷۵۰}ab^{۲}}{\frac{۷ab}{۱۵}} = \frac{۱۰۳b}{۳۵۰}$$

۲۷-۵. اگر قسمت سایه‌خورده مسئله ۵-۲۶ حول محور yها به اندازه ۳۶۰ درجه بچرخد، مختصات y مرکز حجم به دست آمده را تعیین کنید؟

حل:

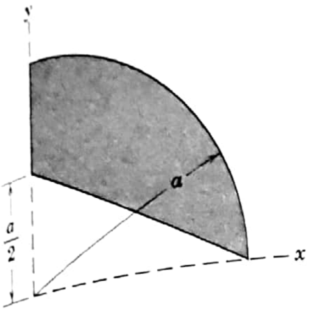
Scanned by CamScanner

$$dV = ۲\pi x y\, dx \quad \Rightarrow \quad V = \int_{۰}^{a} ۲\pi x\left(\frac{۲b}{۵a^{۲}}x^{۲} + \frac{b}{۵}\right)dx = \frac{۲\pi a^{۲} b}{۵}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c\, dV}{V} = \frac{\int_{۰}^{a} ۲\pi \frac{x y^{۲}}{۲}\, dx}{\frac{۲\pi a^{۲} b}{۵}} = \frac{\frac{۶۲}{۲۰۰} a^{۲} b^{۲} \pi}{\frac{۲\pi a^{۲} b}{۵}} = \frac{۳۱}{۹۰} b$$

۵–۲۸. مختصات‌های x و y مرکز سطح سایه‌زده شده زیر را تعیین کنید.

حل:



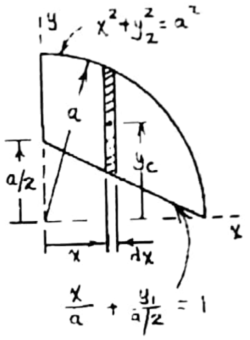
$$dA = (y_{۲} - y_{۱})\, dx = \left(\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} - \frac{a-x}{۲}\right)dx$$

$$A = \int_{۰}^{a}\left(\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} - \frac{a-x}{۲}\right)dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}\left(x\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} + a^{۲}\sin^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{۱}{۲}\left(ax - \frac{x^{۲}}{۲}\right)\right)\right]_{۰}^{a} = \frac{a^{۲}}{۴}(\pi - ۱)$$

(یا با بررسی:

$$\left(A = \frac{۱}{۴}\pi a^{۲} - \frac{۱}{۲}(a)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{a^{۲}}{۴}(\pi - ۱)\right)$$



$$\int x\, dA = \int_{۰}^{a}\left[x\sqrt{a^{۲} - x^{۲}} - \frac{۱}{۲}(ax - x^{۲})\right]dx = \left[-\frac{۱}{۳}(a^{۲} - x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{ax^{۲}}{۲} - \frac{x^{۳}}{۳}\right)\right]_{۰}^{a} = \frac{a^{۳}}{۴}$$

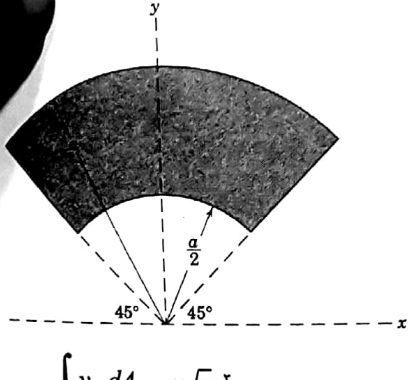
$$\int y_c\, dA = \int\left(\frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲}\right)dA = \int\left(\frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲}\right)(y_{۲} - y_{۱})\, dx = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{a}(y_{۲}^{۲} - y_{۱}^{۲})\, dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{a}\left(a^{۲} - x^{۲} - \frac{a^{۲} - ۲ax + x^{۲}}{۴}\right)dx = \frac{۱}{۸}\int_{۰}^{a}(۳a^{۲} + ۲ax - ۵x^{۲})\, dx = \frac{۷}{۲۴}a^{۳}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{\frac{a^{۳}}{۴}}{\frac{a^{۲}(\pi - ۱)}{۴}} = \frac{a}{\pi - ۱} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y_c\, dA}{A} = \frac{\frac{۷a^{۳}}{۲۴}}{\frac{a^{۲}(\pi - ۱)}{۴}} = \frac{۷a}{۶(\pi - ۱)}$$

۵–۲۹. مختصات y قسمت سایه‌خورده را تعیین کنید؟

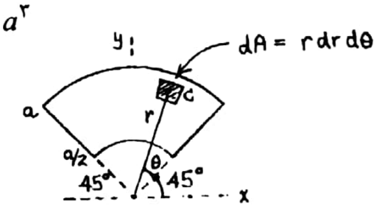
حل:



$$A = \frac{\pi a^{۲}}{۴} - \frac{\pi}{۴}\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} = \frac{۳}{۱۶}\pi a^{۲}$$

$$\int y_c dA = \iint (r\sin\theta)(r\, dr\, d\theta) = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}}\int_{\frac{a}{۲}}^{a}\sin(\theta) r^{۲}\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{۷a^{۳}}{۲۴}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}}\sin\theta\, d\theta = \frac{۷\sqrt{۲}}{۲۴}a^{۳}$$

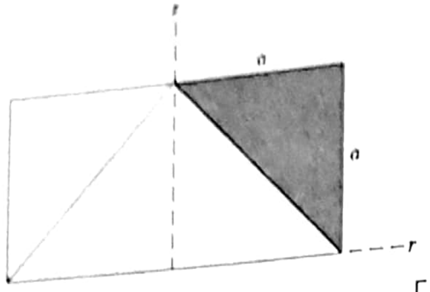


$$\bar{y} = \frac{\int y_c\, dA}{A} = \frac{\frac{۷\sqrt{۲}a^{۳}}{۲۴}}{\frac{۳\pi a^{۲}}{۱۶}} = \frac{۱۴\sqrt{۲}}{۹\pi}a$$

۵–۳۰. مختصات z مرکز حجم تولید شده به وسیله چرخش ۳۶۰ درجه‌ای سطح سایه خورده حول محور z ها تعیین کنید؟

Scanned by CamScanner

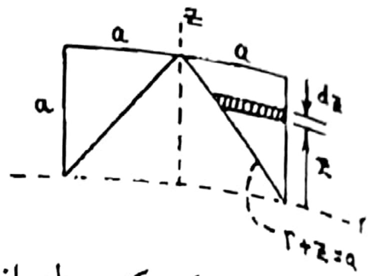
حل:



$$V=\int_{۰}^{a}\pi(a^{۲}-r^{۲})dz=\pi\int_{۰}^{a}[a^{۲}-(a-z)^{۲}]dz$$

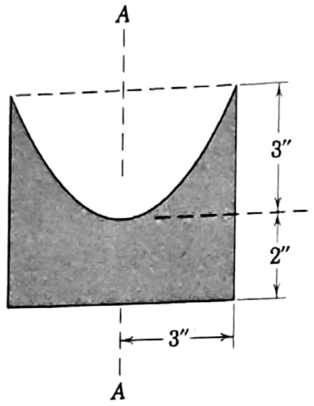
$$=\pi\int_{۰}^{a}(۲az-z^{۲})dz=\pi\left[az^{۲}-\frac{z^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{a}=\frac{۲}{۳}\pi a^{۳}$$

$$\int z_c\,dV=\int_{۰}^{a}\pi(۲az^{۲}-z^{۳})dz=\pi\left[\frac{۲az^{۳}}{۳}-\frac{z^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{a}=\frac{۵}{۱۲}\pi a^{۴}$$



$$\bar z=\frac{\int z_c\,dV}{V}=\frac{\frac{۵}{۱۲}\pi a^{۴}}{\frac{۲}{۳}\pi a^{۳}}=\frac{۵a}{۸}$$

۵-۳۱. شکل زیر یک تکه مسطح از ورق فلزی متقارن اطراف محور A-A را نشان می‌دهد و دارای یک لبه سهموی در بالا می‌باشد. دستگاه مختصات را انتخاب کنید و فاصله $\bar h$ از قاعده تا مرکز ثقل قطعه را محاسبه نمایید.



حل:

معادله منحنی : $y=۲+kx^{۲}$

$$\begin{cases}x=۳''\\ y=۵''\end{cases}\Rightarrow ۵=۲+k(۳)^{۲}\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۲+\frac{x^{۲}}{۳}$$

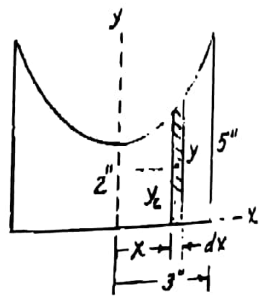
با توجه به تقارن فقط نصف سطح را درنظر می‌گیریم:

$$A=\int_{۰}^{۳}y\,dx=\int_{۰}^{۳}\left(۲+\frac{x^{۲}}{۳}\right)dx=\left[۲x+\frac{x^{۳}}{۹}\right]_{۰}^{۳}=۹\,in^{۲}$$

$$\int y_c\,dA=\int\frac{۵}{۲}dA=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۳}y^{۲}\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۳}\left(۴+\frac{۴}{۳}x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۹}\right)dx=\frac{۱}{۲}\left[۴x+\frac{۴x^{۳}}{۹}+\frac{x^{۵}}{۴۵}\right]_{۰}^{۳}=۱۴/۷۰\,in^{۳}$$

$$\bar h=\bar y=\frac{\int y_c dA}{A}=\frac{۱۴-۷۰}{۹}=۱/۶۳۳\,in$$

حل مسئله به کمک انتگرال دوگانه:



معادله منحنی : $y=۲+kx^{۲}$

$$\begin{cases}x=۳''\\ y=۵''\end{cases}\Rightarrow ۵=۲+k(۳)^{۲}\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۲+\frac{x^{۲}}{۳}$$

$$\iint dA=\int_{-۳}^{۳}\int_{۰}^{۲+\frac{x^{۲}}{۳}}dy\,dx=\int_{-۳}^{۳}\left(۲+\frac{x^{۲}}{۳}\right)dx=۱۸\,in^{۲}$$

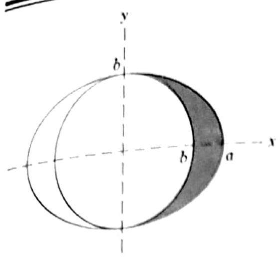
$$\iint y\,dA=\int_{-۳}^{۳}\int_{۰}^{۲+\frac{x^{۲}}{۳}}y\,dy\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{-۳}^{۳}\left(۲+\frac{x^{۲}}{۳}\right)dx=\frac{۱۴۷}{۵}in^{۳}$$

$$\bar h=\bar y=\frac{\iint y\,dA}{\iint dA}=\frac{\frac{۱۴۷}{۵}}{۱۸}=۱/۶۳۳\,in$$

۵-۳۲. موقعیت مرکز سطح سایه‌خورده بین بیضی و دایره را تعیین کنید؟

حل:

Scanned by CamScanner



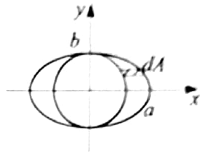
$$A = \underbrace{\frac{\pi ab}{2}}_{\text{مساحت بیضی}} - \underbrace{\frac{\pi b^2}{2}}_{\text{مساحت دایره}}$$

$$\int x_c\, dA = \int_{-b}^{b} \frac{1}{2}(x_{\text{بیضی}} - x_{\text{دایره}})(x_{\text{بیضی}} + x_{\text{دایره}})\,dy = \int_{0}^{b} (x^2_{\text{بیضی}} - x^2_{\text{دایره}})\,dy \qquad (1)$$

$$\text{معادله بیضی}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \qquad (2)$$

$$\text{معادله دایره}: \quad x^2 + y^2 = b^2 \Rightarrow x^2 = b^2 - y^2 \qquad (3)$$

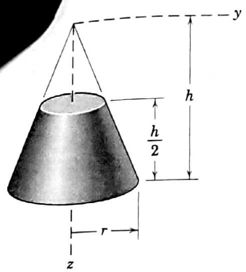
$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \int x_c\, dA = \frac{2b}{3}(a^2 - b^2)$$



$$\overline{X} = \frac{\int x_c\, dA}{A} = \frac{4}{3\pi}(a+b)$$

۵-۳۳. فاصله $\overline{h}$ از قاعده تا مرکز حجم مخروط ناقص دوار قائم را محاسبه کنید.

حل:

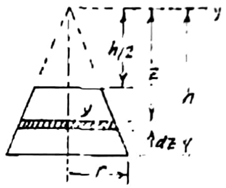


$$y = \frac{r}{h} Z$$

$$dv = \pi y^2 dz = \pi \frac{r^2}{h^2} z^2 dz$$

$$v = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_{\frac{h}{2}}^{h} z^2\, dz = \frac{7\pi r^2 h}{24}$$

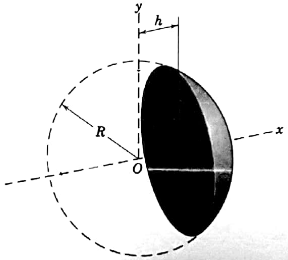
$$\int z_c\, dv = \int_{\frac{h}{2}}^{h} z\left(\frac{\pi r^2 z^2}{h^2}\right) dz = \frac{15}{64}\pi r^2 h^2$$



$$\overline{z} = \frac{\int z_c dv}{v} = \frac{\frac{15\pi r^2 h^2}{64}}{\frac{7\pi r^2 h}{24}} = \frac{45}{56} h$$

$$\overline{h} = h - \overline{z} = \frac{11}{56} h$$

۵-۳۴. مختصات x مرکز بخشی از کره تو پُر را تعیین کنید. عبارت حاصله را برای $h = R/2$ و $h = 0$ بسنجید.

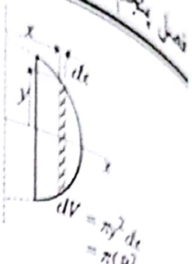


حل:

$$V = \int dV = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{81}{192}\pi R^3$$

$$\int x\, dV = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \pi x(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left[\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{225}{1024}\pi R^4$$

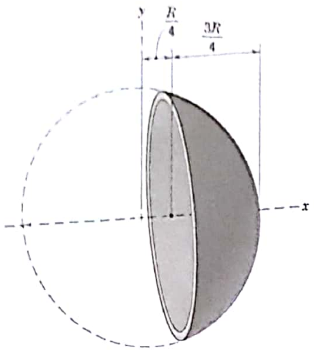
Scanned by CamScanner



$$\bar{x} = \frac{\int x\,dV}{\int dV} = \frac{\frac{115}{1024}\pi R^4}{\frac{11}{192}\pi R^3} = \frac{25}{28}R$$

$$if\ h = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2R}{8}$$: مانند قبل

۵-۳۵. مختصات x را برای مرکز جرم قسمتی از پوسته کروی یکنواخت با ضخامت کوچک را تعیین کنید.



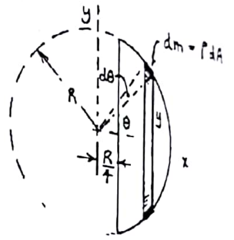
حل:

$$dm = \rho\, dA = \rho\,(R d\theta)(2\pi y) = 2\pi\rho\, R(R\sin\theta)\, d\theta = 2\pi\rho R^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$m = \int dm = \int_0^{\cos^{-1}(\frac{1}{4})} 2\rho\pi R^2 \sin\theta\, d\theta = 2\rho\pi R^2[-\cos\theta]_0^{\cos^{-1}(\frac{1}{4})} = 1/5\pi\rho R^2$$

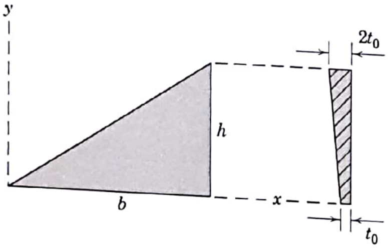
$$\int x_c\, dm = \int_0^{\cos^{-1}(\frac{1}{4})} (R\cos\theta)(2\pi\rho\, R^2 \sin\theta)\, d\theta = 2\pi\rho R^3 \int_0^{\cos^{-1}(\frac{1}{4})} \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= \pi\rho R^3 \int_0^{\cos^{-1}(\frac{1}{4})} \sin(2\theta)\, d\theta = \pi\rho R^3\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\cos^{-1}(\frac{1}{4})} = \frac{15}{16}\pi\rho R^3$$



$$\bar{x} = \frac{\int x_c\, dm}{\int dm} = \frac{\frac{15}{16}\pi\rho R^3}{1/5\pi\rho R^2} = \frac{5}{8}R$$

۵-۳۶. ضخامت صفحه مثلثی به طور خطی در امتداد y از t_0 در $y=0$ به $2t_0$ در $y=h$ تغییر پیدا می‌کند. مختصات y مرکز جرم صفحه را پیدا کنید؟

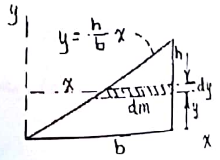


حل:

$$dm = \rho\, dv = \rho\, dA\, t = t\rho\,(b-x)\,dy = \left[t_0\left(\frac{y}{h}+1\right)\right]\rho\,(b-x)\,dy = t_0\rho\left(\frac{y}{h}+1\right)\left(b-\frac{b}{h}\right)dy$$

$$= t_0\rho b\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)dy$$

$$m = \int dm = \int_0^b t_0\rho b\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)dy = t_0\rho b\left(y-\frac{y^3}{3h^2}\right)_0^h = \frac{2}{3}\rho t_0 bh$$

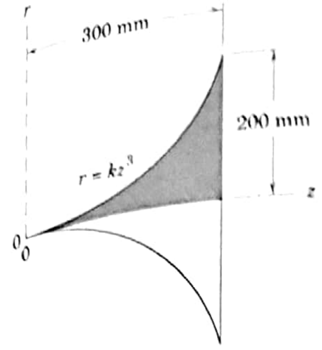


$$\int y_c dm = \int t_0\rho b\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)y\,dy = t_0\rho b\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4h^2}\right]_0^h = \frac{1}{4}\rho t_0 bh^2$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dm}{\int dm} = \frac{\frac{1}{4}\rho t_0 bh^2}{\frac{2}{3}\rho t_0 bh} = \frac{3}{8}h$$

Scanned by CamScanner

۳۷-۵. مرکز جرم جسم توپر همگن که مقدار آن به وسیله دوران ۳۶۰ درجه سطح سایه‌خورده حول محور z به دست می‌آید را تعیین کنید.

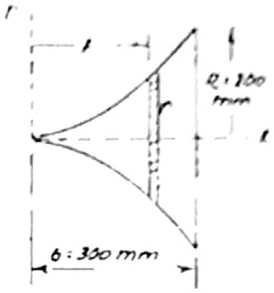


حل:

$$r = kz^{۳} \quad , \quad R = kb^{۳} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{b^{۳}} z^{۳}$$

$$dV = \pi r^{۲}\, dz = \frac{\pi R^{۲}}{b^{۶}} z^{۶}\, dz$$

$$V = \frac{\pi R^{۲}}{b^{۶}} \int_{۰}^{b} z^{۶}\, dz = \frac{\pi}{۷} R^{۲} b$$

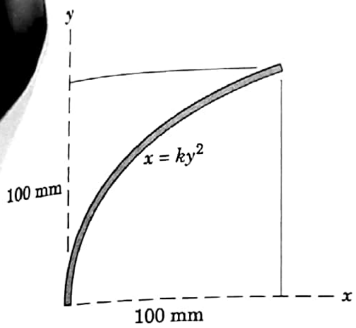


$$\int z_c\, dv = \int z\, dv = \frac{\pi R^{۲}}{b^{۶}} \int_{۰}^{b} z^{۷}\, dz = \frac{\pi}{۸} R^{۲} b^{۲}$$

$$\overline{Z} = \frac{\int z_c\, dV}{V} = \frac{\frac{\pi R^{۲} b^{۲}}{۸}}{\frac{\pi R^{۲} b}{۷}} = \frac{۷b}{۸} = \frac{۷(۳۰۰)}{۸} = ۲۶۳\, mm$$

۳۸-۵. میله باریک همگن با مقطع یکنواخت به صورت شکل نشان داده شده خم شده است. مختصه y مرکز جرم میله را محاسبه کنید. (یادآوری: طول قوس دیفرانسیلی برابر است با:

$$dL = \sqrt{(dx)^{۲} + (dy)^{۲}} = \sqrt{۱ + (dx/dy)^{۲}}\, dy$$



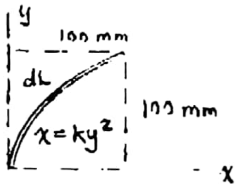
حل:

$$\begin{cases} x = ۱۰۰ \\ y = ۱۰۰ \end{cases} \xrightarrow{x = ky^{۲}} ۱۰۰ = k(۱۰۰)^{۲} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۱}{۱۰۰} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^{۲}}{۱۰۰}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{۵۰}$$

$$L = \int dL = \int_{۰}^{۱۰۰} \sqrt{۱ + \left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}}\, dy = \int_{۰}^{۱۰۰} \sqrt{۱ + \frac{y^{۲}}{۵۰^{۲}}}\, dy = \frac{۱}{۵۰} \int_{۰}^{۱۰۰} \sqrt{۵۰^{۲} + y^{۲}}\, dy$$

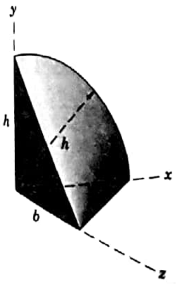
$$= \frac{۱}{۵۰/۲} [y \sqrt{۵۰^{۲} + y^{۲}} + ۵۰^{۲} \ln (y + \sqrt{۵۰^{۲} + y^{۲}})]_{۰}^{۱۰۰} = ۱۴۷٫۹\, mm$$



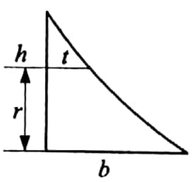
$$\int y_c\, dL = \frac{۱}{۵۰} \int_{۰}^{۱۰۰} y \sqrt{۵۰^{۲} + y^{۲}}\, dy = \left[\left(\frac{۱}{۵۰}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)(۵۰^{۲} + y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{۱۰۰} = ۸۴۸۰\, mm^{۲}$$

$$y = \frac{\int y_c\, dL}{L} = \frac{۸۴۸۰}{۱۴۷٫۹} = ۵۷٫۴\, mm$$

۳۹-۵. مختصات y مرکز حجم حاصل شده به وسیله دوران ۹۰ درجه‌ای ناحیه سایه‌خورده حول محور zها در شکل زیر نشان داده شده است، را تعیین کنید.



حل:



$$y = r\cos\theta \quad , \quad dA = r\, dr\, d\theta$$

$$t = b - r\frac{b}{h} = \frac{b}{h}(h - r)$$

Scanned by CamScanner

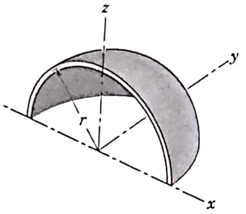
$$dV = t\,dA = \frac{b}{h}(h-r)r\,dr\,d\theta = \frac{b}{h}(hr-r)\,dr\,d\theta$$

$$\int dV = \int_0^h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{h}(hr-r^2)\,dr\,d\theta = \frac{\pi b h^2}{12}$$

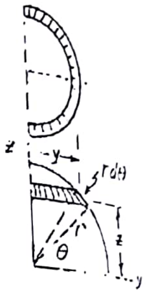
$$\int y\,dV = \int_0^h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{h}(hr^2-r^3)\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dV}{\int dV} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{\pi b h^2}{12}} = \frac{h}{\pi}$$

۵-۴۰. مختصات z مرکز جرم ربع پوسته کروی همگن که دارای شعاعی به اندازه r است را تعیین کنید.



حل:



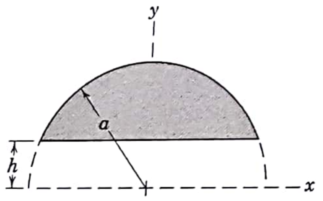
$$dA = \pi\, y r\, d\theta = \pi r^2 \cos\theta\, d\theta$$

$$A = \pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \pi r^2 [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2$$

$$\int z_c\, dA = \int z\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta)(\pi r^2\cos\theta)\, d\theta = \pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi r^3}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z_c\, dA}{A} = \frac{\frac{\pi r^3}{2}}{\pi r^2} = \frac{r}{2}$$

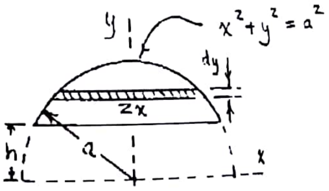
۵-۴۱. مختصات y مرکز سطح ناحیه نشان داده شده را تعیین کنید؟ $h=0$ را در نتایجتان درنظر بگیرید و با نتیجه $\bar{y} = 4a/3\pi$ برای سطح نیم‌دایره‌ای کامل مقایسه کنید (مثال مسئله ۵-۳۰ و جدول $D/3$ را ببینید.) همچنین نتیجه را برای شرایط $h = a/4$ و $h = a/2$ ارزیابی کنید.



حل:

$$x^2 + y^2 = a^2 \;\Rightarrow\; x = +\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$dA = 2x\,dy = 2\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$



$$A = \int dA = \int_h^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left[y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right]_h^a$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right) - h\sqrt{a^2-h^2}$$

$$\int y\,dA = \int_h^a 2y\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \left[2\left(-\frac{1}{3}\right)(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_h^a = \frac{2}{3}(a^2-h^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\frac{2}{3}(a^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\frac{h}{a})) - h\sqrt{a^2-h^2}}$$

Scanned by CamScanner

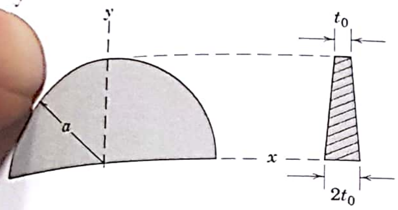
حالت‌های خاص:

$$h=0 \ : \ \bar{y}=\frac{\frac{2}{3}a^3}{a^2(\frac{\pi}{2})}=\frac{4a}{3\pi} \quad \text{(نتیجه صحیح)}$$

$$h=\frac{a}{4} \ : \ \bar{y}=\frac{\frac{2}{3}(a^2-(\frac{a}{4})^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\frac{1}{4}))-\frac{a}{4}\sqrt{a^2-(\frac{a}{4})^2}}=0/562a$$

$$h=\frac{a}{2} \ : \ \bar{y}=\frac{\frac{2}{3}(a^2-(\frac{a}{2})^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\frac{1}{2}))-\frac{a}{2}\sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2}}=0/702a$$

۴۲-۵. ضخامت صفحه نیم‌دایره‌ای که به طور خطی با y از مقدار t_0 در $y=0$ در امتداد قاعده‌اش تا $2t_0$ در $y=a$ تغییر پیدا می‌کند. مختصات y مرکز جرم صفحه را تعیین کنید.



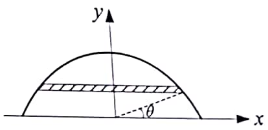
حل:

$$\begin{cases} y=0 \ , \ 2t_0 \\ y=a \ , \ t_0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} dV=2xt\,dy \\ x=a\cos\theta \ , \ y=a\sin\theta \end{cases}$$

بر طبق فرض مسئله ضخامت صفحه نشان داده شده خطی است پس داریم:

$$M=\frac{2t_0-t_0}{0-a}=\frac{t_0}{-a} \ \Rightarrow \ t-2t_0=-\frac{t_0}{a}y \ \Rightarrow \ t=\frac{-t_0}{a}y+2t_0$$

$$dV=2(\cos\theta)\left(\frac{-t_0}{a}(a\sin\theta)+2t_0\right)(a\cos\theta\,d\theta)$$



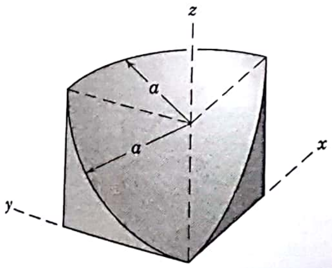
$$V=\int_0^{\pi}2a^2\cos^2\theta(-t_0\sin\theta+2t_0)\,d\theta \ \Rightarrow \ V=(2a^2t_0)\left(\frac{3\pi-2}{3}\right)$$

$$\int y_c\,dV=\int_0^{\pi}(2a^2\cos^2\theta)(a\sin\theta)(-t_0\sin\theta+2t_0)\,d\theta=\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi}{8}\right)(2a^3t_0)$$

$$\bar{y}=\frac{\int y_c\,dV}{\int dV}=\frac{(\frac{4}{3}-\frac{\pi}{8})(2a^3t_0)}{(\frac{3\pi-2}{3})(2a^2t_0)}=0/3806a$$

۴۳-۵. مختصات مرکز حجم به دست آمده از دوران ناحیه سایه‌خورده حول محور z بـه انـدازه ۹۰ درجـه را تعیین کنید.

حل:



$$dV=\frac{\pi y}{2}(z\,dy)=\frac{\pi}{2}(ay-y\sqrt{a^2-y^2})\,dy$$

$$V=\frac{\pi}{2}\int_0^{a}(ay-y\sqrt{a^2-y^2})\,dy=\frac{\pi}{2}\left[\frac{ay^2}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-y^2)^3}\right]_0^a=\frac{\pi}{2}\frac{a^3}{6}=\frac{\pi a^3}{12}$$

$$\int y_c\,dV=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\frac{\pi}{2}(ay^2-y^2\sqrt{a^2-y^2})\,dy=\left[\frac{ay^3}{3}+\frac{y}{4}\sqrt{(a^2-y^2)^3}-\frac{a^2}{8}(y\sqrt{a^2-y^2}+a^2\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$=\left[\frac{a^4}{3}+0-\frac{a^2}{8}\left(0+a^2\frac{\pi}{2}\right)\right]=a^4\left[\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\right]$$

Scanned by CamScanner

$$\bar{y} = \int y_c dV / V = a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) / \frac{\pi a^3}{12} = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{3}{4}\right)a = \bar{x}$$

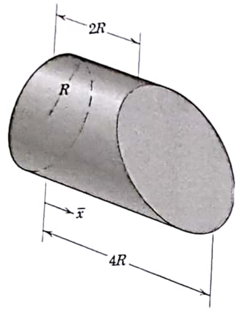
$$\int z_c dV = \int \frac{z}{2} dV = \int_0^a \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{2}\,\frac{\pi}{2}(ay - y\sqrt{a^2 - y^2})\,dy = \frac{\pi a^4}{48}$$

$$\bar{z} = \int z_c dV / V = \frac{\pi a^4}{48} / \frac{\pi a^3}{12} = \frac{a}{4}$$

$$y^2 + (z-a)^2 = a^2$$

$$z = a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

۵-۴۴. مختصات x مرکز جرم جسم توپر همگن نشان داده شده را بیابید؟



حل: موقتاً از مختصات نشان داده شده استفاده کنید. المان یک صفحه مستطیلی نازک می‌باشد.

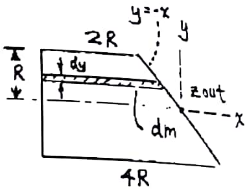
$$dm = \rho\, dv = \rho(3R + x)(2z)\,dy = 2\rho[3R - y][\sqrt{R^2 - y^2}\,]dy$$

$$= 6\rho R\sqrt{R^2 - y^2}\,dy - 2\rho y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$

$$m = \int dm = \int_{-R}^{R} 6\rho R\sqrt{R^2 - y^2}\,dy - \int_{-R}^{R} 2\rho y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$

$$m = 6\rho R\left(\frac{1}{2}\right)\left[y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{R}\right)\right]_{-R}^{R} - 2\rho\left(-\frac{1}{3}\right)\left[(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-R}^{R}$$

$$m = 3\pi\rho R^3$$



$$\int x_c dm = \int_{-R}^{R}\left(\frac{x - 3R}{2}\right)(6\rho R\sqrt{R^2 - y^2}\,dy - 2\rho y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy)$$

$$I_1 = -3\rho R\int_{-R}^{R} y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = -3\rho R\left(-\frac{1}{3}\right)\left[(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-R}^{R} = 0$$

$$I_2 = -9\rho R^2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = -9\rho R^2 - \frac{1}{2}\left[y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{R}\right)\right]_{-R}^{R} = -\frac{9}{2}\pi\rho R^4$$

$$I_3 = \rho\int_{-R}^{R} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$

$$= \rho\left[-\frac{y}{4}(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{R^2}{8}\left(y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{R}\right)\right)\right]_{-R}^{R} = \frac{1}{8}\pi\rho R^4$$

$$I_4 = -3\rho R\int_{-R}^{R} y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = 0$$

بنابراین در کل داریم:

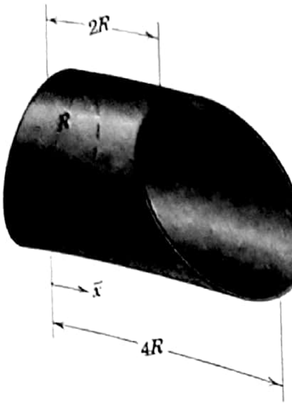
$$\int x_c dm = \left(-\frac{9}{2} + \frac{1}{8}\right)\pi\rho R^4 = -\frac{35}{8}\pi\rho R^4$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c\, dm}{\int dm} = \frac{-35\pi\rho R^4 / 8}{3\pi\rho R^3} = -\frac{35}{24}R$$

نسبت به انتهای چپ داریم

$$\bar{x} = ۲R - \frac{۳۵}{۲۴}R = \frac{۳۷}{۲۴}R = ۱/۵۴۲\,R$$

۵-۴۵. مختصات x مرکز جرم پوسته استوانه‌ای با ضخامت یکنواخت کوچک را تعیین کنید.



حل:

موقتاً از مختصات نشان داده شده استفاده کنید. المان یک حلقه بوده و در اینجا ρ جرم واحد مساحت می‌باشد.

$$dm = \rho(۲R+x)R\,d\theta = \rho R(۲R-y)\,d\theta = \rho R(۲R - R\sin\theta)\,d\theta$$

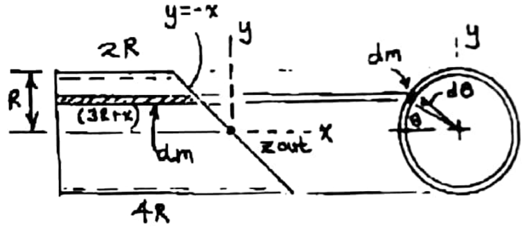
$$= \rho R^{۲}(۳-\sin\theta)\,d\theta$$

$$m = \int dm = \int_{۰}^{۲\pi} \rho R^{۲}(۳-\sin\theta)\,d\theta = \rho R^{۲}[۳\theta + \cos\theta]_{۰}^{۲\pi} = ۶\pi\rho R^{۲}$$

$$x_c = -R + \frac{۲R+x}{۲} = \frac{x-۳R}{۲} = -\frac{y+۳R}{۲} = -R\frac{\sin\theta+۳}{۲}$$

$$\int x_c dm = \int_{۰}^{۲\pi}\left[-\frac{R}{۲}(\sin\theta+۳)\rho R^{۲}(۳-\sin\theta)\right]d\theta = -\frac{\rho R^{۳}}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(۹-\sin^{۲}\theta)\,d\theta$$

$$= -\frac{\rho R^{۳}}{۲}\left[۹\theta - \left(\frac{\theta}{۲} - \frac{\sin ۲\theta}{۴}\right)\right]_{۰}^{۲\pi} = -\rho R^{۳}\left(\frac{۱۷\pi}{۲}\right)$$

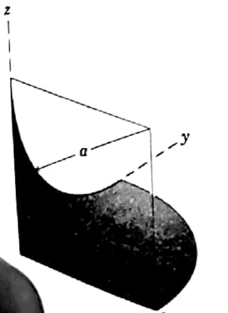


$$\bar{x} = \frac{\int x_c\,dm}{\int dm} = \frac{-\rho R^{۳}(\frac{۱۷\pi}{۲})}{۶\pi\rho R^{۲}} = -۱/۴۱۷\,R$$

نسبت به انتهای چپ داریم:

$$\bar{x} = ۳R - ۱/۴۱۷R = ۱/۵۸۳R$$

۵-۴۶. مختصات x و y مرکز حجم تولیدشده به وسیله دوران ۹۰ درجه‌ای قسمت سایه‌خورده حول محور z ها را تعیین کنید.



حل:

به دلیل تقارن $\bar{x} = \bar{y}$، $dV = \frac{\pi}{۴}x^{۲}dz$

$$x = a\cos\theta + a \Rightarrow x = a(۱+\cos\theta)$$

$$z = a\sin\theta + a \Rightarrow z = a(۱+\sin\theta)$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\int dV}{\int dV}$$

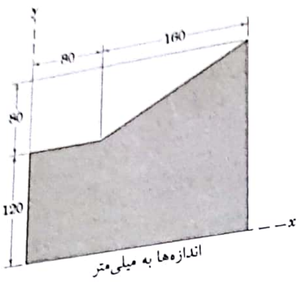
$$\int x\,dV = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} a(۱+\cos\theta)\left(\frac{\pi}{۴}\right)(a^{۲})(۱+\cos\theta)^{۲}(a\cos\theta)\,d\theta$$

$$\int dV = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi}{۴}a^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}(a\cos\theta)\,d\theta$$

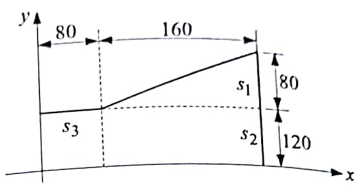
از حل معادلات فوق و جایگذاری آن خواهیم داشت: $\bar{x} = \bar{y} = ۰/۲۴۲a$

Scanned by CamScanner

۴۷-۵. مختصات‌های x و y مرکز سطح قسمت سایه‌خورده را تعیین کنید.



حل:



$\bar{x}_1 = ۸۰ + \left(\frac{۲}{۳}\right)(۱۶۰) = ۱۸۶/۶۷\,mm$, $\bar{y}_1 = ۱۲۰ + \left(\frac{۱}{۳}\right)(۸۰) = ۱۴۶/۶۷\,mm$

$\bar{x}_2 = ۱۶۰mm$, $\bar{y}_2 = ۶۰mm$

$\bar{x}_3 = ۴۰mm$, $\bar{y}_3 = ۶۰mm$

$$\bar{x} = \frac{s_1\bar{x}_1 + s_2\bar{x}_2 + s_3\bar{x}_3}{s_1 + s_2 + s_3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{(\frac{۸۰}{۲})(۱۶۰)(۱۸۶/۶۷) + (۱۶۰)(۱۶۰)(۱۲۰) + (۴۰)(۱۲۰)(۸۰)}{(۱۶۰)(۴۰) + (۱۲۰)(۱۶۰) + (۸۰)(۱۲۰)}$$

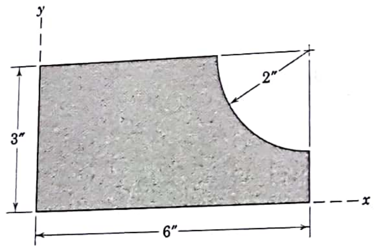
$\bar{X} = ۱۳۲/۱mm$

$$\bar{Y} = \frac{s_1\bar{y}_1 + s_2\bar{y}_2 + s_3\bar{y}_3}{s_1 + s_2 + s_3} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{(\frac{۸۰}{۲})(۱۶۰)(۱۴۶/۶۷) + (۱۲۰)(۱۶۰)(۶۰) + (۱۲۰)(۸۰)(۶۰)}{(\frac{۸۰}{۲})(۱۶۰) + (۱۲۰ \times ۱۶۰) + (۸۰ \times ۱۲۰)}$$

$\bar{Y} = ۷۵/۸mm$

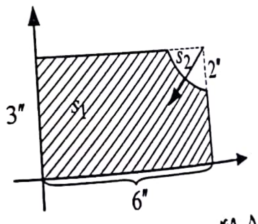
۴۸-۵. مختصات مرکز سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.

حل:



$\begin{cases} \bar{x}_1 = ۳'' \\ \bar{y}_1 = ۱/۵'' \end{cases}$ $s_1 = ۳ \times ۶ = ۱۸''$

$\begin{cases} \bar{x}_2 = ۴ + \left(۲ - \frac{۴ \times ۲}{۳\pi}\right) = ۵/۱۵'' \\ \bar{y}_2 = ۱ + \left(۲ - \frac{۴ \times ۲}{۳\pi}\right) = ۲/۱۵'' \end{cases}$ $s_2 = \frac{۱}{۴}\pi(۲)^۲ = \pi$

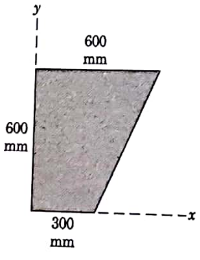


$$\bar{X} = \frac{s_1\bar{x}_1 - s_2\bar{x}_2}{s_1 + s_2} = \frac{(۱۸ \times ۳) - (\pi)(۵/۱۵)}{۱۸ - \pi} = ۲/۵۴۵''$$

$$\bar{Y} = \frac{s_1\bar{y}_1 - s_2\bar{y}_2}{s_1 + s_2} = \frac{(۱۸ \times ۱/۵) - (\pi)(۲/۱۵)}{۱۸ - \pi} = ۱/۳۶۲''$$

۴۹-۵. مختصات مرکز سطح ذوزنقه نشان داده شده را تعیین کنید.

حل:

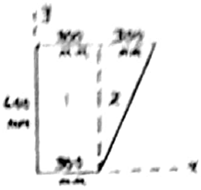


$A_1 = ۱۸(۱۰^۴)mm^۲$, $\bar{x}_1 = ۱۵۰mm$, $\bar{y}_1 = ۳۰۰mm$

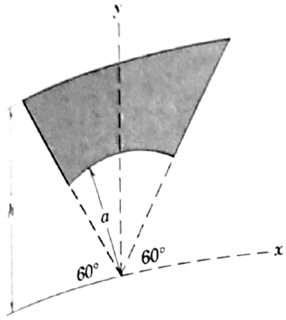
$A_2 = ۹(۱۰^۴)mm^۲$, $\bar{x}_2 = ۳۰۰ + \frac{۱}{۳}(۳۰۰) = ۴۰۰mm$

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{۱۸(۱۰^۳)(۱۵۰) + ۹(۱۰^۳)(۲۰۰)}{۱۸(۱۰^۳) + ۹(۱۰^۳)} = ۲۲۲\ mm$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{۱۸(۱۰^۳)(۲۰۰) + ۹(۱۰^۳)(۴۰۰)}{۱۸(۱۰^۳) + ۹(۱۰^۳)} = ۳۲۲\ mm$$



۵-۵۰. مختصات y مرکز سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.

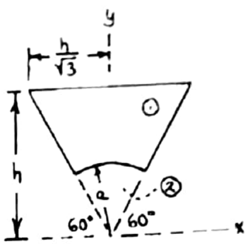


حل:

برای مثلث (۱):

$$A_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲h}{\sqrt{۳}}\right)(h) = \frac{h^۲}{\sqrt{۳}} \quad , \quad \bar{y}_۱ = \frac{۲}{۳}h$$

مقطع دایروی (۲):



$$A_۲ = \frac{۱}{۶}\pi a^۲$$

$$\bar{y}_۲ = \frac{۲}{۳}\frac{a \sin ۳۰^\circ}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۲}{\pi}a$$

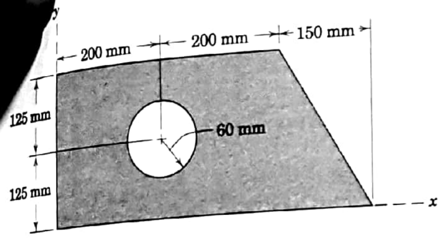
$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{\frac{h^۲}{\sqrt{۳}}(\frac{۲h}{۳}) - \frac{۱}{۶}\pi a^۲(\frac{۲}{\pi}a)}{\frac{h^۲}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۶}\pi a^۲} = \frac{۴h^۳ - ۲\sqrt{۳}a^۳}{۶h^۲ - \sqrt{۳}\pi a^۲}$$

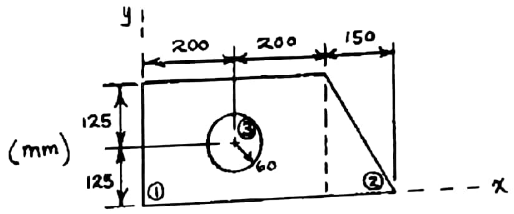
تبدیل می‌شود به:

$$\left\{ \bar{Y} = \frac{۲}{۳}h \quad \text{برای} \quad a = ۰ \right.$$

۵-۵۱. مختصات مرکز سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.

حل:



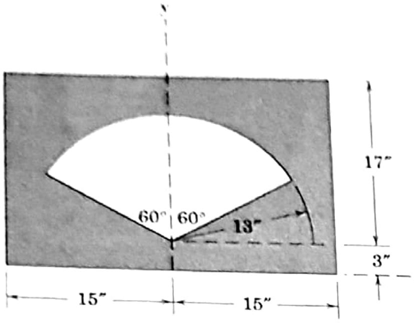


قطعه	A $mm^۲$	$\bar{x}$ mm	$\bar{y}$ mm	$A\bar{x}$ $mm^۳$	$A\bar{y}$ $mm^۳$
مستطیل	$۱۰۰(۱۰^۳)$	۲۰۰	۱۲۵	$۲۰(۱۰^۶)$	$۱۲/۵۰(۱۰^۶)$
مثلث	$۱۸/۷۵(۱۰^۳)$	۴۵۰	$\frac{۲۵۰}{۳}$	$۸/۴۴(۱۰^۶)$	$۱/۵۶۳(۱۰^۶)$
دایره	$-۱۱/۳۱(۱۰^۳)$	۲۰۰	۱۲۵	$-۲/۲۶(۱۰^۶)$	$-۱/۴۱۴(۱۰^۶)$
کل	$۱۰۸/۴(۱۰^۳)$			$۲۶/۲(۱۰^۶)$	$۱۲/۶۵(۱۰^۶)$

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{۲۶/۲(۱۰^۶)}{۱۰۷/۴(۱۰^۳)} = ۲۴۴\ mm$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{۱۲/۶۵(۱۰^۶)}{۱۰۷/۴(۱۰^۳)} = ۱۱۷/۷\ mm$$

Scanned by CamScanner



۵-۵۲. مختصات y مرکز سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.

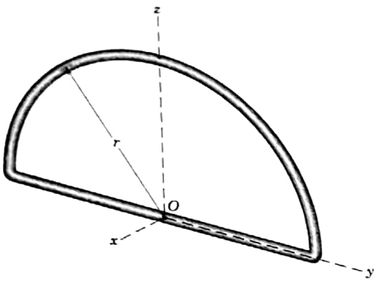
حل:

$s_1 \rightarrow \bar{y}_1 = ۱۰''$: مستطیل

$A_1 = ۲۰ \times ۳۰ = ۶۰۰ in^2$

$s_2 \rightarrow \bar{y}_2 = \dfrac{\int_0^{۱۳}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} r\sin\theta\, d\theta\, dr}{\frac{1}{۲}(\pi)(۱۳)^۲} + ۳ = ۱۰/۱۶$: قطاع دایره

$$\bar{Y} = \frac{(۱۰)(۶۰۰۰) - (۱۳)^۲(\pi)(\frac{۱}{۳})(۱۰/۱۶)}{۶۰۰ - (۱۳)^۲\pi(\frac{۱}{۳})} = ۹/۹۳۳\, in$$

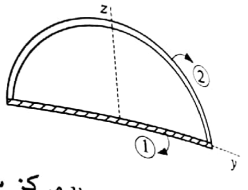


۵-۵۳. مختصات x و y و z مرکز جرم جسم ساخته شده از یک میله باریک یکنواخت را تعیین کنید.

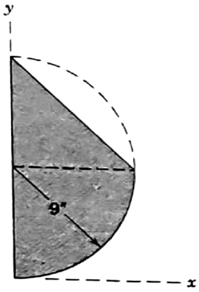
حل:

(۱) $\{\bar{z}_1 = \bar{x}_1 = \bar{y}_1 = ۰$ تقارن

(۱) $\begin{cases} \bar{x}_۲ = \bar{y}_۲ = ۰ \\ \bar{z}_۲ = \dfrac{\int_0^{\pi} r^۲ \sin\theta\, d\theta}{\pi r} = \dfrac{۲r^۲}{\pi r} = ۰/۶۳۶ r \end{cases}$



$$\bar{z} = \frac{(۰/۶۳۶)(r)(\pi r)}{۲r + \pi r} = ۰/۲۸۸ r$$

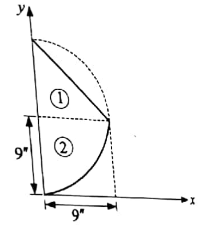


۵-۵۴. مختصات x و y مرکز سطح قسمت سایه‌خورده را تعیین کنید.

حل:

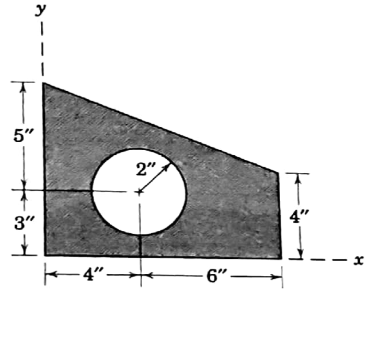
(۱) $\begin{cases} \bar{x} = ۳ \ , \ \bar{y} = ۱۲ \ , \ A = \dfrac{۹ \times ۹}{۲} = ۴۰/۵ \\ A\bar{x} = ۱۲۱/۵ \ , \ A\bar{y} = ۴۰/۵ \times ۱۲ = ۴۸۶ \\ ۴۰/۵'' \times ۳ \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} \bar{x} = ۳/۸۲ \ , \ \bar{y} = ۵/۱۸ \ , \ A = \dfrac{\pi(۹)^۲}{۴} = ۶۳/۶۱ \\ A\bar{x} = (۶۳/۶۱)(۳/۸۲) = ۲۴۲/۹۹ \ , \ A\bar{y} = (۶۳/۶۱)(۵/۱۸) = ۳۲۹/۴۹۹ \end{cases}$



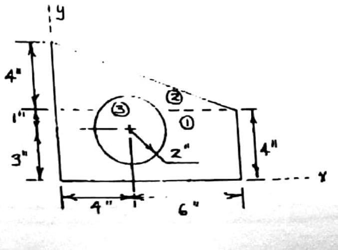
$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{(۱۲۱/۵ + ۲۴۲/۹۹)}{(۴۰/۵ + ۶۳/۶۱)} = ۳/۵۰۱$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{(۴۸۶ + ۳۲۹/۴۹۹)}{(۴۰/۵ + ۶۳/۶۱)} = ۷/۸۳۳$$



۵-۵۵. مختصات x و y مرکز سطح قسمت سایه‌خورده را تعیین کنید.

حل:

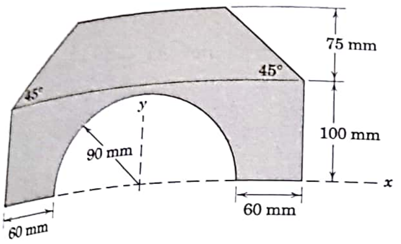


Scanned by CamScanner

شکل	$A(in^{۲})$	$\bar{x}(in)$	$\bar{y}(in)$	$A\bar{x}(in^{۳})$	$A\bar{y}(in^{۳})$
۱	۴۰	۵	۲	۲۰۰	۸۰
۲	۲۰	$\frac{۱۰}{۳}$	$۲+\frac{۲}{۳}$	۶۶/۷	۱۰۴/۷
۳	$-\pi(۲)^{۲}$	۴	۳	−۵۰/۳	−۳۷/۷
$\sum$	۲۷/۴			۲۱۶	۱۴۹/۰

$$\bar{X}=\frac{\sum A\bar{x}}{\sum A}=\frac{۲۱۶}{۷۴/۴}=۲/۵۶\,in$$

$$\bar{Y}=\frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}=\frac{۱۴۹/۰}{۷۴/۴}=۲/۱۴\,in$$

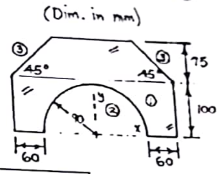


۵-۵۶. مختصات y مرکز سطح سایه‌خورده را تعیین کنید.

حل:

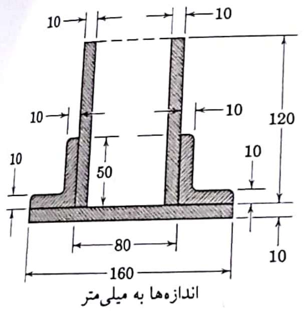
قسمت‌ها:

مستطیل (۱)
نیم‌دایره (۲)
مثلث (۳)



قسمت‌ها	$A(mm^{۲})$	$\bar{y}(mm)$	$A\bar{y}(mm^{۳})$
(۱)	۱۷۵(۳۰۰)	$\frac{۱۷۵}{۲}$	۴۵۹۳۷۵۰
(۲)	$-\frac{\pi(۹۰^{۲})}{۲}$	$\frac{۴(۹۰)}{۳\pi}$	−۴۸۶۰۰۰
(۳)	$-۲(\frac{۱}{۲})(۷۵)(۷۵)$	$(۱۰۰+\frac{۲}{۳}(۷۵))$	−۸۴۳۷۵۰
	$\sum A=۳۴۱۵۱/۵mm$	$\sum A\bar{y}=۳۲۶۴۰۰۰$	

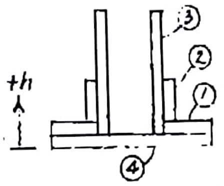
$$\bar{Y}=\frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}=۹۵/۶\,mm$$



اندازه‌ها به میلی‌متر

۵-۵۷. فاصله $\bar{H}$ را از پایین صفحه اصلی تا مرکز سطح مقطع سازه‌ای نشان داده شده را بیابید.

حل:

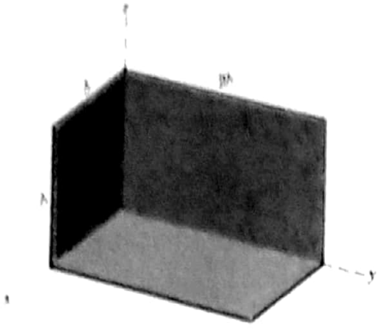


شکل	اندازه mm	$A(mm^{۲})$	$\bar{h}(mm)$	$A\bar{h}(mm^{۳})$
۱	۱۰×۴۰	۸۰۰	۱۵	۱۲۰۰۰
۲	۱۰×۴۰	۸۰۰	۴۰	۳۲۰۰۰
۳	۱۰×۱۲۰	۲۴۰۰	۷۰	۱۶۸۰۰۰
۴	۱۰×۱۶۰	۱۶۰۰	۵	۸۰۰۰
$\sum$		۵۶۰۰		۲۲۰۰۰۰

$$\bar{Y}=\frac{\sum A\bar{h}}{\sum A}=\frac{۲۲۰۰۰۰}{۵۶۰۰}=۳۹/۳\,mm$$

Scanned by CamScanner

۵-۵۸ مختصات مرکز جسمی که از سه صفحه نازک یکنواخت که به هم جوش خورده‌اند را تعیین کنید.



$$(۱)\ \text{صفحه}\ x-y:\quad \bar{x}_۱=\frac{b}{۲}\ ,\quad \bar{y}_۱=b\ ,\quad \bar{z}_۱=۰\ ,\quad A_۱=۲b^۲$$

$$(۲)\ \text{صفحه}\ x-z:\quad \bar{x}_۲=\frac{b}{۲}\ ,\quad \bar{y}_۲=b\ ,\quad \bar{z}_۲=۰\ ,\quad A_۲=b^۲$$

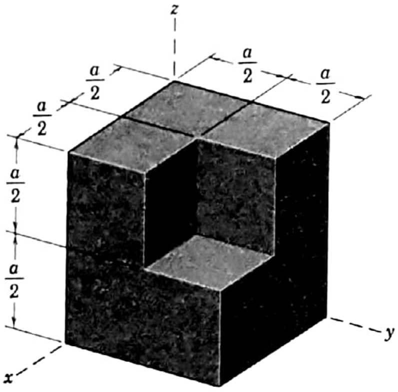
$$(۳)\ \text{صفحه}\ y-z:\quad \bar{x}_۳=۰\ ,\quad \bar{y}_۳=b\ ,\quad \bar{z}_۳=\frac{b}{۲}\ ,\quad A_۳=۲b^۲$$

$$\bar{X}=\frac{\bar{x}_۱A_۱+\bar{x}_۲A_۲+\bar{x}_۳A_۳}{A_۱+A_۲+A_۳}=\frac{(\frac{b}{۲})(۲b^۲)+(\frac{b}{۲})(b^۲)+(۰)(۲b^۲)}{۲b^۲+b^۲+۲b^۲}=\frac{۳b}{۱۰}$$

$$\bar{Y}=\frac{\bar{y}_۱A_۱+\bar{y}_۲A_۲+\bar{y}_۳A_۳}{A_۱+A_۲+A_۳}=\frac{(b)(۲b^۲)+(۰)(b^۲)+(b)(۲b^۲)}{۲b^۲+b^۲+۲b^۲}=\frac{۴b}{۵}$$

$$\bar{Z}=\frac{\bar{z}_۱A_۱+\bar{z}_۲A_۲+\bar{z}_۳A_۳}{A_۱+A_۲+A_۳}=\frac{(۰)(۲b^۲)+(\frac{b}{۲})(b^۲)+(\frac{b}{۲})(۲b^۲)}{۲b^۲+b^۲+۲b^۲}=\frac{۳b}{۱۰}$$

۵-۵۹ مختصات مرکز جرم جسم همگن زیر را تعیین کنید.



حل:

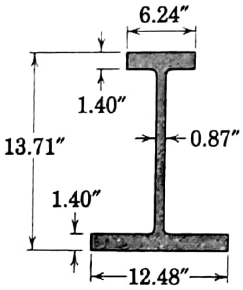
$$(۱)\ \text{مکعب}:\quad \bar{x}_۱=\bar{y}_۱=\bar{z}_۱=\frac{a}{۲}\ ,\quad V_۱=a^۳$$

$$(۲)\ \text{مکعب حذف‌شده}:\quad \bar{x}_۲=\bar{y}_۲=\bar{z}_۲=\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}=\frac{۳a}{۴}\ ,\quad V_۲=\frac{a^۳}{۸}$$

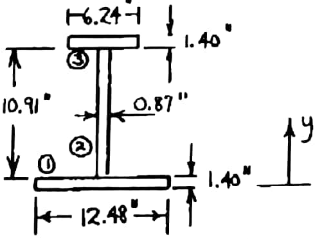
$$\bar{X}=\frac{\bar{x}_۱V_۱-\bar{x}_۲V_۲}{V_۱-V_۲}=\frac{(\frac{a}{۲})(a^۳)-(\frac{۳a}{۴})(\frac{a^۳}{۸})}{a^۳-\frac{a^۳}{۸}}=\frac{۱۳a}{۲۸}$$

$$\bar{Y}=\frac{\bar{y}_۱V_۱-\bar{y}_۲V_۲}{V_۱-V_۲}=\frac{۱۳a}{۲۸}\ ,\quad \bar{Z}=\frac{\bar{z}_۱V_۱-\bar{z}_۲V_۲}{V_۱-V_۲}=\frac{۱۳a}{۲۸}$$

۵-۶۰ ارتفاع مرکز سطح مقطع عرضی تیر را از قاعده آن تعیین کنید. فیلت‌ها (سربندها) قابل صرف‌نظر کردن هستند.



حل:



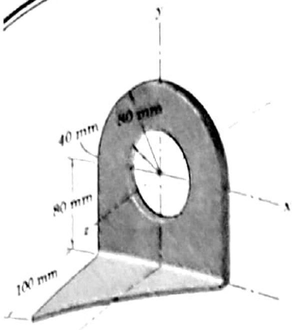
قسمت‌ها	$A(in^۲)$	$\bar{y}(in)$	$A\bar{y}(in^۳)$
(۱)	(۱۲/۴۸)(۱/۴۰)	$\frac{۱/۴۰}{۲}$	۱۲/۲۳
(۲)	(۱۰/۹۱)(۰/۸۷)	$۱/۴۰+\frac{۱۰/۹۱}{۲}$	۶۵/۱
(۳)	(۶/۲۴)(۱/۴۰)	$۱/۴+۱۰/۹۱+\frac{۱/۴۰}{۲}$	۱۱۳/۷
	$\sum A=۳۵/۷$		$\sum A\bar{y}=۱۹۱/۰$

$$\bar{Y}=\frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}=۵/۳۵\,in$$

Scanned by CamScanner

۵-۶۱. مختصات مرکز جرم قاب زیر که از یک صفحه با ضخامت نازک تشکیل شده است را بیابید؟

حل:



(۱) نیم‌دایره $r=۸۰mm$

$$\begin{cases}\bar{x}=۰ & A\bar{x}=۰\\ \bar{y}=۳۳/۹۵ & A\bar{y}=۳۴۱۳۰۲/۶۲۵\\ \bar{z}=۰ & A\bar{z}=۰\\ A=\frac{۱}{۲}(\pi r^۲)=۱۰۰۵۳/۰۹۶\end{cases}$$

(۲) مستطیل

$$\begin{cases}\bar{x}=۰ & A\bar{x}=۰\\ \bar{y}=-۴۰ & A\bar{y}=-۵۱۲۰۰۰\\ \bar{z}=۰ & A\bar{z}=۰\\ A=۱۲۸۰۰\end{cases}$$

(۳) مثلث

$$\begin{cases}\bar{x}=-۲۶/۶۷ & A\bar{x}=-۲۱۳۳۶۰\\ \bar{y}=-۸۰ & A\bar{y}=-۶۴۰۰۰۰\\ \bar{z}=۳۳/۳۴ & A\bar{z}=۲۶۶۷۲۰\\ A=۸۰۰۰\end{cases}$$

(۴) نیم‌دایره حذف‌شده بالایی

$$\begin{cases}\bar{x}=۰ & A\bar{x}=۰\\ \bar{y}=۱۶/۹۷ & A\bar{y}=-۴۲۶۵۰/۲۶۱\\ \bar{z}=۰ & A\bar{z}=۰\\ A=-۲۵۱۳/۲۷۴\end{cases}$$

(۵) نیم‌دایره حذف‌شده پایینی

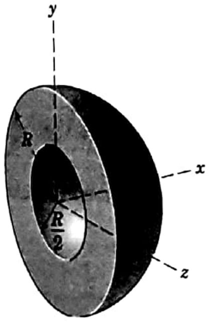
$$\begin{cases}\bar{x}=۰ & A\bar{x}=۰\\ \bar{y}=-۱۶/۹۷ & A\bar{y}=-۴۲۶۵۰/۲۶۱\\ \bar{z}=۰ & A\bar{z}=۰\\ A=-۲۵۱۳/۲۷۴\end{cases}$$

$$\bar{X}=\frac{\sum A\bar{x}}{\sum A}=\frac{-۲۱۳۳۵۰}{\underbrace{۱۰۰۵۳/۰۹۶+۸۰۰۰+۱۲۸۰۰-۲۵۱۳/۲۷۴-۲۵۱۳/۲۷۴}_{۲۵۸۲۶/۵۴۸}}=-۸/۲۶۰۸\,mm$$

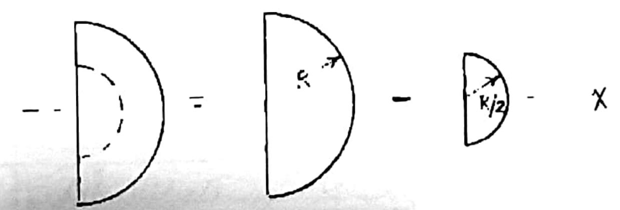
$$\bar{Y}=\frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}=\frac{۳۴۱۳۰۲/۶۲۵-۵۱۲۰۰۰-۶۴۰۰۰۰-۴۲۶۵۰/۲۶۱+۴۲۶۵۰/۲۶۱}{۲۵۸۲۶/۵۴۸}=-۳۱/۳۹۰۰$$

$$\bar{Z}=\frac{\sum A\bar{z}}{\sum A}=\frac{۲۶۶۷۲۰}{۲۵۸۲۶/۵۴۸}=۱۰/۳۲۷۳۵\,mm$$

۵-۶۲. مختصات x مرکز جرم نیمکره همگن که یک بخش از نیمکره حذف شده است (مطابق شکل)، را تعیین کنید.



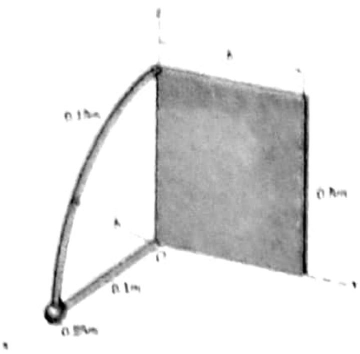
حل:



$$\bar{X}=\frac{\sum V\bar{x}}{\sum V}=\frac{\frac{۲}{۳}\pi R^۲(\frac{۳R}{۸})-\frac{۲}{۳}\pi(\frac{R}{۲})^۳(۳(\frac{R}{۲})/۸)}{\frac{۲}{۳}\pi R^۳-\frac{۲}{۳}\pi(\frac{R}{۲})^۳}=\frac{۴۵}{۱۱۲}R$$

Scanned by CamScanner

... مختصات مرکز جرم بدنه ساخته شده از یک صفحه مربعی شکل یکنواخت به همراه یک میله مستقیم یکنواخت و میله ربع دایره‌ای یکنواخت ... ها قابل صرف‌نظر کردن هستند.) را تعیین کنید. جرم هر عضو در شکل داده شده است.



حل:

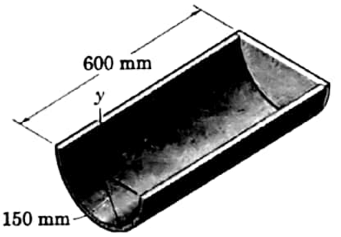
عضو	جرم (m)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{m} \times \bar{x}$	$\bar{m} \times \bar{y}$	$\bar{m} \times \bar{z}$
صفحه مربعی	$۰/۵mb$	۰	$\frac{b}{۲}$	$\frac{b}{۲}$	۰	$۰/۲۵mb$	$۰/۲۵mb$
میله خمیده‌شده	$۰/۱۵mb$	$\frac{۲b}{\pi}$	۰	$\frac{۲b}{\pi}$	$\frac{۰/۳bm}{\pi}$	۰	[illegible] $/\pi$
میله ممتد در راستای x	$۰/۱mb$	$\frac{b}{۲}$	۰	۰	$۰/۰۵mb$	۰	۰
ذره کروی	$۰/۲۵mb$	b	۰	۰	$۰/۲۵mb$	۰	۰
$\sum$	m				$۰/۳۴۵mb$	$۰/۲۵mb$	$۰/۳۴۵mb$

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = ۰/۳۹۵b$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} = ۰/۳۴۵b$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} = ۰/۲۵b$$

۵-۶۴. موقعیت مرکز جرم پوسته استوانه‌ای شکل که در انتها با یک نیم‌دایره بسته شده است را تعیین کنید؟ پوسته از ورقه فلزی به جرم واحد سطح $۲۴kg/m^۲$، و صفحه انتهایی نیز از صفحه فلزی به جرم واحد سطح $۳۶kg/m^۲$ ساخته شده است.



حل:

قطعه	A $mm^۲$	m kg	$\bar{x}$ mm	$\bar{y}$ mm	$m\bar{x}$ $kg.mm$	$m\bar{y}$ $kg.mm$
(۱)	۰/۲۸۳	۶/۷۹	۳۰۰	−۹۵/۵	۲۰۳۶	−۶۴۸
(۲)	۰/۰۳۵۳	۱/۲۷	۶۰۰	−۶۳/۷	۷۶۳	−۸۱
		۸/۰۶			۲۷۹۹	−۷۲۹

Scanned by CamScanner

عضو	$V(mm^۳)$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$V\bar{x}$	$V\bar{y}$	$V\bar{z}$
۱	۷۲۰۰۰	-۳۰	۲۰	۱۵	-۲۱۶۰۰۰۰	۱۴۴۰۰۰۰	۱۰۸۰۰۰۰
۲	۵۰۰۰	-۵۱/۶۷	۲۰	۳۳/۳۴	-۲۵۸۳۵۰	۱۰۰۰۰۰	۱۶۶۷۰۰
۳	-۹۴۲۴/۷۷۷	-۱۷/۵	۲۰	۱۵		۱۶۴۹۳۳/۶۱۴۳ $V\bar{x}$	-۱۸۸۴۹۵/۵۴ $V\bar{y}$

$$V\bar{z} = -۱۴۱۳۷۱/۶۵۵$$

$$\sum V = ۵۰۰۰ + ۷۲۰۰۰ - ۹۴۲۴/۷۷۷ = ۶۷۵۷۵/۲۲۳$$

$$\sum V\bar{x} = -۲۱۶۰۰۰۰ - ۲۵۸۳۵۰ + ۱۶۴۹۳۳/۶۱۴۳ = -۲۲۵۳۴۱۶/۳۸۶$$

$$\sum V\bar{y} = ۱۴۴۰۰۰۰ + ۱۰۰/۰۰۰ - ۱۸۸۴۹۵/۵۴ = ۱۳۵۱۵۰۴/۴۶$$

$$\sum V\bar{z} = ۱۰۸۰۰۰۰ + ۱۶۶۷۰۰ - ۱۴۱۳۷۱/۶۵۵ = ۱۱۰۵۳۲۸/۳۴۵°$$

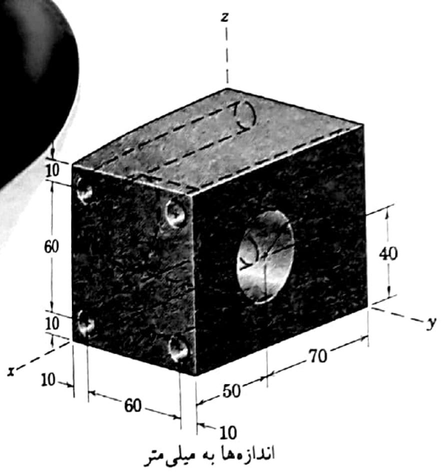
$$\bar{X} = \frac{\sum V\bar{x}}{\sum V} = \frac{-۲۲۵۳۴۱۶/۳۸۶}{۶۷۵۷۵/۲۲۳} = -۳۳/۳۴۶۷\ mm$$

$$\bar{X} = \frac{\sum V\bar{y}}{\sum V} = \frac{۱۳۵۱۵۰۴/۴۶}{۶۷۵۷۵/۲۲۳} = ۲۰\ mm$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum V\bar{z}}{\sum V} = \frac{۱۱۰۵۳۲۸/۳۴۵}{۶۷۵۷۵/۲۲۳} = ۱۶/۳۵۷\ mm$$

۵-۶۶. مختصات مرکز جسم زیر با پنج سوراخ دریل شده که به طور کامل از سرتاسر جسم عبور می‌کند را تعیین کنید. هر چهار سوراخ کوچک دارای شعاعی به اندازه $۶mm$ هستند.

حل:



اندازه‌ها به میلی‌متر

عضو	$V(mm^۳)$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$V\bar{x}$	$V\bar{y}$	$V\bar{z}$
مکعب مستطیل	۷۶۸۰۰۰	۶۰	۴۰	۴۰	۴۶۰۸۰۰۰۰	۳۰۷۲۰۰۰۰	۳۰۷۲۰۰۰۰
استوانه $۲۰mm$	-۱۰۰۵۳۰/۹۶	۷۰	۴۰	۴۰	-۷۰۳۷۱۶۷/۲	-۴۰۲۱۲۳۸/۴	-۴۰۲۱۲۳۸/۴
استوانه $۶mm$ شماره ۱	-۱۳۵۷۱/۶۸	۶۰	۱۰	۷۰	-۸۱۴۳۰۰/۸	-۱۳۵۷۱۶/۸	-۹۵۰۰۱۷/۶
استوانه $۶mm$ شماره ۲	-۱۳۵۷۱/۶۸	۶۰	۷۰	۷۰	-۸۱۴۳۰۰/۸	-۹۵۰۰۱۷/۶	-۹۵۰۰۱۷/۶

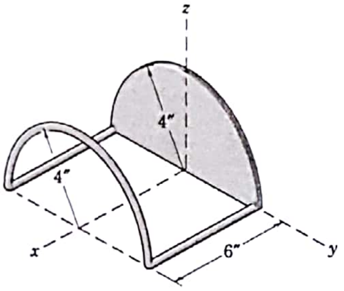
Scanned by CamScanner

عضو	$V(mm^3)$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$V\bar{x}$	$V\bar{y}$	$V\bar{z}$
استوانه ۶mm شماره ۳	−۱۳۵۷۱/۶۸	۶۰	۱۰	۱۰	−۸۱۴۳۰۰/۸	−۱۳۵۷۱۶/۸	−۱۳۵۷۱۶/۸
استوانه ۶mm شماره ۴	−۱۳۵۷۱/۶۸	۶۰	۷۰	۱۰	−۸۱۴۳۰۰/۸	−۹۵۰۰۱۷/۶	−۱۳۵۷۱۶/۸
Σ	۶۱۳۱۸۲/۳۲				۳۵۷۸۵۶۲۹/۶	۲۴۵۲۷۲۹۲/۸	۲۴۵۲۷۲۹۲/۸

$$\overline{X} = \frac{\sum V\bar{x}}{\sum V} = \frac{۳۵۷۸۵۶۲۹/۶}{۶۱۳۱۸۲/۳۲} = ۵۸/۳۶۰۰۵mm$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y} &= \frac{\sum V\bar{y}}{\sum V}\\ \overline{Z} &= \frac{\sum V\bar{z}}{\sum V}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{Y} = \overline{Z} = \frac{۲۴۵۲۷۲۹۲/۸}{۶۱۳۱۸۲/۳۲} = ۴۰mm$$

۵-۶۷ قطعه جوش‌خورده زیر از جنس میله یکنواخت به وزن $۰/۳۷۰\ lb/ft$ و صفحه نیم‌دایره به وزن $۵lb/ft^۲$ ساخته شده است. مختصات‌هـای مرکـز ثقل قطعه را محاسبه کنید.



حل:

میله شبه دایروی = ۱

دو میله مستقیم = ۲

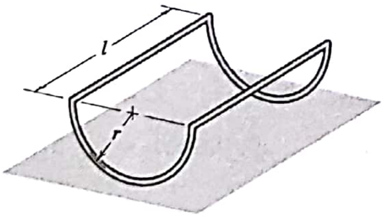
صفحه نیم دایروی = ۳

قسمت	L, ft	$A, ft^۲$	$W.lb$	$\bar{x}.in$	$\bar{z}.in$	$W\bar{x}$	$W\bar{z}$
۱	۱/۰۴۷	–	۰/۳۸۷	۶	۲/۳۲۵	۲/۳۲۵	۰/۹۸۷
۲	۱	–	۰/۳۷۰	۳	۰	۱/۱۱۰	۰
۳	–	۰/۱۷۴۵	۱/۳۹۶	۰	۱/۶۹۸	۰	۲/۳۷۰
$\sum s$			۲/۱۵۳			۳/۴۳۵	۳/۳۵۷

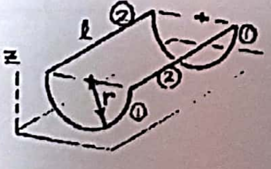
$$\overline{X} = \frac{\sum W\bar{x}}{\sum W} = \frac{۳/۴۳۵}{۲/۱۵۳} = ۱/۵۹۵in$$

$$\overline{Z} = \frac{\sum W\bar{z}}{\sum W} = \frac{۳/۳۵۷}{۲/۱۵۳} = ۱/۵۵۹in$$

۵-۶۸ مونتاژ نشان داده شده به صورت میله یکنواخت تغییر شکل داده شده است. برای چه مقدار از طول L مرکز جرم در ارتفاع ۳r/۴ بـالای سطح نگهدارنده واقع خواهد شد؟



حل:

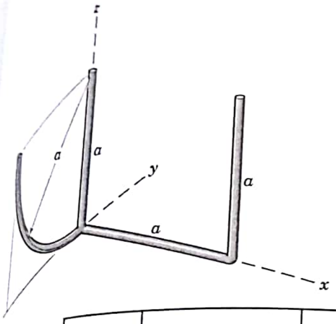


قسمت	L	$\bar{z}$	$L\bar{z}$
۱	$۲(\pi r)$	$r-\frac{۲r}{\pi}$	$۲r^۲(\pi-۲)$
۲	۲ℓ	r	$۲\ell r$
	$\sum L=z(\pi r+\ell)$		$\sum L\bar{z}=zr[r(\pi-۲)+\ell]$

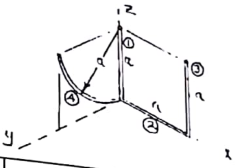
$$\bar{z}=\frac{\sum L\bar{z}}{\sum L}=\frac{۲r[r(\pi-z)+\ell]}{۲(\pi r+\ell)}=\frac{۳r}{۴}$$

$$\ell=(۸-\pi)r$$

۵-۶۹. مختصات مرکز جرم مونتاژ میله‌های باریک یکنواخت جوش‌خورده شده را که از میله‌های باریک یکنواخت هم‌جنس ساخته شده‌اند، تعیین کنید.



حل:



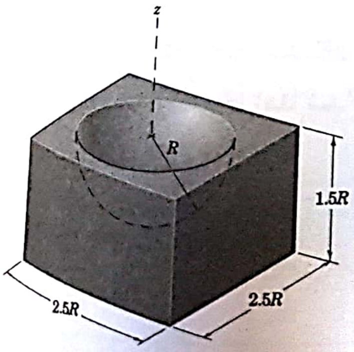
شکل	m	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$m\bar{x}$	$m\bar{y}$	$m\bar{z}$
۱	ρa	۰	۰	$\frac{a}{۲}$	۰	۰	$\frac{\rho a^۲}{۲}$
۲	ρa	$\frac{۹}{۲}$	۰	۰	$\frac{\rho a^۲}{۲}$	۰	۰
۳	ρa	a	۰	$\frac{a}{۲}$	$\rho a^۲$	۰	$\frac{\rho a^۲}{۲}$
۴	$\frac{\rho\pi a}{۲}$	۰	$\frac{-۲a}{\pi}$	$a(۱-\frac{۲}{\pi})$	۰	$-\rho a^۲$	$\rho a^۲(\frac{\pi}{۲}-۱)$
$\sum$	$\rho a(۳+\frac{\pi}{۲})$				$\frac{۳}{۲}\rho a^۲$	$-\rho a^۲$	$\frac{\pi}{۲}\rho a^۲$

$$\bar{X}=\frac{\sum m\bar{x}}{\sum m}=\frac{\frac{۲}{۳}\rho a^۲}{\rho a(۳+\frac{\pi}{۲})}=\frac{۳a}{۶+\pi}$$

$$\bar{Y}=\frac{\sum m\bar{y}}{\sum m}=\frac{-\rho a^۲}{\rho a(۳+\frac{\pi}{۲})}=-\frac{۲a}{۶+\pi}$$

$$\bar{Z}=\frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}=\frac{\frac{\pi}{۲}\rho a^۲}{\rho a(۳+\frac{\pi}{۲})}=\frac{\pi a}{۶+\pi}$$

۵-۷۰. مختصات z مرکز جسم مستطیلی شکل با سوراخ نیمکره‌ای را تعیین کنید. مرکز نیمکره روی مرکز سطح توپر واقع شده است و z از سطح پایین‌تر رو به بالا اندازه‌گیری شده است.

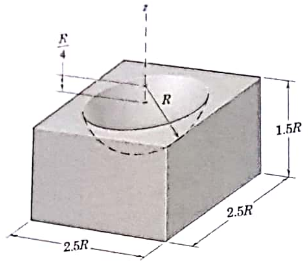


حل:

عضو	V	$\bar{z}$	$V\bar{z}$
مکعب مستطیل	$۹/۳۷۵\,R^۳$	$۰/۷۵\,R$	$۷/۰۳۱۲۵\,R^۴$
نیمکره توخالی	$-۲/۰۹\,R^۳$	$۱/۱۲۵\,R$	$-۲/۳۵۱۲۵\,R^۴$
Σ	$۷/۲۸۵\,R^۳$	—	$۲/۶۸\,R^۴$

$$\bar{Z}=\frac{\sum V\bar{z}}{\sum V}=\frac{۲/۶۸\,R^۴}{۷/۲۸۵\,R^۳}=۰/۶۴۲\,R$$

۵-۷۱. مختصات z مرکز مستطیل توپر با بخش حذف شده کروی (کمتر از نیمکره) را تعیین کنید. مرکز نیمکره در فاصله $R/۴$ بالای مرکز سطح بالایی قرار دارد و z از سطح پایینی اندازه‌گیری شده است. به نتایج مسئله ۵-۳۴ مراجعه کنید.

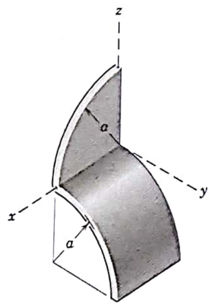


حل:

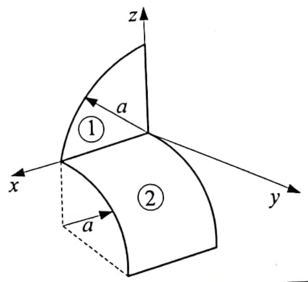
عضو	V	$\bar{z}$	$V\bar{z}$
مکعب مستطیل	$۹/۳۷۵\,R^۳$	$۰/۷۵\,R$	$۷/۰۳۱۲۵\,R^۴$
قسمت توخالی	$-۱/۳۲۵۳\,R^۳$	$۱/۲۳\,R$	$-۱/۶۳۰۱۱۹\,R^۴$
Σ	$۸/۰۴۹۷\,R^۳$	—	$۵/۴۰۱۱۳۱\,R^۴$

$$\bar{Z}=\frac{\sum V\bar{z}}{\sum V}=\frac{۵/۴۰۱۱۳۱\,R^۴}{۸/۰۴۹۷\,R^۳}=۰/۶۷۰۹\,R$$

۵-۷۲. مختصات‌های x و y و z مرکز جرم ورقه فلزی نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:

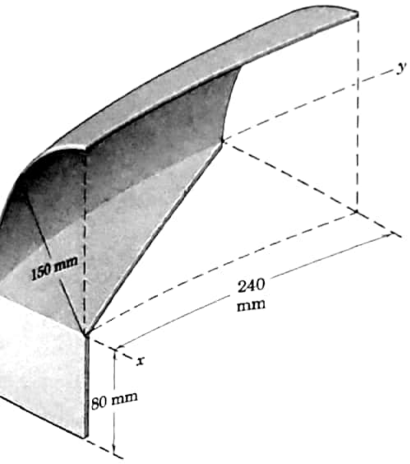


عضو	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$	$A\bar{z}$
۱	$\frac{\pi a^۲}{۴}$	$\frac{۴a}{۳\pi}$	۰	$\frac{۴a}{۳\pi}$	$\frac{a^۳}{۳}$	۰	$\frac{a^۳}{۲}$
۲	$\frac{\pi a^۲}{۲}$	$\frac{a}{۲}$	$\frac{۲a}{\pi}$	$(\frac{a}{\pi}-۱)a$	$\frac{\pi}{۴}a^۳$	$a^۳$	$(۱-\frac{\pi}{۲})a^۳$
Σ	$\frac{۳\pi a^۲}{۴}$	—	—	—	$(\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۳})a$	$a^۳$	$(\frac{۴}{۳}-\frac{\pi}{۲})a^۳$

$$\bar{X}=\frac{\sum A\bar{x}}{\sum A}=\frac{(\frac{۱}{۳}+\frac{\pi}{۴})a^۳}{\frac{۳\pi a^۲}{۴}}=۰/۴۷۴۸\,a\ mm$$

$$= \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{a^۲}{\frac{۲\pi}{۲}a^۲} = ۰/۴۲۴۴\,a \ mm$$

$$= \frac{\sum A\bar{z}}{\sum A} = \frac{(\frac{۲}{۲} - \frac{\pi}{۲})a^۲}{\frac{۲\pi a^۲}{۲}} = -۰/۱۰۰۸\,a \ mm$$



۵-۷۳. مختصات‌های x و y و z مرکز جرم فیکسچر تغییرشکل یافته از صفحه آلومینیومی با ضخامت یکنواخت را محاسبه کنید.

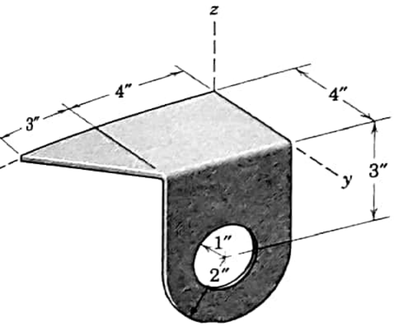
حل:

عضو	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$	$A\bar{z}$
ربع استوانه	۵۶۵۴۸/۶۶	۵۴/۵	۱۲۰	۹۵/۴۹	۳۰۸۱۹۰۱/۹۷	۶۷۸۵۸۳۹/۲	۵۳۹۹۸۳۱/۵۴۳
مستطیل	۱۲۰۰۰	۷۵	۰	−۴۰	۹۰۰۰۰۰	۰	−۴۸۰۰۰۰
مثلث	۱۸۰۰۰	۵۰	۸۰	۰	۹۰۰۰۰۰	۱۴۴۰۰۰۰	۰
Σ	۸۶۵۴۸/۶۶	—	—	—	۴۸۸۱۹۰۱/۹۷	۸۲۲۵۸۳۹/۲	۴۹۱۹۸۳۱/۵۴۳

$$= \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{۴۸۸۱۹۰۱/۹۷}{۸۶۵۴۸/۶۶} = ۵۶/۴۰۶ \ mm$$

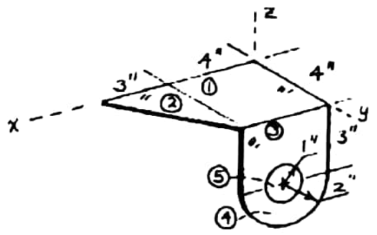
$$= \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{۸۲۲۵۸۳۹/۹}{۸۶۵۴۸/۶۶} = ۹۵/۰۴۲ \ mm$$

$$= \frac{\sum A\bar{z}}{\sum A} = \frac{۴۹۱۹۸۳۱/۵۴۳}{۸۶۵۴۸/۶۶} = ۵۶/۸۴۴ \ mm$$



۵-۷۴. مختصات‌های مرکز جرم قاب که از ورقه فلزی با ضخامت یکنواخت ساخته شده است را تعیین کنید.

حل:



Scanned by CamScanner

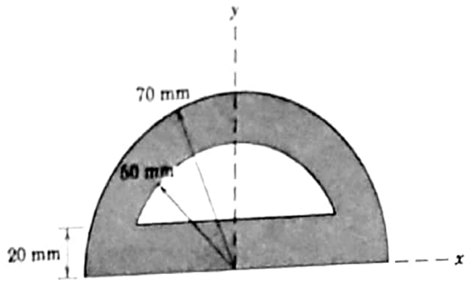
$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{۹۲.۳}{۳۷/۱} = ۲/۴۸ in$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{۱۰۰/۶}{۳۷/۱} = ۲/۷۱ \ in$$

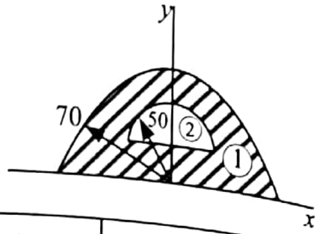
$$\bar{Z} = \frac{\sum A\bar{z}}{\sum A} = \frac{-۳۲/۸}{۳۷/۱} = -۰/۸۸۲ \ in$$

۵-۷۵. مختصات y مرکز سطح ناحیه سایه‌خورده را تعیین کنیـد؟

(تذکر: برای حل به مسئله ۵-۴۱ مراجعه کنید.)



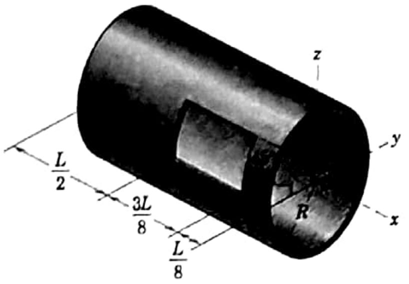
حل:



عضو	A	$\bar{y}$	$A\bar{y}$
(۱)	۷۶۹۶/۹۰۲	۲۹/۷	۲۲۸۵۹۷/۹۸۹۴
(۲)	−۱۹۸۱/۶۸	۳۲/۳۷	−۶۴۱۴۶/۹۸۱۶
$\sum$	۵۷۱۵/۲۲۲	—	۱۶۴۴۵۱/۰۰۷۸

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{۱۶۴۴۵۱/۰۰۷۸}{۵۷۱۵/۲۲۲} = ۲۸/۷۷۴۲ \ mm$$

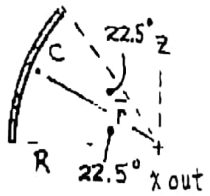
۵-۷۶. در یک پوسته استوانه‌ای نازک، یـک منفـذ تعبیـه شـده اسـت. مختصات‌های x و y و z مرکز جرم جسم همگن را تعیین کنید.



حل:

پوسته استوانه‌ای: (۱)

جزئیات سوراخ: (۲)



$$\bar{r} = \frac{R\sin(۲۲/۵^\circ)}{\frac{\pi}{۸}} = ۰/۹۷۴R$$

$$\begin{cases} \bar{x} = -\frac{L}{۸} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳L}{۸}\right) = -\frac{۵}{۱۶}L \\ \bar{y} = -\bar{r}\cos(۲۲/۵^\circ) = -۰/۹۰۰R \\ \bar{z} = \bar{r}\sin(۲۲/۵^\circ) = ۰/۳۷۳R \end{cases}$$

شکل	m	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$m\bar{x}$	$m\bar{y}$	$m\bar{z}$
۱	$۲\rho\pi RL$	$-\frac{L}{۲}$	۰	۰	$-\rho\pi R^۲L$	۰	۰
۲	$-\frac{۳}{۳۲}\rho\pi RL$	$-\frac{۵L}{۱۶}$	$۰/۹۰۰R$	$۰/۳۷۳R$	$۰/۰۲۹۳\rho\pi RL^۲$	$۰/۰۸۴۴\rho\pi R^۲L$	$-۰/۰۳۵۰\rho\pi R^۲L$
$\sum$	$۱/۹۰۶\rho\pi RL$				$-۰/۰۳۵۰\rho\pi R^۲L$	$۰/۰۸۴۴\rho\pi R^۲L$	$-۰/۰۳۵۰\rho\pi R^۲L$

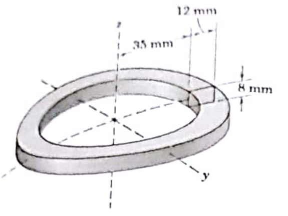
$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = \frac{-۰/۹۷۱\rho\pi RL^۲}{۱/۹۰۶\rho\pi RL} = -۰/۵۰۹L$$

Scanned by CamScanner

$$\bar{y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} = \frac{۰/۰۸۲۴\,\rho\pi R^{۲}L}{۱/۹۰۶\,\rho\pi RL} = ۰/۰۴۲۴\,R$$

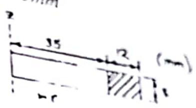
$$\bar{z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} = \frac{-۰/۰۲۵۰\,\rho\pi R^{۲}L}{۱/۹۰۶\,\rho\pi RL} = -۰/۰۱۸۲۴\,R$$

۵-۷۲. با استفاده از روش‌های گفته شده این فصل، مساحت سطح A و حجم V تولید شده جسم مستطیلی شکل که حول محور z به اندازه ۳۶۰ درجه می‌چرخد را تعیین کنید.



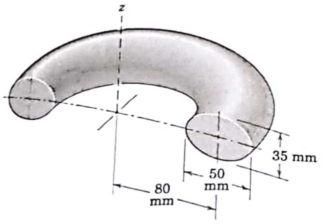
حل:

$$A = ۲\pi\bar{r}L = ۲\pi\left(۳۵+\frac{۱۲}{۲}\right)(۱۲+۱۲+۸+۸) = ۱۰۳۰۰\,mm^{۲}$$



$$V = ۲\pi\bar{r}A = ۲\pi\left(۳۵+\frac{۱۲}{۲}\right)(۱۲/۸) = ۲۴۷۰۰\,mm^{۳}$$

۵-۷۸. حجم V تولید شده به وسیله دوران ۱۸۰ درجه‌ای ناحیه بیضوی حول محور z ها را تعیین کنید.



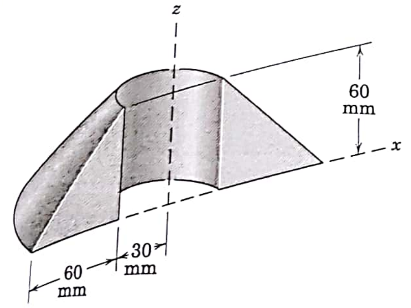
حل:

$$V = \pi\bar{y}A$$

$$A = \pi\left(\frac{۵۰}{۲}\right)\left(\frac{۳۵}{۲}\right) = ۱۳۷۴/۴۴۶۷\,mm^{۲}, \quad \bar{y} = ۸۰\,mm \Rightarrow V = \pi(۱۳۷۴/۴۴۶۷)(۸۰)$$

$$\Rightarrow V = ۳۴۵۴۳۶/۱۵۴\,(mm^{۳})$$

۵-۷۹. حجم V جسم توپر تولید شده با دوران ۱۸۰ درجه‌ای ناحیه مثلثی حول محور z را محاسبه کنید.



حل:

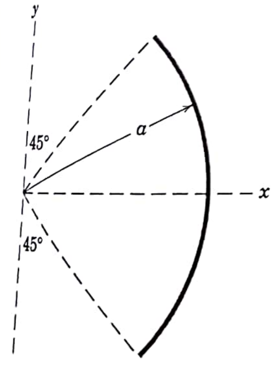
$$V = \pi\bar{x}A$$

$$A = \frac{۱}{۲}(۶۰)(۶۰) = ۱۸۰۰\,mm^{۲}$$

$$\bar{x} = ۳۰+\frac{۱}{۳}(۶۰) = ۵۰\,mm$$

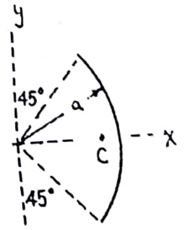
$$\Rightarrow \quad V = \pi(۵۰)(۱۸۰۰) = ۲۸۲۷۴۳/۳۳۸۸\,(mm^{۳})$$

۵-۸۰. کمان دایره‌ای شکل به اندازه ۳۶۰ درجه حول محور y ها می‌چرخد. مساحت سطح بیرونی S حاصل شده که بخشی از یک پوسته کروی می‌باشد را تعیین کنید.



حل:

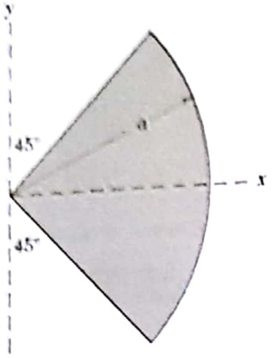
از جدول $D/۳$



$$\bar{x} = \frac{a\sin\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۴}} = a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{۴}{\pi} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}a$$

$$A = ۲\pi\bar{x}L = ۲\pi\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}a\right)\left(\frac{۲\pi a}{۴}\right) = ۲\sqrt{۲}\,\pi a^{۲}$$

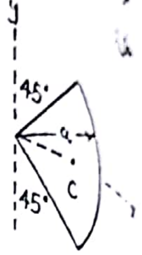
ناحیه ربع دایروی حول محور y به اندازه ۳۶۰ درجه می‌چرخد. حجم حاصل شده که بخشی از یک کره است را تعیین کنید.



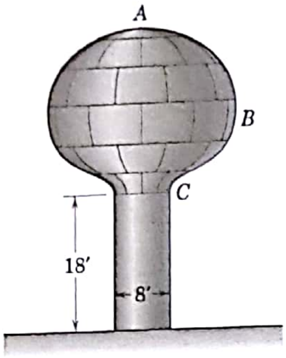
حل: از جدول D/۳

$$\bar{x} = \frac{۲}{۳}a\frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۲}{۳}a\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۴}{\pi}\right) = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳\pi}a$$

$$V = ۲\pi\bar{x}A = ۲\pi\left(\frac{۴\sqrt{۲}}{۳\pi}a\right)\left(\frac{\pi a^{۲}}{۴}\right) = \frac{۲\pi\sqrt{۲}\,a^{۳}}{۳}$$



۸۲-۵ تانکر ذخیره آب به شکل یک پوسته مدور است و با دو لایه رنگ اسپری شده است که ۵۰۰ $ft^{۲}$ بر گالن را پوشش می‌دهد. مهندسان (کسی که علم مکانیک را می‌داند) با توجه به نقشه مقیاس‌دار مخزن، خط منحنی ABC را برابر ۲۴ ft و فاصله مرکز سطح آن از خط مرکزی مخزن را برابر ۸/۲ ft تخمین می‌زند. چند گالن رنگ برای تانکر که شامل یک ستون استوانه‌ای عمودی است استفاده خواهد شد؟

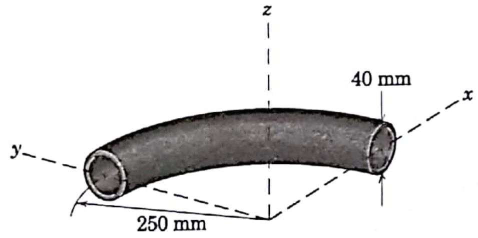


حل:

$$A = ۲\pi\bar{r}L + \pi ah = ۲\pi(۸/۲)(۲۴) + \pi(۸)(۱۸) = ۲۲۰۴\ ft^{۲}$$

$$\text{تعداد گالن رنگ برای دو لایه} = \left(\frac{۲۲۰۴}{۵۰۰}\right)(۲) = ۸/۸۲\ gaL$$

۸۳-۵ جرم شلنگ رادیاتور ربع دایره‌ای را تعیین کنید. قطر درونی ۴۰ mm است، ضخامت دیواره ۴ mm و دانسیته مواد پلاستیکی ۱۰۵۰ $kg/m^{۳}$ است.



حل:

$$\text{چگالی}\quad \rho = \frac{m(\text{جرم})}{V(\text{حجم})} \Rightarrow m = \rho V \qquad (۱)$$

$$V = \frac{\pi}{۲}\bar{x}A \quad , \quad \bar{x} = ۲۵۰\,mm$$

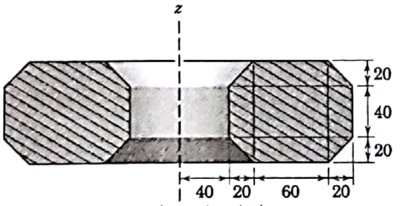
$$D_i = ۴۰\,mm \Rightarrow r_i = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰\,mm \quad , \quad r_o = ۲۰ + ۴ = ۲۴\,mm$$

$$A = \pi(r_o^{۲} - r_i^{۲}) \Rightarrow A = \pi(۲۴^{۲} - ۲۰^{۲}) \Rightarrow A = ۵۵۲/۹۲۰۳\,mm^{۲}$$

$$V = \frac{\pi}{۲}(۲۵۰)(۵۵۲/۹۲۰۳) \Rightarrow V = ۲۱۷۱۳۱/۲۹۶۸\,mm^{۳}$$

$$\xrightarrow{(۱)} m = (۲۱۷۱۳۱/۲۹۶۸)(۱۰^{-۹})(۱۰۵۰) \Rightarrow m = ۰/۲۲۷۹\,kg$$

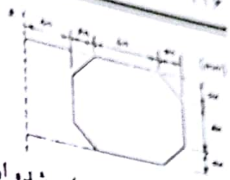
۸۴-۵ جسم نشان داده شده در مقطع عرضی یک حلقه دایره‌وار کامل است که به وسیله چرخش ناحیه هشت وجهی حول محور z ها ساخته می‌شود. سطح داخلی با یک پوشش خاص احاطه شده است. مساحت سطح به وجود آمده را تعیین کنید.



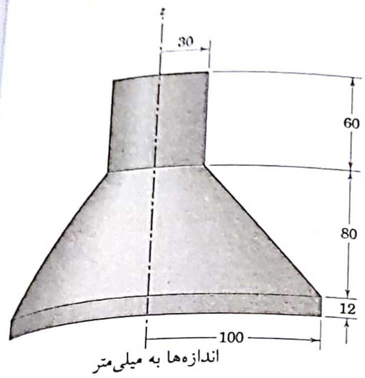
حل:

$$A = 2\pi \bar{r} L$$

$$= 2\pi\left[20 + 20 + \frac{60}{2}\right]\left[2(60) + 2(20) + 3/20\sqrt{2}\right] = 177100 m^2$$



۸۵-۵ آبازور نشان داده شده از فلز نازک به ضخامت $0/6\,mm$ ساخته شده است و نسبت به محور z متقارن است. هر دو انتها بالا و پایین باز هستند. جرم آبازور را تعیین کنید؟ شعاع را از وسط ضخامت درنظر بگیرید.

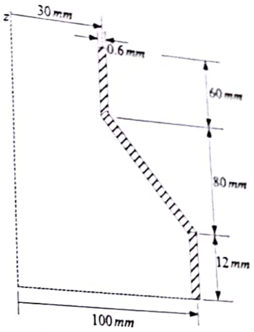


اندازه‌ها به میلی‌متر

حل:

$$\bar{y} = \frac{(12)(0/6)(99/7) + (106/3)(647)(0/6) + (60)(0/6)(29/7)}{(0/6)(12) + (0/6)(106/3) + (0/6)(60)}$$

$$\bar{y} = 55/1688\, mm$$

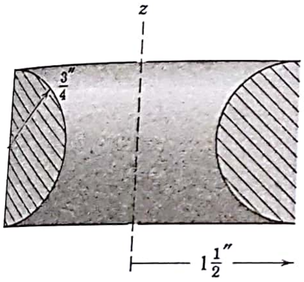


$$A = 106/98\, mm^2$$

$$V = 2\pi A\bar{y} = 2\pi(106/98)(55/1688) = 37083/0972\, mm^3$$

از جدول چگالی فولاد برابر $7900 kg/m^3$ است. پس داریم:

$$m = (37083/0972)(10^{-9})(7900) = 0/2929\, kg$$

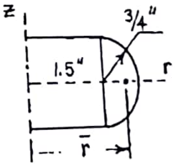


۸۶-۵ حجم V واشر لاستیکی که از حلقه کاملی با مقطع عرضی نشان داده شده تشکیل یافته است را محاسبه کنید. همچنین، مساحت سطح A خارجی حلقه را تعیین کنید.

حل:

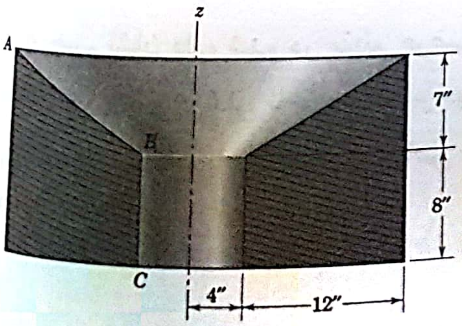
$$V = 2\pi \bar{r}_{area} A = 2\pi\left(1/5 - \frac{4(0/75)}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi(0/75)^2}{2}\right) = 6/56\, in^3$$

$$A = 2\pi \bar{r}_{arc} L = 2\pi\left(1/5 + \frac{2(0/75)}{\pi}\right)(\pi \times 0/75) = 29/3\, in^2$$



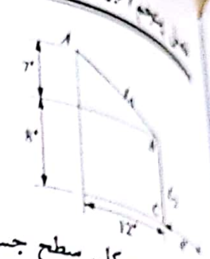
$$\begin{cases} \bar{r}_{area} = 1/5 + \dfrac{4r}{3\pi} \\ \bar{r}_{arc} = 1/5 + \dfrac{2r}{\pi} \end{cases}$$

۸۷-۵ مساحت سطح داخلی (تولید شده به وسیله چرخش کامل ABC حول محور z) جسم نشان داده شده در برش عرضی را تعیین کنید.



حل:

$$L_1 = \sqrt{7^2 + 12^2} = 13/892''$$



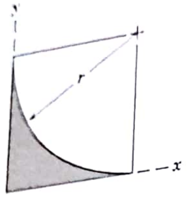
$L_1 = 8''$

$\bar{y} = \frac{(8)(4) + (13/9)(10)}{8 + 13/9} \Rightarrow \bar{y} = 7/8082''$

$A = (2\pi)\bar{y}(L_1 + L_2) \Rightarrow A = 2\pi(7/8082)(8 + 13/892)$

$\Rightarrow A = 1012/029\,in^2$

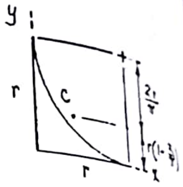
۵-۸۸. مساحت کلی سطح جسم تولید شده بـه وسـیله دوران ۳۶۰ درجـه‌ای ناحیـه سایه‌خورده حول محور x را تعیین کنید.



حل:

سطح جانبی برابر است با:

$$A_L = 2\pi\bar{y}L = 2\pi r\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\pi r}{2}\right) = \pi^2 r^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$



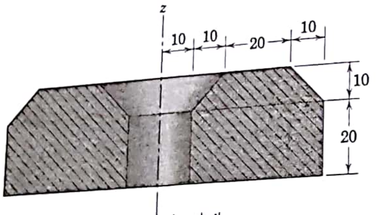
سطح پایین (انتهای چپ) برابر است با:

$A_B = \pi r^2$

کل سطح جانبی برابر است با:

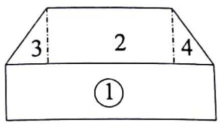
$A = A_L + A_B = \pi r^2[\pi - 1]$

۵-۸۹. جرم تیتانیوم ریخته‌گری شده که به وسیله چـرخش بـرش عرضی نشان داده شده، حول محور تقارن z به وجود آمده اسـت را تعیین کنید.



اندازه‌ها به میلی‌متر

حل:



از جداول مقدار چگالی آلیاژ تیتانیوم برابر $3081\,kg/m^3$ است.

عضو	A	$\bar{y}$	$A\bar{y}$
(۱)	۸۰۰	۳۰	۲۴۰۰۰
(۲)	۲۰۰	۳۰	۶۰۰۰
(۳)	۵۰	۱۶/۶۷	۸۳۳/۳۴
(۴)	۵۰	۴۳/۳۴	۲۱۶۶/۶۷
Σ	۱۱۰۰	—	۳۳۰۰۰/۰۱

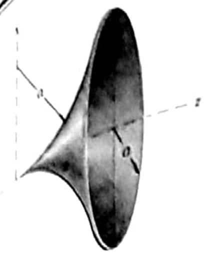
$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{33000/01}{1100} = 30\,mm$$

$V = 2\pi\bar{y}A \Rightarrow V = 2\pi(30)(1100) \Rightarrow V = 207345/178\,mm^3$

$m = \rho V \Rightarrow m = (3081)(10^{-9})(207345/178) \Rightarrow m = 0/6388\,kg$

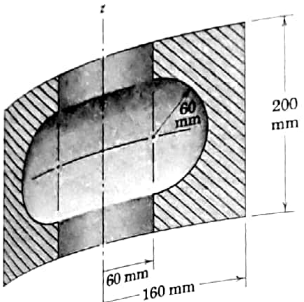
۵-۹۰. مساحت سطح یک طرف پوسته ناقوس شکل یکنواخت زیر را تمرین کنید. ضخامت قابل صرف‌نظر کردن هستند.

حل:



$$A = ۲\pi \bar{r} L = ۲\pi\left(a - \frac{۲a}{\pi}\right)\frac{\pi a}{۲} = \pi a^۲(\pi - ۲)$$

۵-۹۱. **یک قالب فلزی، در برش نشان داده شده، یک شکل توپر دارد که به وسیله چرخش ناحیه سایه‌خورده حول محور z تولید می‌شود. جرم m قالب را محاسبه کنید.**



حل:

$$m = \rho V \quad , \quad \rho = ۷۸۳۰\frac{kg}{m^۳} \ (\text{پیوست } D)$$

$$V = ۲\pi \bar{r} A$$

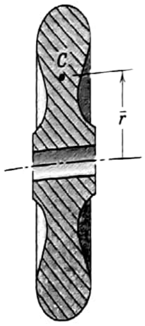
$$\bar{r}A = ۲۰۰(۱۰۰)\left(\frac{۶۰+۱۶۰}{۲}\right) - \frac{\pi(۶۰^۲)}{۲}\left(۶۰ + \frac{۴(۶۰)}{۳\pi}\right) = ۱/۷۱۷(۱۰^۶)\,mm^۳$$

$$V = ۲\pi(۱/۷۱۷ \times ۱۰^۶) = ۱۰/۷۹(۱۰^۶)\,mm^۳$$

یا $V = ۰/۰۱۰۷۹\,m^۳$

$$\therefore m = \rho V = ۷۸۳۰(۰/۰۱۰۷۹) = ۸۴/۵\,kg$$

۵-۹۲. **یک چرخ کنترل کارکرد دستی متقارن که از آلومینیوم ساخته شده است، از نمای برش عرضی نشان داده شده است. مساحت کل قسمت برش‌خورده نشان داده شده برابر $۱۵۲۰۰mm^۲$ می‌باشد و چرخ، جرمی به اندازه $۱۰kg$ دارد. فاصله $\bar{r}$ از مرکز نیمه‌برش‌خورده را محاسبه کنید. آلومینیوم دارای چگالی $۲/۶۹\,Mg/m^۳$ است.**



حل:

$$V = ۲\pi \bar{r} A \quad , \quad m = V\rho$$

از آنجایی که:

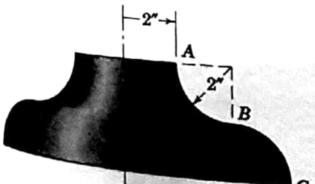
$$m = ۱۰/۰\,kg \quad , \quad \rho = ۲/۶۹ \times ۱۰^۳\,kg/m^۳$$

$$A = \frac{۱}{۲}۱۵۲۰۰ \times ۱۰^{-۶} = ۷/۶۰۰ \times ۱۰^{-۳}\,m^۲$$

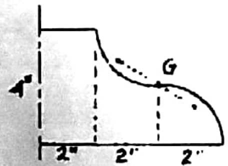
بنابراین

$$\bar{r} = \frac{V}{۲\pi A} = \frac{m}{۲\pi\rho A} = \frac{۱۰/۰}{۲\pi(۲/۶۹\times۱۰^۳)(۷/۶\times۱۰^{-۳})} = ۰/۰۷۷۸ \quad \text{یا} \quad \bar{r} = ۷۷/۸\,mm$$

۵-۹۳. **دو کمان دایره‌ای AB و BC حول محور عمودی برای به دست آوردن سطح مدور نشان داده شده می‌چرخند. مساحت A بیرونی این سطح را محاسبه کنید.**



حل:

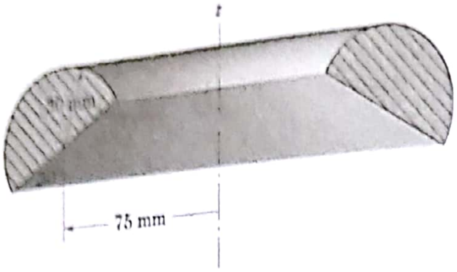


Scanned by CamScanner

$G =$ مرکز تقارن

$A = ۲\pi \bar{r} L = ۲\pi(۲)(\pi)۲ = ۱۶\pi^{۲} = ۱۵۷/۹\, in^{۲}$

...حجم تولید شده به وسیله چرخش ناحیه نیم‌دایره‌ای ... ۱۸۰ درجه را تعیین کنید.



حل:

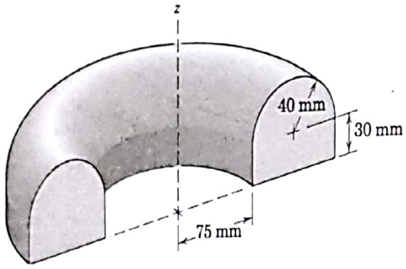
$\bar{r}' = \frac{۴r}{۳\pi} = \frac{۴(۳۰)}{۳\pi} = ۱۲/۷۳\, mm$

$\bar{r} = ۷۵ + ۱۲/۷۳ \sin ۳۰^{\circ} = ۸۱/۴\, mm$

$A = \frac{\pi r^{۲}}{۲} = \frac{\pi(۳۰)^{۲}}{۲} = ۱۴۱۴\, mm^{۲}$

$V = \pi \bar{r} A = \pi(۸۱/۴)(۱۴۱۴) = ۳۶۱۰۰۰\, mm^{۳}$

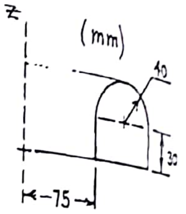
۵-۹۵. حجم V و کل مساحت سطح A توپر، که به وسیله چرخش ناحیه نشان داده شده به اندازه ۱۸۰ درجه حول محور z تولید می‌شود را تعیین کنید.



حل:

$A = \pi \bar{r} L = \pi(۷۵+۴۰)(۶۰+۸۰+۴۰\pi) = ۹۵۹۸۰\, mm^{۲}$

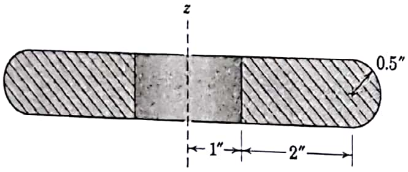
سطوح انتهایی : $A_{۲} = ۲\left(\frac{\pi(۴۰)^{۲}}{۲} + ۸۰(۳۰)\right) = ۹۸۲۷\, mm^{۲}$



مساحت کل : $A = A_{۱} + A_{۲} = ۱۰۵۸۰۷\, mm^{۲}$

$V = \pi \bar{r} A = \pi(۷۵+۴۰)\left(۳۰(۸۰) + \frac{\pi(۴۰)^{۲}}{۲}\right) = ۱/۷۷۵(۱۰^{۶})\, mm^{۳}$

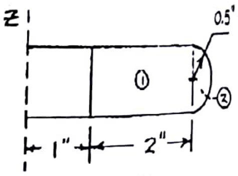
۵-۹۶. حجم V واشر بزرگ نئوپرنی (در شکل حلقه کامل به صورت برش عرضی نشان داده شده است) و مساحت سطح خارجی کل A را محاسبه کنید.



حل:

$V_{۱} = ۲\pi \bar{r}_{۱} A_{۱} = ۲\pi(۱+۱)(۲/۱) = ۲۵/۱\, in^{۳}$

$V_{۲} = ۲\pi \bar{r}_{۲} A_{۲} = ۲\pi\left[۱+۲+\frac{۴(۰/۵)}{۳\pi}\right]\left[\frac{\pi(۰/۵)^{۲}}{۲}\right] = ۷/۹۳\, in^{۳}$



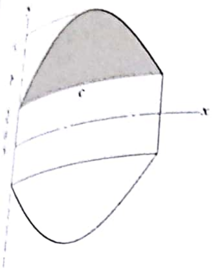
$V = V_{۱} + V_{۲} = ۳۳/۱\, in^{۳}$

$A_{۱} = ۱(۲\pi \cdot ۱) + ۲\pi(۳^{۲} - ۱^{۲}) = ۵۶/۵\, in^{۲}$

$A_{۲} = ۲\pi \bar{r}_{۲} L_{۲} = ۲\pi\left[۱+۲+\frac{۲(۰/۵)}{\pi}\right][\pi(۰/۵)] = ۳۲/۸\, in^{۲}$

$A = A_{۱} + A_{۲} = ۸۹/۳\, in^{۲}$

Scanned by CamScanner

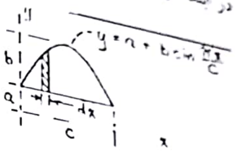


۵-۹۷. مساحت سایه‌خورده به وسیله نیم‌سیکل یک موج سینوسی و محور موج سینوسی مرزبندی شده است. حجم تولید شده به وسیله چرخش کامل حول محور x ها را تعیین کنید.

حل:

در ابتدا $\bar{y}$ را به کمک فرمول زیر به دست می‌آوریم:

$$\bar{y}=\frac{\int y_c dA}{\int dA}$$



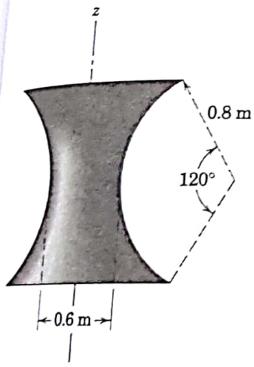
$$A=\int dA=\int_{۰}^{c} b\sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)dx=\left[-\frac{bc}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{c}\right)\right]_{۰}^{c}=\frac{۲bc}{\pi}$$

$$\int y_c dA=\int_{۰}^{c}\left[a+\frac{b}{۲}\sin\frac{\pi x}{c}\right]\left[b\sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)dx\right]=\int_{۰}^{c} ab\sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)dx+\int_{۰}^{c}\frac{b^{۲}}{۲}\sin^{۲}\left(\frac{\pi x}{c}\right)dx$$

$$=\left[-ab\left(\frac{c}{\pi}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{c}\right)\right]_{۰}^{c}+\frac{b^{۲}}{۲}\left[\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{۲\pi x}{c}\right)\right]_{۰}^{c}=\frac{۲abc}{\pi}+\frac{b^{۲}c}{۴}=bc\left[\frac{۲a}{\pi}+\frac{b}{۴}\right]$$

$$\bar{y}=\frac{bc[\frac{۲a}{\pi}+\frac{b}{۴}]}{\frac{۲bc}{\pi}}=a+\frac{b}{۸}\pi$$

$$V=۲\pi\bar{y}A=۲\pi\left(a+\frac{b\pi}{۸}\right)\left(\frac{۲bc}{\pi}\right)=۴bc\left(a+\frac{b\pi}{۸}\right)$$

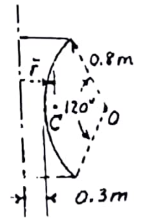


۵-۹۸. یک سطح به وسیله دوران کمان دایروی به شعاع $۰٫۸m$ تشکیل شده است و به طور کامل با زاویه ۱۲۰ درجه، حول محور z تشکیل شده است. قطر گردنه $۰٫۶m$ است. مساحت سطح خارجی تولید شده را تعیین کنید.

حل:

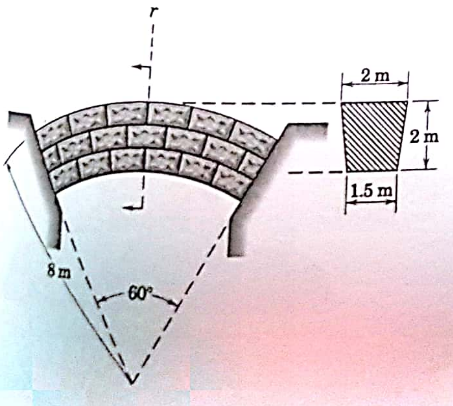
$$A=۲\pi\bar{r}L \quad , \quad L=\frac{۱۲۰}{۳۶۰}۲\pi(۰٫۸)=۱٫۶۸m$$

$$\overline{OC}=\frac{r\sin\alpha}{\alpha}=\frac{۰٫۸(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{\frac{\pi}{۳}}=۰٫۶۶۲ \ , \ \alpha=۶۰^{\circ} \ \text{یا} \ \alpha=\frac{\pi}{۳}rad$$



$$\bar{r}=(۰٫۳+۰٫۸-۰٫۶۶۲)=۰٫۴۳۸m$$

$$A=۲\pi(۰٫۴۳۸)(۱٫۶۸)=۴٫۶۲m^{۲}$$



۵-۹۹. در راستای بهبود بنای طاقی شکل سنگی، محافظی مناسب طراحی شده است که در شکل زیر نشان داده شده است، لازم است که بدانید کل وزن W می‌باشد. از نتایج مسئله ۵-۱۶ استفاده کنید و W را تعیین کنید. دانسیته بنای سنگی $۲٫۴۰ Mg/m^{۳}$ می‌باشد.

حل:

با توجه به حل مسئله ۵-۱۶ داریم:

$$\bar{r} = ۸ - \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۲(۱/۵)+۲}{۱/۵+۲}\right) = ۷/۰۵\,m$$

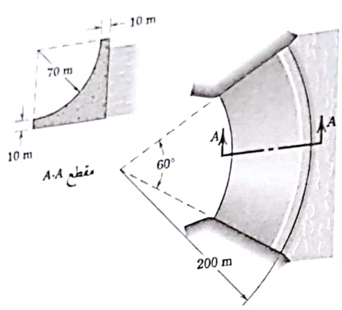
$$A = \frac{۲+۱/۵}{۲}(۲) = ۳/۵\,m^۲$$

$$\theta = \frac{\pi}{۲}$$

$$V = \theta \bar{r} A = \left(\frac{\pi}{۲}\right)(۷/۰۵)(۳/۵) = ۳۸/۸\,m^۳$$

$$W = \rho g V = ۲۴۰۰(۹/۸۱)(۳۸/۸) = ۶۰۸(۱۰^۳)\ N$$

۵-۱۰۰. جرم m بتون موردنیاز برای ساختار طاقی شکل پل نشان داده شده را محاسبه کنید. بتون دارای دانسیته $۲/۴۰\,Mg/m^۳$ است.



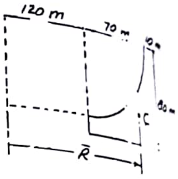
حل:

$$مربع:\ A = ۸۰^۲ = ۶۴۰۰\ m^۲$$

$$\frac{۱}{۴}\ دایره:\ A = \frac{۱}{۴}(\pi)(۷۰)^۲ = ۳۸۴۸\,m^۲$$

$$مساحت\ خالص = ۲۵۵۲\,m^۲$$

$$\bar{r}_{مربع} = ۱۲۰ + ۴۰ = ۱۶۰\,m$$



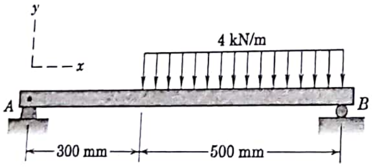
$$\bar{r}_{\frac{۱}{۴}\,دایره} = ۱۲۰ + \frac{۴(۷۰)}{۳\pi} = ۱۴۹/۷\,m$$

$$\bar{R} = \frac{\sum A\bar{r}}{\sum A} = \frac{۶۴۰۰(۱۶۰) - ۳۸۴۸(۱۴۹/۷)}{۲۵۵۲} = ۱۷۵/۵\,m$$

$$V = \theta \bar{R} A = \left(\frac{\pi}{۳}\right)(۱۷۵/۵)(۲۵۵۲) = ۴۶۹۰۱۵\,m^۳$$

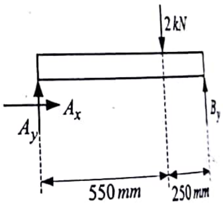
$$m = \rho V = (۲/۴۰)(۴۶۹۰۱۵) = ۱/۱۲۶(۱۰^۶)\,Mg$$

۵-۱۰۱. عکس‌العمل‌ها در نقاط A و B برای تیری که در معرض توزیع بار یکنواخت قرار دارد را تعیین کنید.



حل:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ \Rightarrow\ A_x = ۰$$

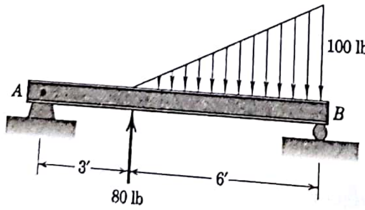


$$+\uparrow \sum M_A = ۰ \ \Rightarrow\ -۲(۱۰^۳)(۲۵۰)(۱۰^{-۳}) + B_y(۸۰۰)(۱۰^{-۳}) = ۰$$

$$\Rightarrow\ B_y = ۰/۶۲۵\,kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \ \Rightarrow\ A_y - ۲ + ۰/۶۲۵ = ۰ \ \Rightarrow\ A_y = ۱/۳۷۵\,kN$$

۵-۱۰۲. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های A و B را برای تیر بارگذاری شده محاسبه کنید.



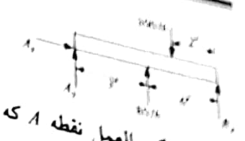
حل:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \ \Rightarrow\ A_x = ۰$$

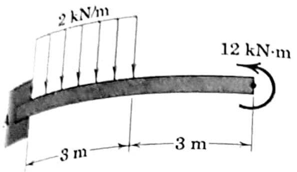
$\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow (۸۰)(۳)(۱۰^{-۲}) - (۲۰۰)(۷) + B_y(۹) = ۰$

$\Rightarrow B_y = ۲۰۶/۶۶ lb$

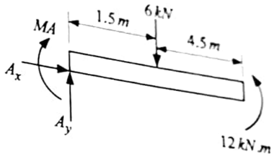
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + ۸۰ - ۲۰۰ + ۲۰۶/۶۶ = ۰ \Rightarrow A_y = ۱۳/۳۳ lb$



۵-۱۰۳. عکس‌العمل نقطه A که منجر به بارگذاری یکنواخت و کاربرد کوپل گشته است را پیدا کنید.



حل:

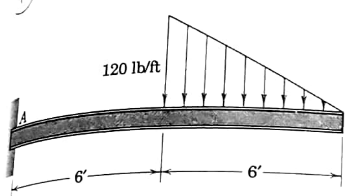


$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

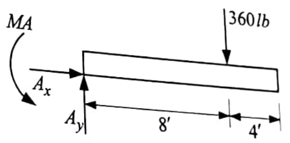
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y - ۶ = ۰ \Rightarrow A_y = ۶ kN$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \Rightarrow -M_A + ۱۲ - ۶(۱/۵) = ۰ \Rightarrow M_A = ۳ kN.m$

۵-۱۰۴. نیروی متحمل R_A و گشتاور M_A روی پایه تیر بارگذاری شده در نقطه A را محاسبه کنید؟



حل:

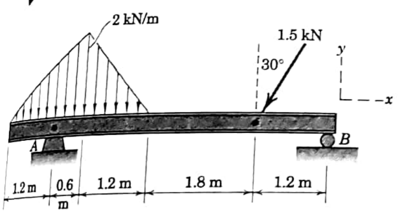


$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y - ۳۶۰ = ۰ \Rightarrow A_y = ۳۶۰ lb$

$\circlearrowright + \sum M_A = ۰ \Rightarrow M_A - (۳۶۰)(۸) = ۰ \Rightarrow M_A = ۲۸۸۰ lb.in$

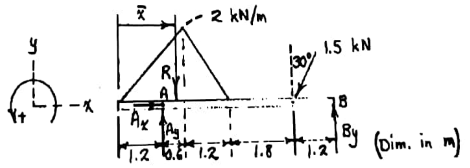
۵-۱۰۵. عکس‌العمل‌ها در نقاط A و B برای تیری که در معرض ترکیب بارهای نقطه‌ای و توزیع یافته قرار دارد را تعیین کنید.



حل:

$R = \frac{۱}{۲}(۱/۲ + ۰/۶ + ۱/۲)(۲) = ۳ kN$

$\bar{x} = \left(\frac{۱}{۳}\right)[(۱/۲ + ۰/۶) + (۱/۲ + ۰/۶ + ۱/۲)] = ۱/۶ m$

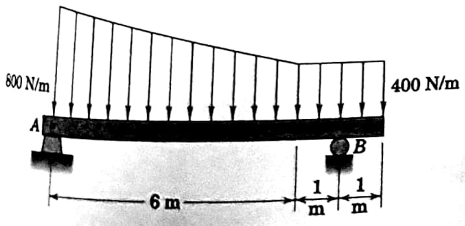


$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x - ۱/۵\sin(۳۰°) = ۰ \Rightarrow A_x = ۷۵۰ N$

$\sum M_A = ۰ \Rightarrow -۳(۱/۶ - ۱/۲) - ۱/۵\cos(۳۰°)(۳/۶) - B_y(۴/۸) = ۰ \Rightarrow B_y = ۱/۲۲۴ kN$

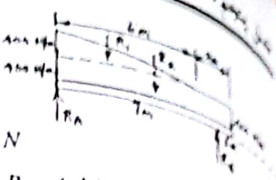
$\sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y - ۳ - ۱/۵\cos(۳۰°) + ۱/۲۲۴ = ۰ \Rightarrow A_y = ۳/۰۷ kN$

۵-۱۰۶. عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاه‌های تیری که بارگذاری شده است را تعیین کنید.



حل:

$R_۱ = \frac{۱}{۲}(۴۰۰)(۶) = ۱۲۰۰ N \; @ \; \bar{x}_۱ = \frac{۱}{۳}(۶) = ۲ m$



$R_2 = ۲۰۰(۸) = ۲۲۰۰N \ @ \ \bar{x}_2 = \frac{۱}{۲}(۸) = ۲m$

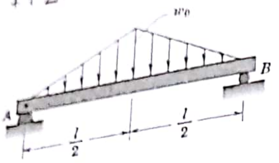
$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \Rightarrow R_B(۷) - ۱۲۰۰(۲) - ۲۲۰۰(۲) = ۰$

$\Rightarrow R_B = ۲۱۷۰N$

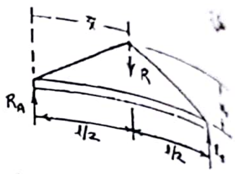
$+\uparrow \sum F = ۰ \Rightarrow R_A = -۱۲۰۰ - ۲۲۰۰ + ۲۱۷۰ = ۰ \Rightarrow R_A = ۲۲۳۰N$

۵-۱۰۷. عکس‌العمل‌ها در نقاط A و B برای تیر بارگذاری شده که در شکل نشان داده شده است را تعیین کنید.

حل:



$R = ۲\frac{۱}{۲}(w_0)\left(\frac{\ell}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}w_0\ell \ @ \ \bar{x} = \frac{\ell}{۲}$

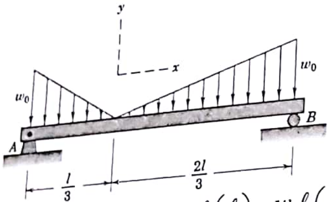


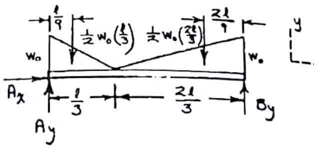
$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \Rightarrow R_B(\ell) - \frac{۱}{۲}w_0\ell\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \quad , \quad R_B = \frac{۱}{۴}w_0\ell$

$+\uparrow \sum F = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}w_0\ell + R_A = ۰ \quad , \quad R_A = \frac{۱}{۴}w_0\ell$

۵-۱۰۸. عکس‌العمل‌ها در نقاط A و B برای تیر بارگذاری شده را تعیین کنید.

حل:



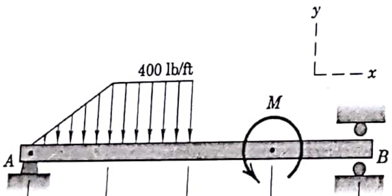


$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \ : \ -\frac{w_0\ell}{۶}\left(\frac{\ell}{۹}\right) - \frac{w_0\ell}{۳}\left(\ell - \frac{۲\ell}{۹}\right) + B_y\ell = ۰ \quad , \quad B_y = \frac{۵}{۱۸}w_0\ell$

$\sum F_y = ۰ \ : \ A_y + \frac{۵}{۱۸}w_0\ell - \frac{w_0\ell}{۶} - \frac{w_0\ell}{۳} = ۰ \quad , \quad A_y = \frac{۲}{۹}w_0\ell$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

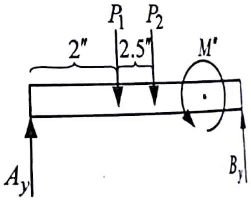
۵-۱۰۹. تیری که در معرض بار توزیع شده و گشتاور قرار دارد، نشان داده شده است. اگر M به آرامی از صفر شروع به افزایش کند، به ازای چه مقداری از M_0 تماس تیر در B از سطح پایینی به سطح بالایی تغییر خواهد کرد.



حل:

$P_1 = \frac{۱}{۲}(۴۰۰)(۳) = ۶۰۰lb$

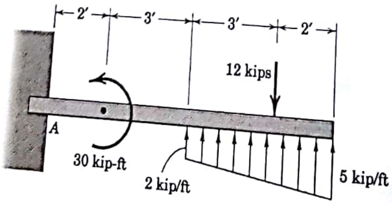
$P_2 = (۴۰۰)(۳) = ۱۲۰۰lb$



$B_y = ۰ \Rightarrow$ تکیه‌گاه B از سطح پایینی به سطح بالایی منتقل می‌شود

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \Rightarrow -(۶۰۰)(۲) - (۱۲۰۰)(۴/۵) + M = ۰ \Rightarrow M = ۶۶۰۰lb.ft$

۵-۱۱۰. عکس‌العمل‌های گشتاور و نیرو در نقطه A برای تیری که تحت بارگذاری نشان داده شده قرار دارد را تعیین کنید.



حل:

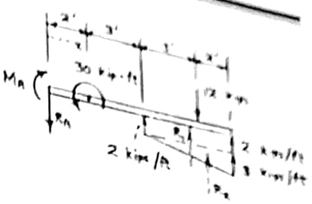
$R_1 = ۲(۵) = ۱۰\,kips \quad @ \quad \bar{x}_1 = ۷/۵'$

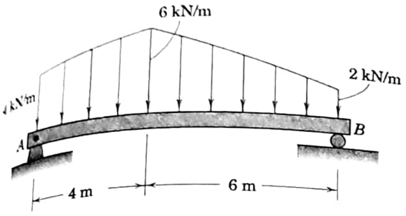
$R_2 = \frac{۱}{۲}(۳)(۵) = ۷/۵\,kips \quad @ \quad \bar{x}_2 = ۸/۳۳'$

$\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \quad \Rightarrow \quad M_A - ۳۰ + ۱۲(۸) - ۱۰(۷/۵) - ۷/۵(۸/۳۳) = ۰$

$\Rightarrow \quad M_A = ۷۱/۵\,kip - ft$

$+\uparrow \sum F = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۰ + ۷/۵ - ۱۲ - R_A = ۰ \quad \Rightarrow \quad R_A = ۵/۵\,kips$





۵-۱۱۱. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه را در نقاط A و B برای تیری که در معرض توزیع دو بار که به صورت خطی تغییر پیدا می‌کنند را محاسبه کنید.

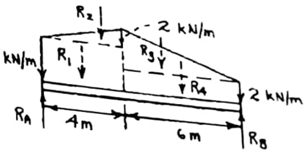
حل:

$R_1 = ۴(۴) = ۱۶\,kN \quad , \quad R_2 = \frac{۱}{۲}(۲)(۴) = ۴\,kN$

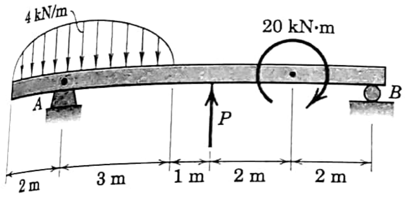
$R_3 = \frac{۱}{۲}(۴)(۶) = ۱۲\,kN \quad , \quad R_4 = ۲(۶) = ۱۲\,kN$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \; : \; ۱۶(۲) + ۴\left(\frac{۲}{۳}۴\right) + ۱۲\left(۴ + \frac{۱}{۳}۶\right) + ۱۲(۴+۳) - ۱۰R_B = ۰$

$R_B = ۱۹/۸۷\,kN$

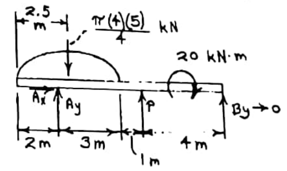


$+\uparrow \sum F = ۰ \; : \; R_A + ۱۹/۸۷ - (۱۶ + ۴ + ۱۲ + ۱۲) = ۰ \quad , \quad R_A = ۲۴/۱\,kN$

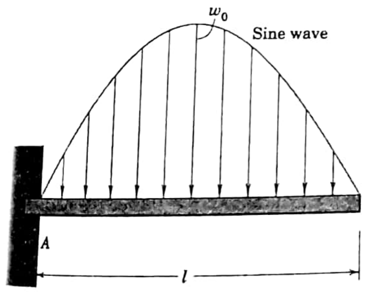


۵-۱۱۲. در شکل زیر بارگذاری به صورت نقطه‌ای و بیضوی برروی تیر توزیع یافته است. برای چه مقداری از نیروی P عکس‌العمل در نقطه B به سمت صفر پیش خواهد رفت؟

حل:



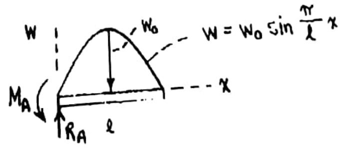
$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad -۵\pi(۰/۵) + P(۴) - ۲۰ = ۰ \quad , \quad P = ۶/۹۶\,kN$



۵-۱۱۳. عکس‌العمل‌های گشتاور و نیرو را در تکیه‌گاه A تیر ساخته شده که در معرض توزیع بار به صورت موج سینوسی قرار دارد را تعیین کنید.

حل:

$$R = \int w\,dx = \int_۰^L w_۰ \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx = \left[-w_۰\left(\frac{L}{\pi}\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]_۰^L = \frac{۲w_۰ L}{\pi}$$



با بررسی : $\bar{x} = \frac{L}{۲}$

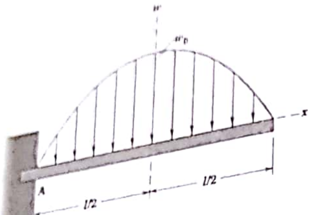
$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad \Rightarrow \quad M_A - \left(\frac{۲w_۰ L}{\pi}\right)\left(\frac{L}{۲}\right) = ۰ \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{w_۰ L^۲}{\pi}$

$+\uparrow \sum F = ۰ \quad \Rightarrow \quad R_A - \frac{۲w_۰ L}{\pi} = ۰ \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{۲w_۰ L}{\pi}$

Scanned by CamScanner

۵-۱۱۴. تیر یک سرگیردار در معرض توزیع سهموی بارگذاری متقارن در وسط تیر قرار دارد. نیروی R_A و گشتاور M_A که روی تیر در نقطه A عمل می‌کند را تعیین کنید.

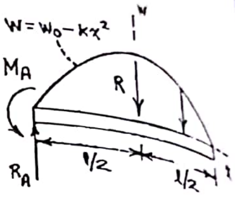
حل:



$$\begin{cases} x=\frac{L}{2} \\ w=0 \end{cases} \xrightarrow{w=w_0-kx^2} 0=w_0-k\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow k=\frac{4w_0}{L^2} \Rightarrow w=w_0\left(1-\frac{4}{L^2}x^2\right)$$

با بررسی : $\bar{x}=0$

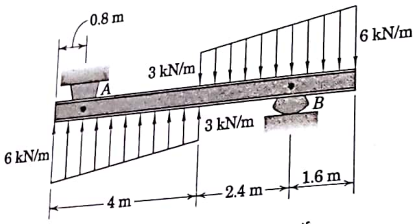


$$R=\int w\,dx=2\int_0^{\frac{L}{2}} w_0\left(1-\frac{4}{L^2}x^2\right)dx=2w_0\left[x-\frac{4}{3L^2}x^3\right]_0^{\frac{L}{2}}=\frac{2}{3}w_0L$$

$$+\uparrow \sum F=0 \Rightarrow R_A-\frac{2}{3}w_0L=0 \Rightarrow R_A=\frac{2}{3}w_0L$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A=0 \Rightarrow M_A-\frac{2}{3}w_0L\left(\frac{L}{2}\right)=0 \Rightarrow M_A=\frac{1}{3}w_0L^2$$

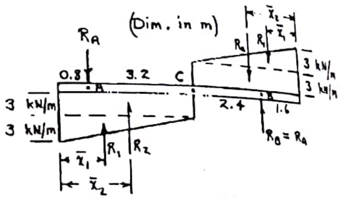
۵-۱۱۵. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه را در نقاط A و B برای تیری که در معرض دو بار خطی توزیع یافته است را محاسبه کنید.



حل:

$$R_1=\frac{1}{2}(4)(3)=6\,kN \quad , \quad \bar{x}_1=\frac{1}{3}(4)=\frac{4}{3}m$$

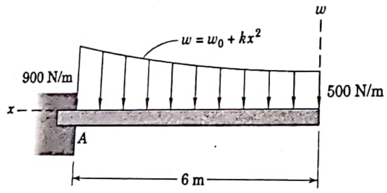
$$R_2=4(3)=12\,kN \quad , \quad \bar{x}_2=\frac{4}{2}=2m$$



$$\circlearrowleft + \sum M_C=0 \;:\; R_A(3.2+2.4)-12(2+2)-6\left(2\cdot\left(4-\frac{4}{3}\right)\right)=0$$

$$R_A=14.29\;kN \quad , \quad R_B=14.29\,kN$$

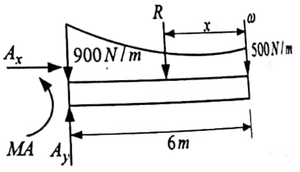
۵-۱۱۶. یک تیر یکسر گیردار، بار متغیر نشان داده شده را تحمل می‌کند. نیروی عکس‌العمل R_A و گشتاور M_A را در نقطه A محاسبه کنید.



حل:

$$at\;\; x=0 \Rightarrow \omega=\omega_0=500\,N$$

$$at\;\; x=6m \Rightarrow \omega=900\,N$$



$$\omega=\omega_0+kx^2 \Rightarrow 900=500+k(6)^2 \Rightarrow k=11.11$$

$$\omega=500+11.11x^2$$

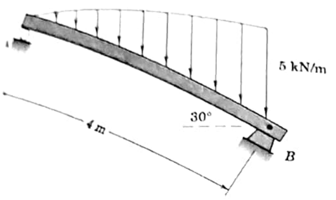
$$R=\int_0^6 \omega\,dx=\int_0^6(500+11.11x^2)dx=\left(500x+\frac{11.11}{3}x^3\right)\Big|_0^6 \Rightarrow R=3800\,N$$

$$\bar{X}=\frac{\int_0^6 x\omega\,dx}{R}=\frac{\int_0^6(500x+11.11x^3)dx}{3800}=\frac{\left(250x^2+\frac{11.11}{4}x^4\right)_0^6}{3800} \Rightarrow \bar{X}=3.315m$$

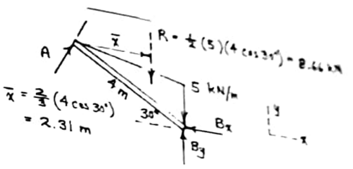
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y - ۲۸۰۰ = ۰ \Rightarrow A_y = ۲۸۰۰N$

$\sum M_A = ۰ \Rightarrow M_A - ۲۸۰۰\times(۶-۳/۲۱۵) = ۰ \Rightarrow M_A = ۱۰/۲۰\, kN.m$

۵-۱۱۷. عکس‌العمل‌ها را در نقاط A و B تیر مورب که در معرض توزیع بار عمودی نشان داده شده، قرار دارد را تعیین کنید. مقدار توزیع بار در انتهای راست تیر ۵ کیلونیوتن بر متر افقی است.



حل:



$R=\frac{۱}{۲}(۵)(۴\cos ۳۰^\circ) = ۸/۶۶\, kN$

$\bar{x}=\frac{۲}{۳}(۴\cos ۳۰^\circ) = ۲/۳۱\, m$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A\sin ۳۰^\circ - B_x = ۰$ (I)

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow A\cos ۳۰^\circ + B_y - ۸/۶۶ = ۰$ (II)

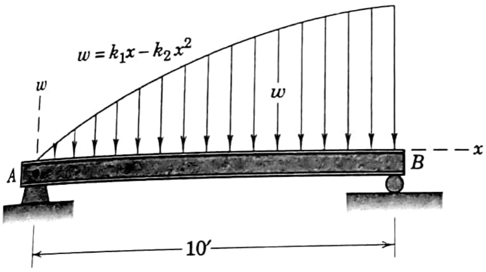
$\sum M_B = ۰ \Rightarrow ۸/۶۶\left(\frac{۱}{۳}(۴)\cos ۳۰^\circ\right) - A(۴) = ۰$ (III)

از حل همزمان سه معادله بالا خواهیم داشت:

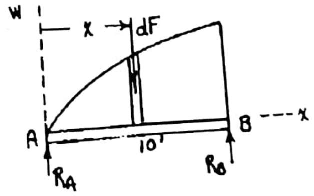
$A=۲/۵kN \quad ; \quad B_x = ۱/۲۵kN \quad ; \quad B_y = ۶/۵۰\, kN$

$B=\sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = ۶/۶۱kN$

۵-۱۱۸. در طول تیر برحسب فوت مقدار بار وارده تغییر پیدا می‌کند که در زیر نشان داده شده است. برای $x=۱۰\,ft$، واحد بار $w=۳۰۰lb/ft$ است. در $x=۰$، بار با نرخ $۵۰lb/ft$ در هر فوت در حال افزایش است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه در نقاط A و B را محاسبه کنید.



حل:



$dF = w\,dx$

$w=k_۱x - k_۲x^۲$

$x=۰ \;:\; \frac{dw}{dx} = k_۱ = ۵۰\frac{lb}{ft^۲}$

$x=۱۰' \;,\; w=۵۰(۱۰) - k_۲(۱۰)^۲ = ۳۰۰ \;,\; k_۲ = ۲\frac{lb}{ft^۳}$

بنابراین $w=۵۰x-۲x^۲ \;,\; dF=(۵۰x-۲x^۲)dx$

$\sum M_A = ۰ \;:\; \int x\,dF - ۱۰R_B = ۰$

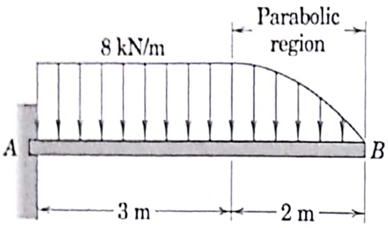
$$\int_{\circ}^{\text{۱۰}} x(\text{۵۰}x-\text{۲}x^{\text{۲}})dx=\frac{\text{۷}}{\text{۶}}\text{۱۰}^{\text{۴}}=\text{۱۰}R_B$$

$$R_B=\text{۱۱۶۷}\,lb$$

$$\sum F=\circ \quad : \quad R_A-\int dF+\text{۱۱۶۷}=\circ$$

$$R_A-\int_{\circ}^{\text{۱۰}}(\text{۵۰}x-\text{۲}x^{\text{۲}})\,dx+\text{۱۱۶۷}=\circ$$

$$R_A-\text{۱۸۳۳}+\text{۱۱۶۷}=\circ \quad , \quad R_A=\text{۶۶۷}\,lb$$



۵-۱۱۹. عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاه برای تیری که به صورت ترکیب بارهای سهموی و یکنواخت توزیع یافته است، را تعیین کنید.

حل:

$$R_{\text{۱}}=\text{۸}(\text{۳})=\text{۲۴}\,kN$$

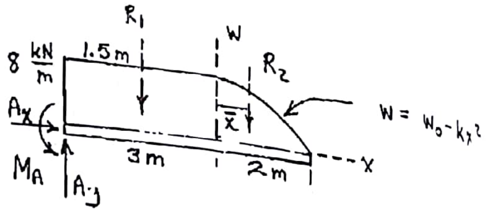
برای تعیین معادلهٔ منحنی قسمت سهموی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=\circ \\ w=\text{۸}\,kN/m \end{cases} \xrightarrow{w=w_{\circ}-kx^{\text{۲}}} \text{۸}=w_{\circ}=\text{۸}\frac{kN}{m}$$

$$\begin{cases} x=\text{۲} \\ w=\circ \end{cases} \xrightarrow{w=\text{۸}-kx^{\text{۲}}} \circ=\text{۸}-k(\text{۲})^{\text{۲}} \Rightarrow k=\text{۲}\frac{kN}{m^{\text{۳}}} \Rightarrow w=\text{۸}-\text{۲}x^{\text{۲}}$$

$$R_{\text{۲}}=\int w\,dx=\int_{\circ}^{\text{۲}}(\text{۸}-\text{۲}x^{\text{۲}})\,dx=\text{۱۰/۶۷}\,kN$$

$$\bar{x}=\frac{\int xw\,dx}{R}=\frac{\int_{\circ}^{\text{۲}} x(\text{۸}-\text{۲}x^{\text{۲}})\,dx}{\text{۱۰/۶۷}}=\circ\text{/۷۵}\,m$$

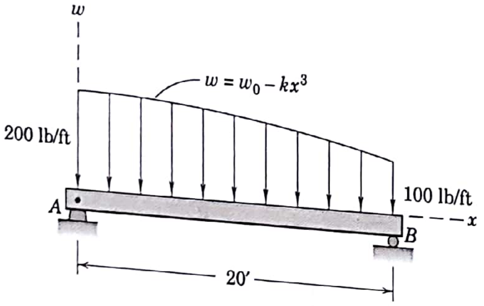


برای تعادل داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=\circ \Rightarrow A_x=\circ$$

$$+\uparrow\sum F_y=\circ \Rightarrow A_y=-\text{۲۴}-\text{۱۰/۶۷}=\circ \Rightarrow A_y=\text{۳۴/۶۷}\,kN$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A=\circ \Rightarrow M_A-\text{۲۴}(\text{۱/۵})-\text{۱۰/۶۷}(\text{۳/۷۵})=\circ \Rightarrow M_A=\text{۷۶}\,kN.m$$



۵-۱۲۰. یک تیری با توزیع بار بــه صــورت متغیــر در زیــر نمایش داده شده است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گـاه در A و B را محاسبه کنید.

حل:

$$@\ x=\circ \Rightarrow w=w_{\circ}=\text{۲۰۰}\frac{lb}{ft}$$

$$@\ x=\text{۲۰}' \Rightarrow w=\text{۲۰۰}-k(\text{۲۰})^{\text{۳}}=\text{۱۰۰} \Rightarrow k=\frac{\text{۱}}{\text{۸۰}}\left(\frac{lb}{ft^{\text{۴}}}\right)$$

$$\Rightarrow w=\text{۲۰۰}-\frac{x^{\text{۳}}}{\text{۸۰}}\left(\frac{lb}{ft}\right)$$

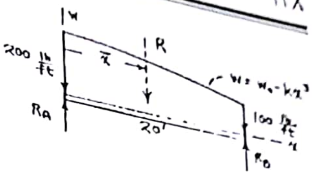
Scanned by CamScanner

$$R=\int w dx=\int_0^{200}\left(200-\frac{x^2}{80}\right)dx=3500 lb$$

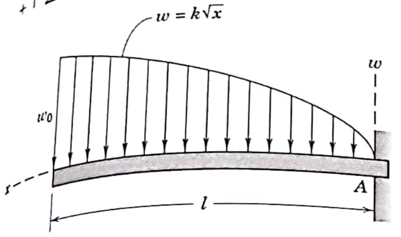
$$\bar{x}=\frac{\int xwdx}{R}=\frac{\int_0^{20}(200-\frac{x^2}{80})dx}{3500}=9.14 ft$$

$$\curvearrowleft+\sum M_A=0 \Rightarrow 20R_B-3500(9.14)=0 \Rightarrow R_B=1600 lb$$

$$+\uparrow\sum F=0 \Rightarrow R_A+1600-3500=0 \Rightarrow R_A=1900 lb$$



۵-۱۲۱. عکس‌العمل‌های گشتاور و نیرو در تکیه‌گاه A تیر یک‌سرگیردار که در معرض توزیع بار نشان داده شده قرار دارند، را تعیین کنید.

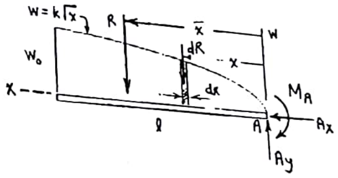


حل:

$W=k\sqrt{x}$ @ انتهای چپ : $w_0=k\sqrt{\ell}$, $k=\frac{w_0}{\sqrt{\ell}}$

بنابراین $W=\frac{w_0}{\sqrt{\ell}}\sqrt{x}$

$$R=\int dR=\int w dz=\int_0^{\ell}\frac{w_0}{\sqrt{\ell}}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}w_0\ell$$



$$\bar{x}=\frac{\int xwdx}{\int wdx}=\frac{\int_0^{\ell}x\frac{w}{\sqrt{\ell}}\sqrt{x}\,dx}{\frac{2}{3}w_0\ell}=\frac{3}{5}\ell$$

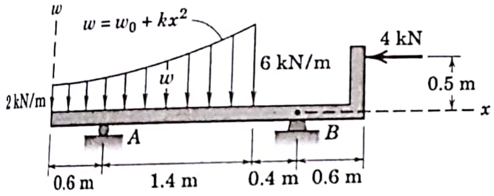
$$+\uparrow\sum F=0 \Rightarrow A_y-\frac{2}{3}w_0\ell=0 \Rightarrow A_y=\frac{2}{3}w_0\ell$$

$$\curvearrowleft+\sum M_A=0 \;:\; \frac{2}{3}w_0\ell\left(\frac{3}{5}\ell\right)-M_A=0$$

$$M_A=\frac{2}{5}w_0\ell^2$$

$$\xrightarrow{+}\sum F=0 \Rightarrow A_x=0$$

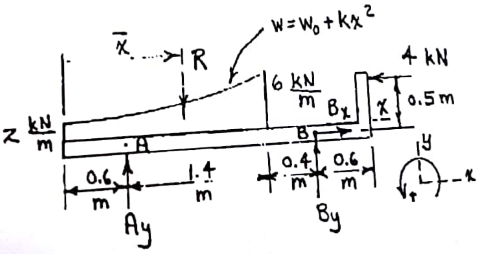
۵-۱۲۲. عکس‌العمل‌های A و B را برای تیری که در معرض بارهای توزیع‌یافته و متمرکز قرار دارد تعیین کنید.



حل:

$$@\ x=0 \Rightarrow w=w_0=2\frac{kN}{m}$$

$$@\ x=2 \Rightarrow w=2+k(2)^2=6 \Rightarrow k=1\frac{kN}{m^3}$$



$$\Rightarrow w=2+x^2$$

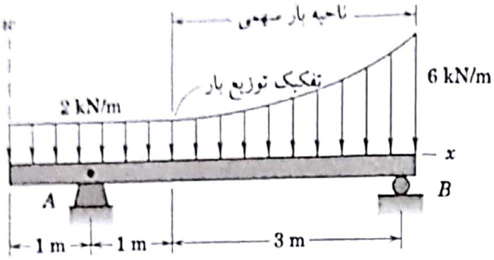
$$R=\int wdx=\int_0^2(2+x^2)dx=6.67 kN$$

$$\bar{x}=\frac{\int xwdx}{R}=\frac{\int_0^{20}(2+x^2)dx}{6.67}=1.2 m$$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x - ۲ = ۰ \Rightarrow B_x = ۲kN$

$\circlearrowleft + \sum M_B = ۰ \Rightarrow ۲(۰/۵) + ۶/۶۷(۲/۲ - ۱/۲) - A_y(۱/۸) = ۰ \Rightarrow A_y = ۵/۵۶kN$

$\sum F_y = ۵/۵۶ + B_y - ۶/۶۷ = ۰ \Rightarrow B_y = ۱/۱۱۱kN$

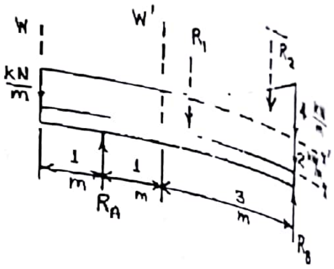


۱۲۳-۵. عکس‌العمل‌ها را در تکیه‌گاه‌های تیری که توزیع بار به صورت ترکیبی از بارهای سهموی و یکنواخت عمل می‌کند را تعیین کنید.

$w' = kx'^{۲}$

حل:

$@\ x' = ۲m \Rightarrow ۴ = k(۳)^{۲} \Rightarrow k = \frac{۷}{۹}\frac{N}{m^{۳}}$



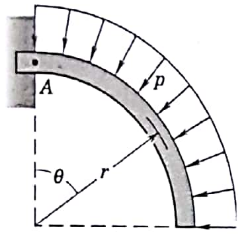
$\Rightarrow w' = \left(\frac{۴}{۹}\right)x'^{۲}$

$\bar{x}'_{۲} = \frac{\int x'w'\,dx'}{R_{۲}} = \frac{\int_{۰}^{۳}(\frac{۴}{۹})x'^{۳}dx'}{R_{۲}} = ۲/۲۵m \Rightarrow \bar{x}'_{۲} = ۴/۲۵m$

$R_{۱} = ۲(۵) = ۱۰kN\ @\ \bar{x}_{۱} = ۲/۲۵m$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \Rightarrow ۴R_B - ۱۰(۱/۵) - ۴(۳/۲۵) = ۰ \Rightarrow R_B = ۷kN$

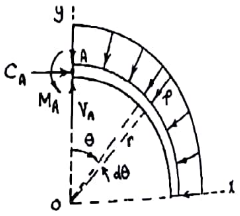
$+\uparrow \sum F = ۰ \Rightarrow ۷ + R_A - ۴ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow R_A = ۷kN$



۱۲۴-۵. برروی سطح تیر یکسرگیردار ربع دایره‌ای توزیع فشار یکنواخت نشان داده شده است. فشار برحسب ترم‌های نیروی P بر واحد طول کمان محیطی است. عکس‌العمل‌های تیر را روی تکیه‌گاه A در ترم فشار C_A، برش V_A و گشتاور خمشی M_A را تعیین کنید.

حل:

$\sum F_x = ۰ \ :\ C_A - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} p\,r\,d\theta \sin\theta = ۰ \Rightarrow C_A = pr$



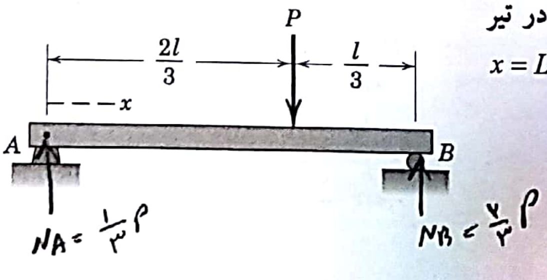
$\sum F_y = ۰ \ :\ V_A - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} p\,r\,d\theta \cos\theta = ۰ \Rightarrow V_A = pr$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \ :\ M_A - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} pr\,d\theta(r\sin\theta) = ۰ \Rightarrow M_A = pr^{۲}$

$(\circlearrowleft \sum M_{۰} = ۰ \ :\ M_A - C_A r = ۰ \ ,\ M_A = pr^{۲})$

۱۲۵-۵. توزیع به وجود آمده گشتاور خمشی و نیروی برشی در تیر به وسیله بار متمرکز را تعیین کنید. برش و گشتاور در $x = L/۲$ چقدر می‌شود؟

حل:



Scanned by CamScanner

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad R_B \ell - p\frac{۲\ell}{۳} = ۰ \quad , \quad R_B = \frac{۲}{۳}p$

$+\uparrow \sum F = ۰ \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{۱}{۳}p$

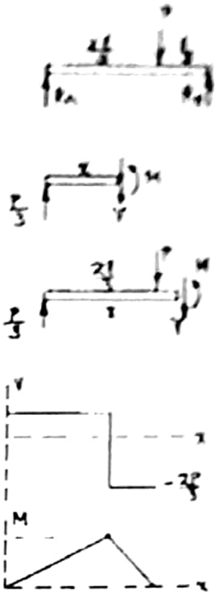
$۰ < x < \frac{۲\ell}{۳} \quad : \quad +\uparrow \sum F = ۰ \quad \Rightarrow \quad V = \frac{p}{۳}$

$\sum M = ۰ \quad \Rightarrow \quad M = \frac{p}{۳}x$

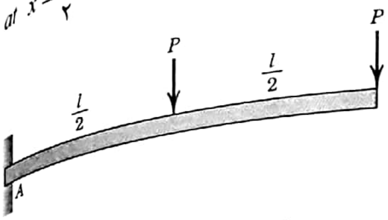
$+\uparrow \sum F = ۰ : \frac{p}{۳} - p - V = ۰ \quad , \quad V = -\frac{۲p}{۳}$

$\circlearrowleft + \sum M = ۰ \quad : \quad M + p\left(x - \frac{۲\ell}{۳}\right) - \frac{p}{۳}x = ۰ \quad , \quad M = \frac{۲p}{۳}(\ell - x)$

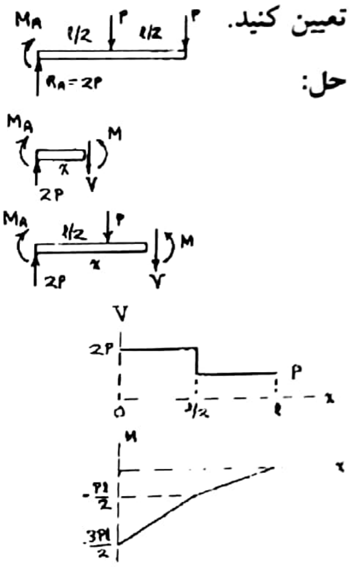
$at\ x = \frac{\ell}{۲} \quad , \quad V = \frac{p}{۳} \quad , \quad M = \frac{p}{۳}\left(\frac{\ell}{۲}\right) = \frac{p\ell}{۶}$



۵-۱۲۶. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر یکسرگیردار بارگذاری شده رسم نمایید. مقدار گشتاور خمشی در وسط تیر را تعیین کنید.



حل:



$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad M_A + p\frac{۱}{۲} + p\ell = ۰ \quad , \quad M_A = -\frac{۳}{۲}p\ell$

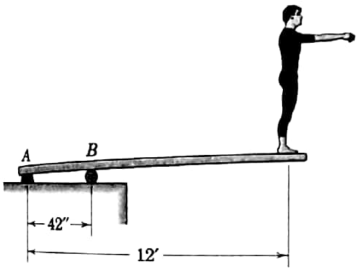
$۰ < x < \frac{\ell}{۲} \quad : \quad +\uparrow \sum F = ۰ \quad \Rightarrow \quad V = ۲p$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad \frac{۳}{۲}p + M - ۲p_x = ۰ \quad , \quad M = ۲p_x - \frac{۳}{۲}\ell$

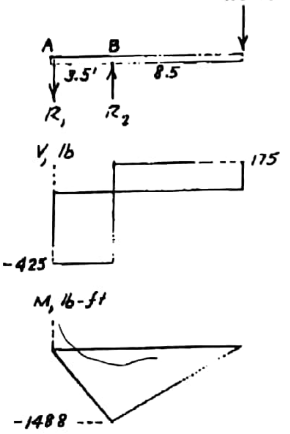
$\frac{\ell}{۲} < x < \ell \quad : \quad +\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad ۲p - p - V = ۰ \quad , \quad V = p$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad \frac{۳}{۲}p\ell - ۲\frac{\ell}{۲} - p_x + M = ۰ \quad , \quad M = -p(\ell - x)$

۵-۱۲۷. دیاگرام‌های گشتاور و برش برای تخته شیرجه شنا، که تکیه‌گاه‌ها مرد ۱۷۵ پوندی را برای شیرجه به حالت تعادل نگه می‌دارد را رسم کنید.



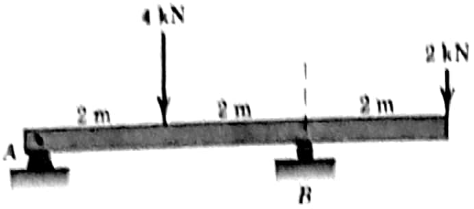
حل:



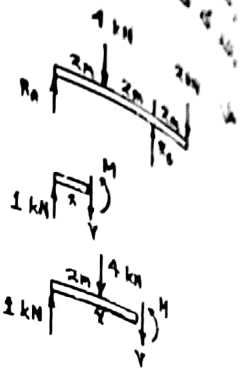
$\sum M_A = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۷۵(۱۲) = R_۲(۳/۵) \quad \Rightarrow \quad R_۲ = ۶۰۰ lb$

$\Rightarrow \quad R_۱ = ۴۲/۵ lb$

$M_B = -۱۴۸۸ lb - ft$



۱۲۸-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده رسم کنید و تعیین کنید مقدار فاصله d از سمت راست A کجا گشتاور در آنجا صفر شود.



$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad ۴(۲) + ۲(۶) - ۴R_B = ۰ \qquad , \qquad R_B = ۵\,kN$

$+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad R_A + ۵ - ۶ = ۰$

$R_A = ۱\,kN$

$۰ < x < ۲m \quad : \quad V = ۱kN \quad , \quad M = ۱\,x$

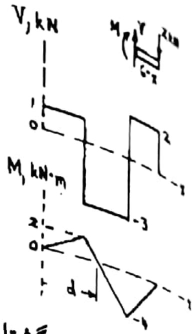
$۲ < x < ۴m \quad : \quad V = -۳\,kN$

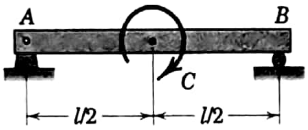
$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad -۸ + ۳x + M = ۰ \qquad , \qquad M = ۸ - ۳x$

$۴ < x < ۶m \quad : \quad V = ۲kN$

$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \quad : \quad -M - ۲(۶ - x) = ۰ \qquad , \qquad M = -۲(۶ - x)$

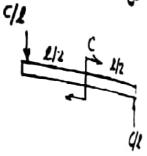
$d = ۲ + \frac{۱}{۳}(۲) = ۲/۶۷\,m$





۱۲۹-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده در مرکز آن به وسیله کوپل C رسم کنید. مقدار نیروی برشی در مرکز تیر را تعیین کنید.

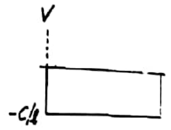
حل:



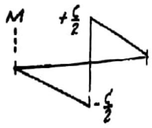
$$\begin{cases} \circlearrowleft + \sum M_A = ۰ \;\Rightarrow\; R_B L = C \;\Rightarrow\; R_B = \dfrac{C}{L} \\ +\uparrow \sum F = ۰ \;\Rightarrow\; R_A = \dfrac{C}{L} \end{cases}$$

در محدوده $\frac{L}{۲} > x > ۰$ داریم:

$$\begin{cases} \sum F = ۰ \;\Rightarrow\; V = -\dfrac{C}{L} \\ \sum M = ۰ \;\Rightarrow\; M = \dfrac{C}{L}x \end{cases}$$



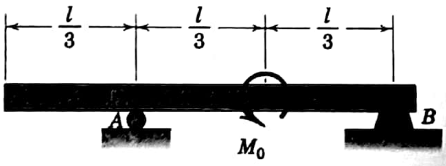
در محدوده $\frac{L}{۲} < x < L$ داریم:



$$\begin{cases} \sum F = ۰ \;\Rightarrow\; V = -\dfrac{C}{L} \\ \sum M = ۰ \;\Rightarrow\; M + \dfrac{C}{L}x - C = ۰ \;\Rightarrow\; M = -\dfrac{C}{L}x + C \end{cases}$$

۱۳۰-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده رسم کنید. گشتاور و برش در وسط تیرچه مقداری می‌باشند؟

حل:



$R_A = R_B$ (بارگذاری به صورت کوپل)

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \quad : \quad M_0 - R_B\left(\frac{2\ell}{3}\right) = 0 \quad , \quad R_B = \frac{3M_0}{2\ell}$

$x < \frac{\ell}{3} \; : \; V = M = 0$

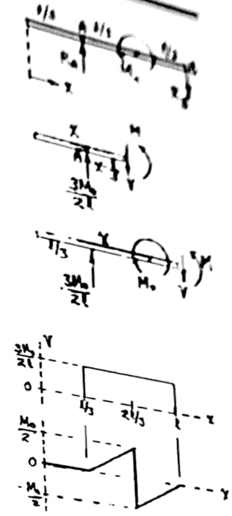
$\frac{\ell}{3} < x < \frac{2\ell}{3} \; : \quad + \uparrow \sum F = 0 \;\Rightarrow\; V = \frac{3M_0}{2\ell}$

$\circlearrowleft + \sum M = 0 \quad : \quad M - \frac{3M_0}{2\ell}\left(x - \frac{\ell}{3}\right) = 0 \quad , \quad M = \frac{3M_0}{2\ell}\left(x - \frac{\ell}{3}\right)$

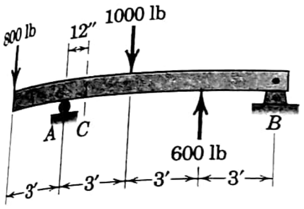
$\frac{2\ell}{3} < x < \ell \; : \quad + \uparrow \sum F = 0 \;\Rightarrow\; V = \frac{3M_0}{2\ell}$

$\circlearrowleft + \sum M = 0 \quad : \quad M + M_0 - \frac{3M_0}{2\ell}\left(x - \frac{\ell}{3}\right) = 0 \quad , \quad M = \frac{3M_0}{2\ell}\left(\frac{x}{\ell} - 1\right)$

$at \; x = \frac{\ell}{2} \; : \; V = \frac{3M_0}{2\ell} \quad , \quad M = \frac{3M_0}{2\ell}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right) = \frac{M_0}{4}$



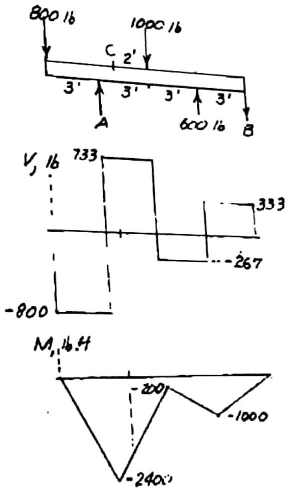
۵-۱۳۱. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر نشان داده شده رسم کنید و گشتاور خمشی M در مقطع C را پیدا کنید.



حل:

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow 800(3) + 600(6) - 1000(3) - B(9) = 0 \Rightarrow B = 333 lb$

$+ \uparrow \sum F = 0 \;\Rightarrow\; A + 600 - 1000 - 800 - 333 = 0 \;\Rightarrow\; A = 1533 lb$



$@\, 0 < x < 3' \;\Rightarrow\; \begin{cases} V = -800 lb \\ M = -800x \end{cases}$

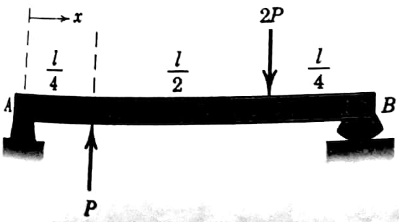
$@\, 3' < x < 6' \;\Rightarrow\; \begin{cases} V = 733 lb \\ M = 733x - 4599 \end{cases}$

$@\, 6' < x < 9' \;\Rightarrow\; \begin{cases} V = -267 lb \\ M = -267x + 1401 \end{cases}$

$@\, 9' < x < 12' \;\Rightarrow\; \begin{cases} V = 33 lb \\ M = 33x - 3996 \end{cases}$

$@\, x = 4' \;\Rightarrow\; M_C = 733(4) - 4599 = -1677 \; lb - ft$

۵-۱۳۲. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیری که در معرض دو بار نقطه‌ای قرار دارد رسم کنید. حداکثر گشتاور خمشی M_{max} و موقعیت آن را تعیین کنید.



حل:

$\sum M_A = 0 \quad : \; p\left(\frac{\ell}{4}\right) - 2p\left(\frac{3\ell}{4}\right) + R_B(\ell) = 0 \quad , \quad R_B = \frac{5p}{4}$

$$\sum F_y = ۰ \;:\; -R_A + p - ۲p + \frac{۵}{۴}p = ۰ \quad , \quad R_A = \frac{p}{۴}$$

$$x < \frac{\ell}{۴} \;:\; \sum F_y = ۰ \;:\; -\frac{p}{۴} - V = ۰ \quad , \quad V = -\frac{p}{۴}$$

$$\sum M = ۰ \;:\; M + \frac{p}{۴}x = ۰ \quad , \quad M = -\frac{p}{۴}x$$

$$\frac{\ell}{۴} < x < \frac{۳\ell}{۴} \;:\; \sum F_y = ۰ \;:\; -\frac{p}{۴} + p - V = ۰ \quad , \quad V = \frac{۳p}{۴}$$

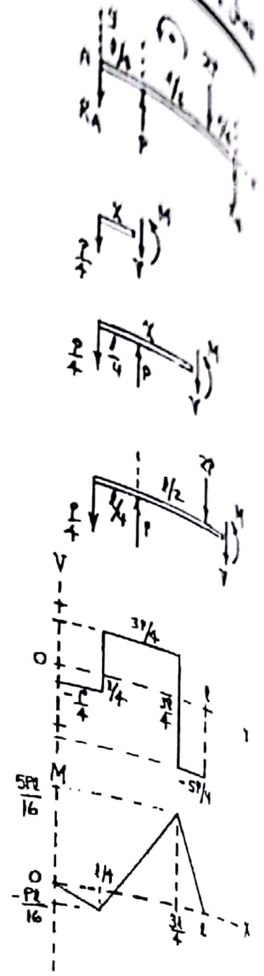
$$\sum M = ۰ \;:\; M - p\left(x - \frac{\ell}{۴}\right) + \frac{p}{۴}x = ۰ \quad , \quad M = \frac{p}{۴}(۳x - \ell)$$

$$\frac{۳\ell}{۴} < x < \ell \;:\; \sum F_y = ۰ \;:\; -\frac{p}{۴} + p - ۲p - V = ۰ \quad , \quad V = -\frac{۵p}{۴}$$

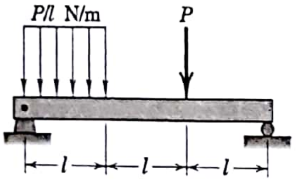
$$\sum M = ۰ \;:\; M + ۲p\left(x - \frac{۳\ell}{۴}\right) - p\left(x - \frac{\ell}{۴}\right) + \frac{p}{۴}x = ۰ \quad , \quad M = \frac{۵}{۴}p(\ell - x)$$

$$\left(Note: V_{\max} = \frac{۳p}{۴} \quad or \quad \frac{\ell}{۴} < x < \frac{۳\ell}{۴}\right)$$

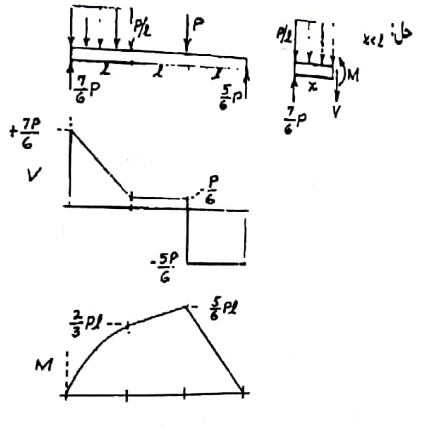
$$M_{\max} = \frac{۵p\ell}{۱۶} \quad @ \quad x = \frac{۳\ell}{۴}$$



۵-۱۳۳. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده رسم کنید و حداکثر مقدار گشتاور خمشی M را پیدا کنید.



حل:



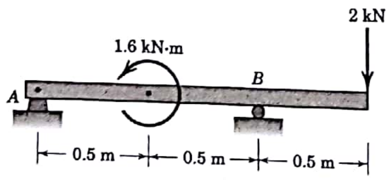
$$\sum F = ۰ \Rightarrow -V - \frac{P}{L}x + \frac{۷}{۶}P = ۰ \Rightarrow V = P\left(\frac{۷}{۶} - \frac{x}{L}\right)$$

$$\sum M_V = ۰ \Rightarrow M + \frac{P}{L}x\left(\frac{x}{۲}\right) - \frac{۷}{۶}Px = ۰$$

$$\Rightarrow M = \frac{Px}{۲}\left(\frac{۷}{۳} - \frac{x}{L}\right)$$

$$M_{\max} = \frac{۵}{۶}PL$$

۵-۱۳۴. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده به وسیله نیروی $۲kN$ و کوپل $۱٫۶kN.m$ رسم کنید. مقدار گشتاور خمشی در نقطه B را تعیین کنید.



حل:

$\sum M_A = ۰ \quad , \quad ۱/۶ + ۱/۰ R_B - ۲(۱/۵) = ۰$

$R_B = ۱/۴ kN$

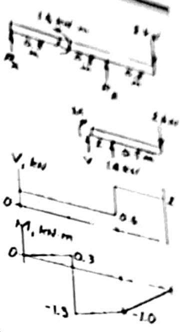
$\sum F = ۰ \quad , \quad R_A = ۰/۶ kN$

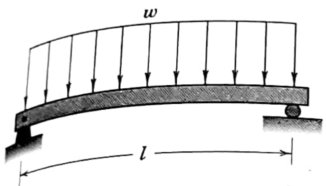
$\sum F = ۰ \quad , \quad V + ۱/۴ - ۲ = ۰ \quad , \quad V = ۰/۶ kN$

$\sum M = ۰ \quad , \quad M + ۲(۰/۵ + x) - ۱/۴ x = ۰$

$M = -(۱ + ۰/۶ x) \quad (۰ < x < ۰/۵ m) \quad , \quad x = ۰ \Rightarrow M = -۱ \; kN.m$

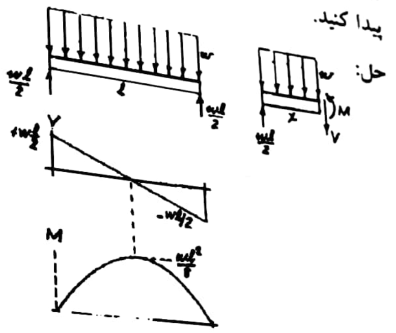
(x از انتهای B اندازه‌گیری می‌شود.)





۵-۱۳۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیری که به صورت یکنواخت بارگذاری شده رسم کنید و حداکثر گشتاور خمشی M_{max} را پیدا کنید.

حل:

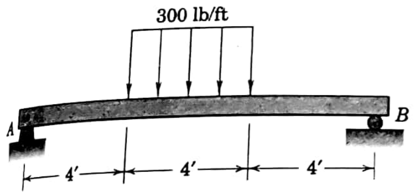


$$\sum F = ۰ \quad , \quad -V - \omega x + \frac{\omega \ell}{۲} = ۰ \quad , \quad V = \omega\left(\frac{\ell}{۲} - x\right)$$

$$\sum M = ۰ \quad , \quad M + \omega x\left(\frac{x}{۲}\right) - \frac{\omega \ell x}{۲} = ۰$$

$$M = \frac{\omega x}{۲}(\ell - x)$$

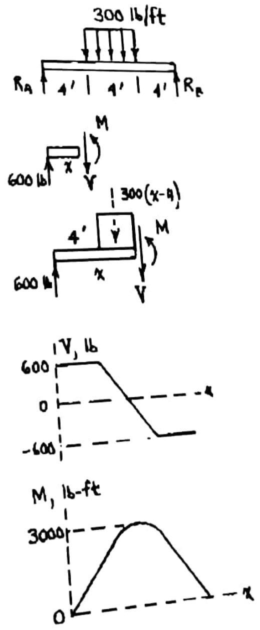
$$M_{max} = \frac{\omega \ell^۲}{۸}$$



۵-۱۳۶. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده را رسم کنید و حداکثر مقدار گشتاور M_{max} را تعیین کنید.

حل:

به علت تقارن:



$$R_A = R_B = \frac{۱}{۲}(۳۰۰)(۴) = ۶۰۰ lb$$

$$۰ < x < ۴ ft \quad : \quad V = ۶۰۰ lb \quad , \quad M = ۶۰۰ x$$

$$۴ < x < ۸ ft \quad : \quad +\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad ۶۰۰ - ۳۰۰(x - ۴) - V = ۰$$

$$V = ۱۸۰۰ - ۳۰۰ x$$

$$+\circlearrowleft \sum M = ۰ \quad : \quad M + ۳۰۰(x - ۴)\frac{x - ۴}{۲} - ۶۰۰ x = ۰$$

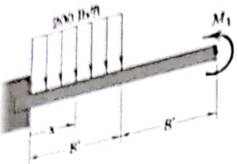
$$M = -۱۵۰ x^۲ + ۱۸۰۰ x - ۲۴۰۰$$

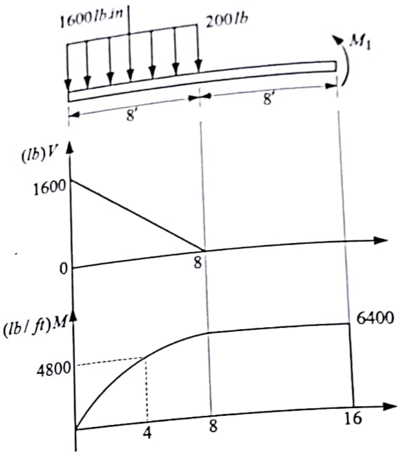
$$\text{for } M_{max} \quad , \quad \frac{dM}{dx} = -۳۰۰ x + ۱۸۰۰ = ۰ \quad , \quad x = ۶ ft$$

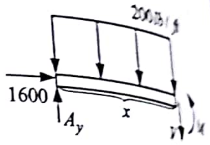
$$M_{max} = -۱۵۰(۶^۲) + ۱۸۰۰(۶) - ۲۴۰۰ = ۳۰۰۰ lb - ft$$

Scanned by CamScanner

... دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر یکسرگیردار بارگذاری شده ... به کوپل انتهایی M_1 تنظیم شده است را رسم کنید که در نتیجه آن ... صفر در انتهای ثابت تیر تولید می‌شود. همچنین گشتاور خمشی M ... را پیدا کنید.







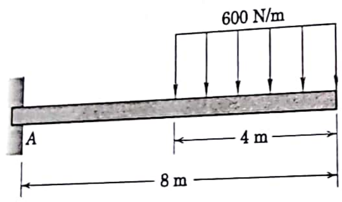
$\curvearrowleft + \sum M_A = ٠ \;:\; M_1 = (٢٠٠)(٨)(٤) = ٦٤٠٠\, lb.ft$

$+\uparrow \sum F_y = ٠ \;\Rightarrow\; ١٦٠٠ - V - ٢٠٠x = ٠ \quad , \quad V = ١٦٠٠ - ٢٠٠x$

$\curvearrowleft + \sum M_V = ٠ \;:\; M - ١٦٠٠x + (٢٠٠x)\left(\frac{x}{٢}\right) = ٠ \;\Rightarrow\; M = ١٦٠٠x - ١٠٠x^٢$

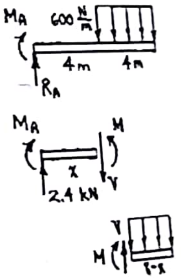
$at\ x = ٤ \;:\; M = ١٦٠٠(٤) - ١٠٠(٤)^٢ = ٤٨٠٠$

۵-۱۲۸. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر یکسرگیردار بارگذاری شده تعیین کنید. برش V و گشتاور M در قسمت وسط تیر را تعیین کنید.



حل:

از نمودار جسم آزاد تیر:



$R_A = ٢/٤\ kN \quad , \quad M_A = -١٤/٤\ kN.m$

$٠ < x < ٤m \;:\; +\uparrow \sum F = ٠ \;\Rightarrow\; V = ٢/٤\ kN$

$\curvearrowleft + \sum M = ٠ \;:\; ١٤/٤ + M - ٢/٤x = ٠ \quad , \quad M = ٢/٤x - ١٤/٤$

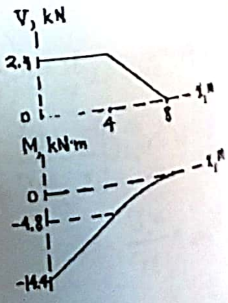
$٤ < x < ٨m \;:\; +\uparrow \sum F = ٠ \;:\; V - ٠/٦(٨ - x) = ٠$

$V = ٤/٨ - ٠/٦x\ kN$

$+ \sum M = ٠ \;:\; M + ٠/٦(٨ - x)\frac{٨ - x}{٢} = ٠ \quad , \quad M = -٠/٣(٨ - x)^٢\ kN$

$V = ٢/٤\ kN$

$M = -٤/٨\ kN.m$



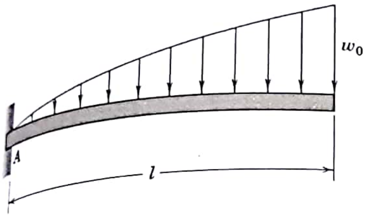
Scanned by CamScanner

۱۳۹-۵. نیروی برشی برحسب پوند در تیر معلوم زیر به صورت $V = 2200x - 40x^3$ داده شده است که x فاصله برحسب فوت، اندازه گرفته شده در امتداد تیر می‌باشد. تغییرات متناظر x با بارگذاری عمودی w برحسب پوند فوت طول را تعیین کنید. همچنین گشتاور خمشی M در $x = 3\,ft$ اگر گشتاور خمشی در $x = 1\,ft$ برابر $1600\,lb-ft$ باشد را تعیین کنید.

حل:

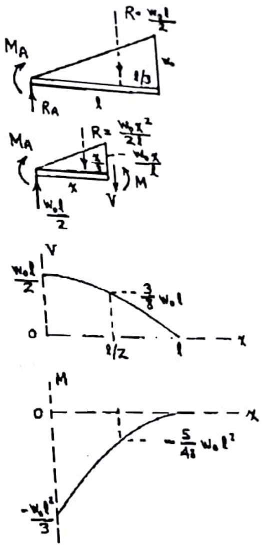
$$w = \frac{-dV}{dx} = -(2200 - 120x^2)$$

$$dM = V\,dx \Rightarrow \int_{-1600}^{M} dM = \int_1^3 (2200x - 40x^3)\,dx = 6400\,lb.ft$$



۱۴۰-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر یکسرگیرداری که به طور خطی بارگذاری شده است رسم کنید و گشتاور خمشی M_A در تکیه‌گاه A را تعیین کنید.

حل:



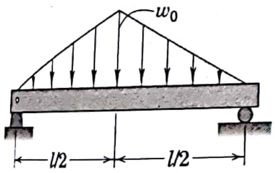
$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \; : \; M_A + \frac{w_0 \ell}{2}\frac{2\ell}{3} = 0 \quad , \quad M_A = -\frac{w_0 \ell^2}{3}$$

$$+\uparrow \sum F = 0 \Rightarrow R_A = \frac{w_0 \ell}{2}$$

$$\circlearrowleft + \sum M = 0 \; : \; M + \frac{w_0 x^2}{2\ell}\frac{x}{3} + \frac{w_0 \ell^2}{3} - \frac{w_0 \ell}{2}x = 0$$

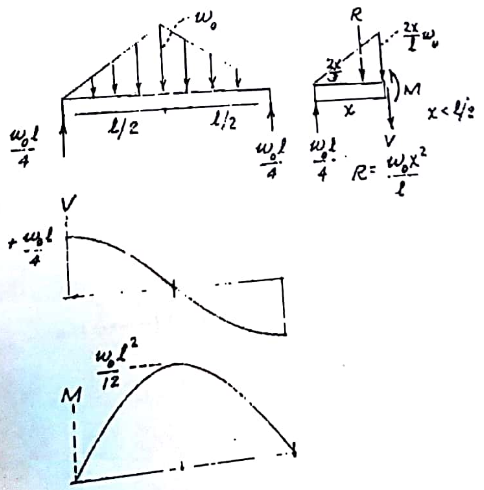
$$M = \frac{w_0}{6}\left(-2\ell^2 + 3\ell x - \frac{x^3}{\ell}\right)$$

$$+\uparrow \sum F = 0 \; : \; \frac{w_0 \ell}{2} - \frac{w_0 x^2}{2\ell} - V = 0 \quad , \quad V = \frac{w_0 \ell}{2}\left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)$$



۱۴۱-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر ساده نشان داده شده که به صورت خطی بارگذاری شده است رسم کنید. حداکثر مقدار گشتاور خمشی M را تعیین کنید.

حل:



$$R = \frac{w_0 x^2}{L}$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow V + \frac{w_0 x^2}{L} - \frac{w_0 L}{4} = 0 \Rightarrow V = w_0 L\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

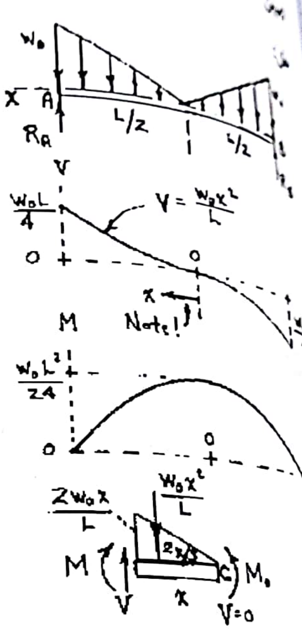
$$\sum M_V = 0 \Rightarrow M + R\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{w_0 L}{4}x = 0$$

$$\Rightarrow M = w_0 x L\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{3L^2}\right)$$

$$M_{max} = \frac{w_0 L^2}{12}$$

۱۴۲-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش برای تیر بارگذاری شده که در شکل داده شده است را رسم کنید. حداکثر گشتاور M_{max} را بیابید.

حل:



$$R_A = R_B = \frac{w_\circ L}{۴}$$

$$x = \frac{L}{۲} \quad , \quad M = ۰ \quad , \quad V = R_A$$

$$+\uparrow \sum F = ۰ \quad : \quad V - \frac{w_\circ x^۲}{L} = ۰ \quad , \quad V = \frac{w_\circ x^۲}{L}$$

$$x = \frac{L}{۲} :$$

$$\sum M_c = ۰ \quad : \quad +M - \frac{w_\circ L}{۴}\left(\frac{L}{۲}\right) + \frac{w_\circ (\frac{L}{۲})^۲}{L}\left(\frac{۲L}{۳}\right) = ۰$$

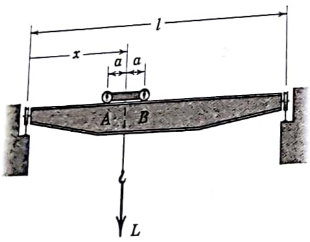
$$M_\circ = \frac{w_\circ L^۲}{۲۴}$$

$$\sum M_\circ = ۰ \quad : \quad -M - \frac{w_\circ x^۲}{L}x + \frac{w_\circ x^۲}{L}\frac{۲x}{۳} + \frac{w_\circ L^۲}{۲۴} = ۰$$

$$M = \frac{w_\circ}{۳L}\left(\frac{L^۳}{۸} - x^۳\right)$$

$$M = M_{max} \ @ \ x = ۰ \quad : \quad M_{max} = \frac{w_\circ}{۳L}\left(\frac{L^۳}{۸} - ۰\right) = \frac{w_\circ L^۲}{۲۴}$$

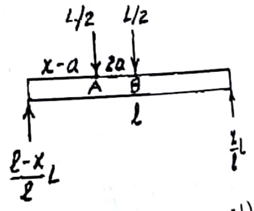
۱۴۳-۵. حداکثر گشتاور خمشی M و مقدار متناظر x در تیر جرثقیل را تعیین کنید و قسمتی که گشتاور عمل می‌کند را نشان دهید.



حل:

$$M_A = \frac{\ell - x}{\ell} L(x-a) = \frac{L}{\ell}(-x^۲ + [a+\ell]x - a\ell)$$

$$\frac{dM_A}{dx} = \frac{L}{\ell}(-۲x + a + \ell) = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a+\ell}{۲}$$

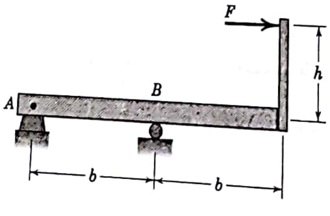


$$M_{A_{max}} = \frac{L}{۴\ell}(\ell - a)^۲$$

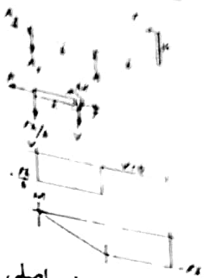
$$M_{B_{x=\frac{a+\ell}{۲}}} = \frac{L}{۴\ell}(\ell^۲ - ۲a\ell - ۳a^۲) < M_A$$

(با توجه به تقارن، گشتاور خمشی ماکزیمم معادل و دیگری در $x = \frac{\ell - a}{۲}$ رخ می‌دهد)

۱۴۴-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده به وسیله نیروی F که برای سازه جوش داده شده به تیر به کار می‌رود را رسم کنید. گشتاور خمشی در نقطه B را تعیین کنید.



حل:



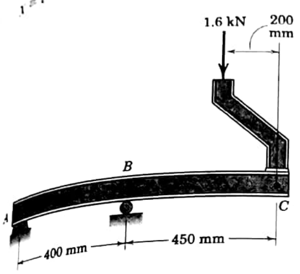
$\sum M_A=0 \quad , \quad Fh-Bb=0 \quad , \quad B=\dfrac{Fh}{b}$

$\sum F=0 \quad , \quad A_y=B=\dfrac{Fh}{b}$

$\sum F_y=0 \quad , \quad V=-\dfrac{Fh}{b}$

$\sum M=0 \quad , \quad M+\dfrac{Fh}{b}x=0 \quad , \quad M=-\dfrac{Fh}{b}x$

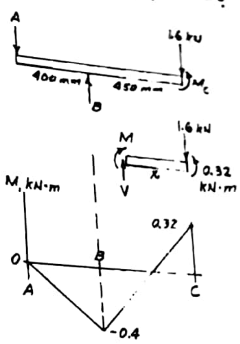
$x=b \Rightarrow M=-Fh$



۱۴۵-۵. گوشه عضو اصلی تکیه‌گاه در انتها C تیر I شکل که دارای نیروی عمودی ۱٫۶kN جوش داده شده است. گشتاور خمشی در نقطه B و فاصله x از سمت چپ نقطه C را طوری تعیین کنید که گشتاور خمشی در آن صفر باشد. همچنین دیاگرام گشتاور را برای تیر رسم کنید.

حل:

$M_C=۱٫۶(۰٫۲۰۰)=۰٫۳۲\,kN.m$



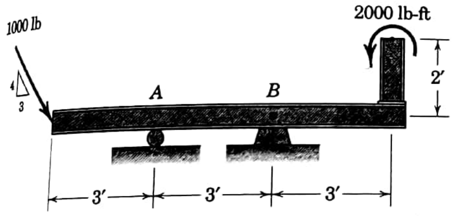
$\sum M=0 \quad , \quad ۰٫۴۸+۰٫۳۲-۰٫۸۵(۱٫۶)=۰ \quad , \quad B=۲٫۶\,kN$

$\sum F=0 \quad , \quad A+۱٫۶-۲٫۶=۰ \quad , \quad A=۱٫۰\,kN$

$\sum M=0 \quad , \quad ۰٫۳۲-۱٫۶x-M=۰ \quad , \quad M=۰٫۳۲-۱٫۶x$

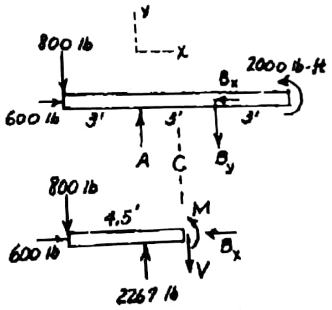
$@B: x=۰٫۴۵m \Rightarrow M_B=-۰٫۴۰\,kN.m$

$@M=0 \Rightarrow x=\dfrac{۰٫۳۲}{۱٫۶}=۰٫۲m$



۱۴۶-۵. در تکیه‌گاه‌های تیر I شکل، نیروی ۱۰۰۰ پوندی و کوپل ۲۰۰۰lb − ft برای عضو ۲ft جوش داده شده به انتهای تیر به کار رفته است. برش V و گشتاور M در قسمت وسط بین A و B را محاسبه کنید.

حل:



$\sum M_A=0 \quad , \quad ۲۰۰۰-۳B_y+۳(۸۰۰)=۰ \quad , \quad B_y=۱۴۶۷\,lb$

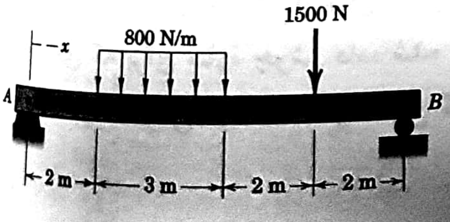
$\sum F_y=0 \quad , \quad A-۱۴۶۷-۸۰۰=۰ \quad , \quad A=۲۲۶۷\,lb$

$\sum M_C=0 \quad , \quad M+۸۰۰(۴٫۵)-۲۲۶۷(۱٫۵)=۰$

$M=-۲۰۰\,lb-ft$

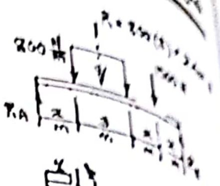
$\sum F_y=0 \quad , \quad ۲۲۶۷-۸۰۰-V=۰ \quad , \quad V=۱۴۶۷\,lb$

۱۴۷-۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش برای تیر بارگذاری شده با بارهای نقطه‌ای و توزیع شده را ترسیم کنید. گشتاور و برش در $x=۶m$ چقدر است؟ حداکثر گشتاور خمشی M_{max} را تعیین کنید.



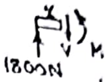
حل:

$$\begin{cases}\sum M_A=۰ \Rightarrow R_B(۹)-۱۵۰۰(۷)-۲۴۰۰(۳/۵)=۰ \Rightarrow R_B=۲۱۰۰N \\ \sum F=۰ \Rightarrow R_A-۲۴۰۰-۱۵۰۰+۲۱۰۰=۰ \Rightarrow R_A=۱۸۰۰N\end{cases}$$



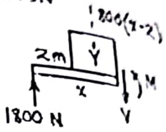
در محدوده $۰<x<۲m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow V=۱۸۰۰N \\ \sum M=۰ \Rightarrow M=۱۸۰۰x\end{cases}$$



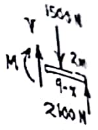
در محدوده $۲m<x<۵m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow ۱۸۰۰-۸۰۰(x-۲)-V=۰ \Rightarrow V=۳۴۰۰-۸۰۰x \\ \sum M=۰ \Rightarrow M+۸۰۰(x-۲)\left(\frac{x-۲}{۲}\right)-۱۸۰۰x=۰ \\ \Rightarrow M=-۴۰۰x^۲+۳۴۰۰x-۱۶۰۰\end{cases}$$



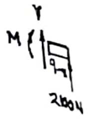
در محدوده $۵m<x<۷m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow ۲۱۰۰-۱۵۰۰+V=۰ \Rightarrow V=-۶۰۰N \\ \sum M=۰ \Rightarrow -M-۱۵۰۰(۷-x)+۲۱۰۰(۹-x)=۰ \\ \Rightarrow M=۸۴۰۰-۶۰۰x\end{cases}$$



در محدود $۷m<x<۹m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow V=-۲۱۰۰N \\ \sum M=۰ \Rightarrow M=۱۸۹۰۰-۲۱۰۰x\end{cases}$$



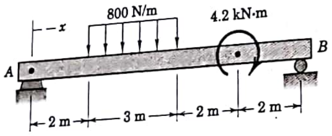
$$@\ x=۶m \Rightarrow \begin{cases}V=-۶۰۰V \\ M=۸۴۰۰-۶۰۰(۶)=۴۸۰۰N.m\end{cases}$$

برای تعیین M_{max} داریم:

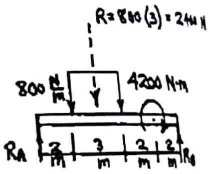
$$\frac{dM}{dx}=۰ \Rightarrow \frac{d}{dx}(-۴۰۰x^۲+۳۴۰۰x-۱۶۰۰)=۰ \Rightarrow -۸۰۰x+۳۴۰۰=۰ \Rightarrow x=۴/۲۵m$$

$$M_{max}=-۴۰۰(۴/۲۵)^۲+۳۴۰۰(۴/۲۵)-۱۶۰۰=۵۶۲۰N.m$$

۱۴۸-۵. مسئله ۵-۱۴۷ را به جای نیروی $۱۵۰۰N$ با کوپل $۴/۲kN.m$ جایگزین کرده و دوباره حل کنید.



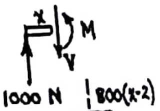
حل:



$$\begin{cases}\sum M_A=۰ \Rightarrow R_B(۹)-۲۴۰۰(۳/۵)-۴۲۰۰=۰ \Rightarrow R_B=۱۴۰۰N \\ \sum F=۰ \Rightarrow R_A=۱۰۰۰\end{cases}$$

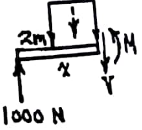
در محدوده $۰<x<۲m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow V=۱۰۰۰N \\ \sum M=۰ \Rightarrow M=۱۰۰۰x\end{cases}$$



در محدوده $۲m<x<۵m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow ۱۰۰۰-۸۰۰(x-۲)-V=۰ \Rightarrow V=۲۶۰۰-۸۰۰x \\ \sum M=۰ \Rightarrow M+۸۰۰(x-۲)\left(\frac{x-۲}{۲}\right)-۱۰۰۰x=۰ \\ \Rightarrow M=-۴۰۰x^۲+۲۶۰۰x-۱۶۰۰\end{cases}$$



در محدوده $۵m<x<۷m$ داریم:

$$\begin{cases}\sum F=۰ \Rightarrow V+۱۴۰۰=۰ \Rightarrow V=-۱۴۰۰N \\ \sum M=۰ \Rightarrow -M-۴۲۰۰+۱۴۰۰(۹-x)=۰ \Rightarrow M=۸۴۰۰-۱۴۰۰x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum F=\text{۰} \Rightarrow V=-\text{۱۴۰۰}N\\ \sum M=\text{۰} \Rightarrow M=\text{۱۲۶۰۰}-\text{۱۴۰۰}x\end{cases}$$

$$@\,x=\text{۶}m \Rightarrow \begin{cases}V=-\text{۱۴۰۰}N\\ M=\text{۸۴۰۰}-\text{۱۴۰۰(۶)}=\text{۰}\end{cases}$$

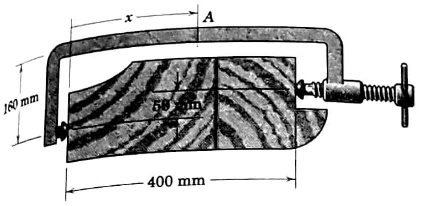
برای تعیین M_{max} داریم:

$$\frac{dM}{dx}=\text{۰} \Rightarrow \frac{d}{dx}(-\text{۴۰۰}x^{\text{۲}}+\text{۲۶۰۰}x-\text{۱۶۰۰})=\text{۰} \Rightarrow -\text{۸۰۰}x+\text{۲۶۰۰}=\text{۰} \Rightarrow x=\text{۳/۲۵}m$$

$$M_{x=\text{۳/۲۵}}=-\text{۴۰۰(۳/۲۵)}^{\text{۲}}+\text{۲۶۰۰(۳/۲۵)}-\text{۱۶۰۰}=\text{۲۶۲۵}N.m$$

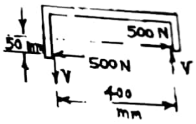
$$M_{max}=\text{۲۸۰۰}N.m$$

بنابراین:



۵-۱۴۹. پیچ تنظیم‌کننده گیره جابه‌جایی برای یک هدف خاص، یک فشار $\text{۵۰۰}N$ ایجاد می‌کند. نیروی برش V، کشش T و گشتاور خمشی M در قسمت A میله گیره برای $x=\text{۲۵۰}mm$ را محاسبه کنید. کدامیک از این سه کمیت با x تغییر پیدا می‌کند.

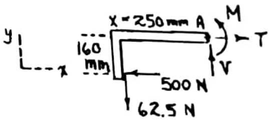
حل:



$$\sum M=\text{۰} \;:\; \text{۵۰۰(۰/۰۵۰)}-V\text{(۰/۴۰۰)}=\text{۰} \quad,\quad V=\text{۶۲/۵}\ N$$

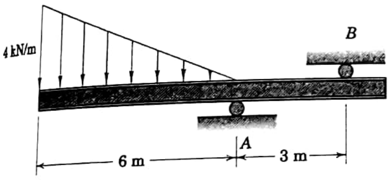
$$\sum F_x=\text{۰} \;:\; T-\text{۵۰۰}=\text{۰} \quad,\quad T=\text{۵۰۰}\ N$$

$$\sum F_y=\text{۰} \;:\; V-\text{۶۲/۵}=\text{۰} \quad,\quad V=\text{۶۲/۵}\ N$$



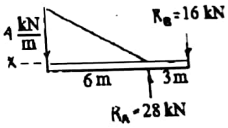
$$\sum M_A=\text{۰}:\; M+\text{۶۲/۵(۰/۲۵۰)}-\text{۵۰۰(۰/۱۶۰)}=\text{۰}$$

$$M=\text{۶۴/۴}\ N.m$$

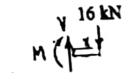


۵-۱۵۰. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر بارگذاری شده رسم کنید و V برش و M گشتاور را در قسمت سه متری سمت چپ تکیه‌گاه A به دست آورید.

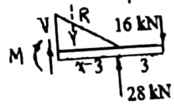
حل:



$$\text{۰}<x<\text{۳} \;:\; +\uparrow\sum F=\text{۰} \Rightarrow V=\text{۱۶}kN$$

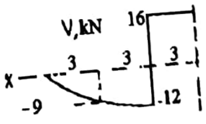


$$\circlearrowleft+\sum M_A=\text{۰} \;:\; M+\text{۱۶}x=\text{۰} \quad,\quad M=-\text{۱۶}x$$

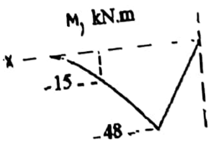


$$\text{۳}<x<\text{۹} \;:\; R=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(x-\text{۳})\left(\frac{\text{۴}}{\text{۶}}\right)(x-\text{۳})=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(x-\text{۳})^{\text{۲}}$$

$$+\uparrow\sum F=\text{۰} \;:\; V+\text{۲۸}-\text{۱۶}-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(x-\text{۳})^{\text{۲}}=\text{۰} \quad,\quad V=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(x-\text{۳})^{\text{۲}}-\text{۱۲}$$



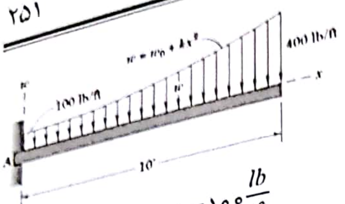
$$\sum M=\text{۰} \;:\; M+\frac{\text{۱}}{\text{۳}}(x-\text{۳})^{\text{۲}}\,\frac{x-\text{۳}}{\text{۳}}+\text{۱۶}(\text{۳}+x-\text{۳})-\text{۲۸}(x-\text{۳})=\text{۰}$$



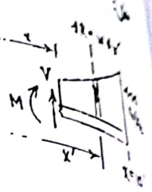
$$M=\frac{-\text{۱}}{\text{۹}}(x-\text{۳})^{\text{۳}}+\text{۱۲}x-\text{۸۴}$$

$$x=\text{۶} \quad,\quad V=-\text{۹}kN \quad,\quad M=-\text{۱۵}kN.m$$

۵-۱۵۱. عباراتی را برای نیروی برشی V و گشتاور خمشی M که به‌صورت تابعی از x در تیر یکسر گیردار بارگذاری شده نشان داده شده، استخراج کنید.



حل:



$$@x=۰ \Rightarrow w=w_۰=۱۰۰\frac{lb}{ft}$$

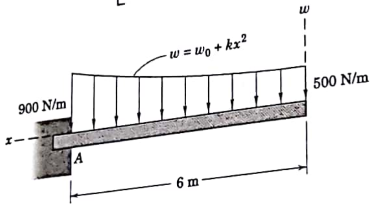
$$@x=۱۰ \Rightarrow ۴۰۰=۱۰۰+k(۱۰)^۲ \Rightarrow k=۳\frac{lb}{ft^۳} \Rightarrow w=۱۰۰+۳x^۲$$

$$+\uparrow\sum F=۰ \Rightarrow V=\int_۰^{۱۰} w\,dx'=۰ \Rightarrow V=\int_x^{۱۰}(۱۰۰+۳x'^۲)\,dx'=۲۰۰۰-۱۰۰x-x^۳$$

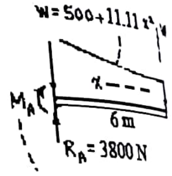
$$\circlearrowleft + \sum M=۰ \Rightarrow M-\int_۰^{۱۰}(x'-x)\,w\,dx'=۰ \Rightarrow M=-\int_۰^{۱۰}(-۱۰۰x+۱۰۰x'+۳x'^۳-۳xx'^۲)\,dx'$$

$$=-\left[-۱۰۰xx'+۵۰x'^۲-xx'^۳+\frac{۳}{۴}x'^۴\right]_x^{۱۰}=-۱۲۵۰۰+۲۰۰۰x-۵۰x^۲-\frac{۱}{۴}x^۴$$

۵-۱۵۲. دیاگرام‌های گشتاور و برش را برای تیر مسئله ۵-۱۱۶ که در اینجا گزارش شده رسم کنید و V برش و M گشتاور را در وسط طول تیر تعیین کنید.



حل:



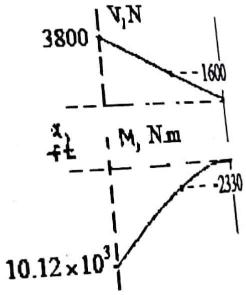
$$\begin{cases} w, R_A, M_A \\ \text{مسئله } ۱۰۶-۵ \end{cases}$$

$$+\uparrow\sum F=۰ : V-\int w\,dx'=۰$$

$$V=\int_۰^x(۵۰۰+۱۱/۱۱x'^۲)\,dx'=۵۰۰x+\frac{۱۱/۱۱}{۳}x^۳$$

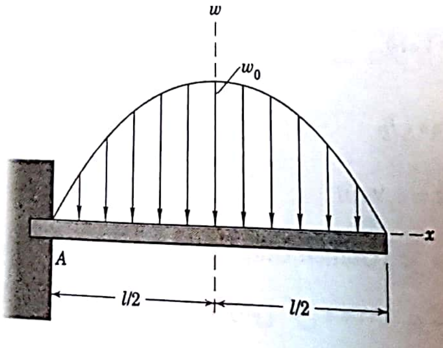
$$\sum M=۰ : M+\int_۰^x w\,dx'(x-x') \quad , \quad M=-\int_۰^x(۵۰۰+۱۱/۱۱x'^۲)(x-x')\,dx'$$

$$M=-۵۰۰xx'+۲۵۰x'^۲-\frac{۱۱/۱۱}{۳}xx'^۳+\frac{۱۱/۱۱}{۴}x'^۴\Big|_۰^x=-۲۵۰x^۲-\frac{۱۱/۱۱}{۱۲}x^۴$$

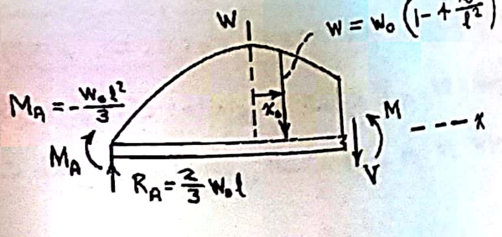


$$x=۳m \quad , \quad V=۱/۶kN \quad , \quad M=-۲/۳۳kN.m$$

۵-۱۵۳. عبارات را برای V برش و M گشتاور برحسب x برای تیر یکسرگیردار مسئله ۵-۱۱۴ که در اینجا مجدداً نشان داده شده است، استخراج کنید. بارگذاری سهموی است.



حل:



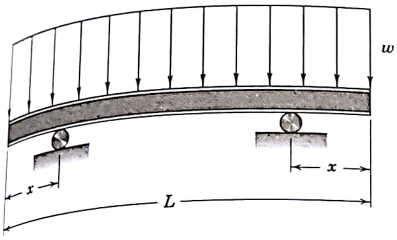
Scanned by CamScanner

مقادیر R_A و M_A از مسئله ۵-۱۰۸ به دست می‌آیند.

$$+\uparrow\Sigma F=0 \Rightarrow \frac{2}{3}w_0L-\int_{-\frac{L}{2}}^{x} w_0\left(1-4\frac{x_0^2}{L^2}\right)dx_0-V=0 \Rightarrow V=w_0\left(\frac{L}{2}-x+\frac{4x^3}{3L^2}\right)$$

$$\circlearrowleft\Sigma M=0 \Rightarrow M+\int_{-\frac{L}{2}}^{x}\left(1-4\frac{x_0^2}{L^2}\right)(x-x_0)\,dx_0+\frac{w_0L^2}{3}-\frac{2}{3}w_0L\left(\frac{L}{2}+x\right)=0$$

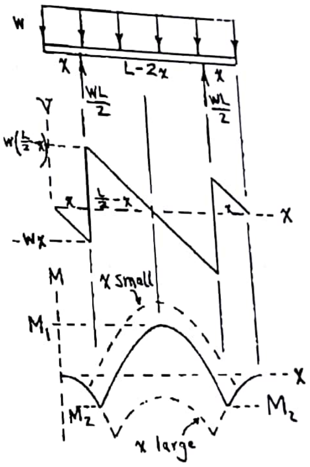
$$\Rightarrow M=w_0\left(-\frac{L^2}{16}+\frac{xL}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3L^2}\right)$$



۵-۱۵۴. تیر زیر یک بار واحد یکنواخت ω را تحمل می‌کند. موقعیت x دو تکیه‌گاه را، چنانچه که گشتاور خمشی ماکزیمم حداقل مقدار خود را داشته باشد، تعیین کنید. همچنین M_{max} را تعیین کنید.

حل:

با توجه به سطوح زیر منحنی نمودار برشی داریم:



$$|M_2|=\frac{1}{2}wx^2$$

$$|M_1|=\frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}-w\right)^2-\frac{1}{2}wx^2=\frac{wL}{2}\left(\frac{L}{4}-x\right)$$

وقتی $|M|_{min}$ اتفاق می‌افتد که:

$$|M_1|=|M_2| \Rightarrow \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{4}-x\right)=\frac{1}{2}wx^2 \Rightarrow x^2+Lx-\frac{L^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{L}{2}(-1\pm\sqrt{2})$$

غیرقابل قبول: علامت (-)

علامت (+) : $x=0.207L$

$$M_{max}=|M_1|=\frac{1}{2}w(0.207L)^2=0.0214\,wL^2$$

۵-۱۵۵. یک بنا، به وسیله ریسمانی بین دو نقطه‌ای که $50\,ft$ از یکدیگر در یک سطح یکسان فاصله دارند با کشش $10\,lb$ در انتهای هر کدام کشیده می‌شود. اگر وزن ریسمان $0.1\,lb$ باشد، خم‌شدگی h در وسط ریسمان را تعیین کنید.

حل:

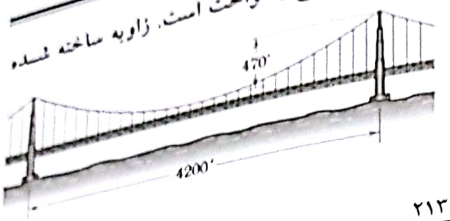
$$2s=50 \Rightarrow s=25\,ft \quad , \quad \mu=\frac{0.1}{50}=0.002\frac{lb}{ft} \quad , \quad T=10\,lb$$

$$T^2=T_0^2+\mu^2s^2 \Rightarrow 10^2=T_0^2+(0.002\times25)^2 \Rightarrow T_0=9.9998\,lb$$

$$T=T_0+\mu y \Rightarrow 10=9.9998+0.002y \Rightarrow y=6.25\times10^{-3}\,ft=0.75\,in$$

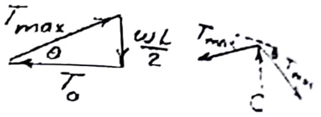
۵-۱۵۶. پل گلدن گیت (Golden Gate) در سانفرانسیسکو دارای یک دهانه‌ای به اندازه $4200\,ft$، شکم‌دادگی اندازه $470\,ft$ و بار استاتیکی کل ۲۱۳۰۰ پوند بر هر فوت خطی از طول افقی است. وزن هر دو کابل در این

... در نظر گرفته شده است و فرض شده است که در امتداد افق توزیع یکنواخت است. زاویه ساخته شده ... با افق در بالای برج روی هر طرف هر برج ... است. تنش T_0 در وسط دهانه در هر یک از ... های اصلی و نیروی فشاری C اعمال شده به ... ۸ کابل روی بالای هر برج را محاسبه کنید.



حل:

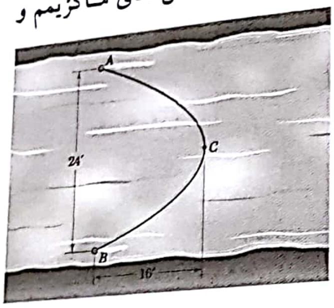
$$w=\frac{۲۱۳۰۰}{۲}=۱۰۶۵۰\frac{lb}{ft}\quad,\quad h=۴۷۰\,ft\quad,\quad L=۴۲۰۰\,ft$$



$$T_0=\frac{wL^2}{8h}=\frac{۱۰۶۵۰(۴۲۰۰)^2}{۸(۴۷۰)}=۵۰/۰(۱۰^۶)\,lb$$

$$C=2T_{max}\sin\theta=2\left(\frac{wL}{2}\right)=wL=۱۰۶۵۰(۴۲۰۰)=۴۴/۷(۱۰^۶)\,lb$$

۱۵۷-۵. جریان از چپ به راست در رودخانه باعث یک دراگ (نیروی کشش) یکنواخت ۴ پوند بر فوت عرض رودخانه روی کابل شناوری می‌شود که بین پست‌های A و B بسته شده است. تنش‌های ماکزیمم و مینیمم را در کابل و موقعیت هر کدام را تعیین کنید.



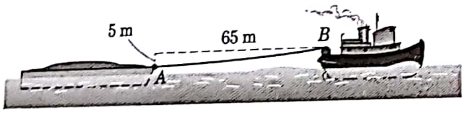
حل:

$$T=w\sqrt{x^2+\left(\frac{L_A}{2h_A}\right)^2}=۴\sqrt{x^2+\left(\frac{۱۴۴}{۳۲}\right)^2}$$

$$at\ \ C: x=۰\ \Rightarrow\ T_{min}=۱۸\,lb$$

$$at\ \ A,B: x=۱۲\ \Rightarrow\ T_{max}=۵۱/۲۶\,lb$$

۱۵۸-۵. یک یدک‌کش قدرتمند در حال کشیدن یک بارج با یک کابل که دارای وزن ۱۴ کیلوگرم بر متر طولش است، می‌باشد. مشاهده شده است که تماس در نقطه A به صورت افقی است. تنش‌ها را در نقاط A و B تعیین کنید.



حل:

$$۵=\frac{T_0}{\mu}\left[\cosh\frac{M(۶۵)}{T_0}-۱\right]$$

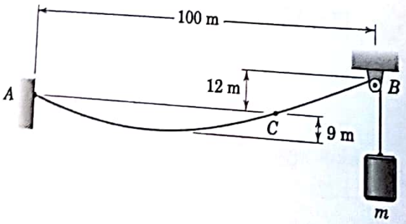
$$\mu=۱۴(۹/۸۱)=۱۳۷/۳\frac{N}{m}$$ با حل عددی

$$T_0=۵۸۱۰۰\,N=T_A$$

سپس با استفاده از معادله ۵-۲۲

$$T_B=۵۸۱۰۰+۱۳۷/۳(۵)=۵۸۸۰۰\,N$$

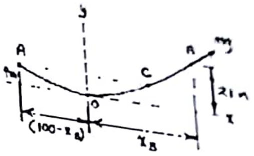
۱۵۹-۵. یک کابل تعیین‌کننده وزن ۲۵ نیوتن بر متر طول از نقطه A آویخته شده است و از روی یک پولی کوچک در نقطه B عبور می‌کند. جرم m سیلندر متصل‌شده‌ای که یک شکم به اندازه ۹ متر را تولید می‌کند محاسبه کنید. همچنین فاصله افقی از A تا C را تعیین کنید. چون نسبت شکم به دهنه کوچک است، از تقریب یک کابل سهموی استفاده کنید.



حل:

$y=\frac{wx^{۲}}{۲T_{۰}}$

با حذف $T_{۰}$ نتیجه می‌شود:



$$\left.\begin{aligned} B:&\ ۲۱=\frac{wx_B^{۲}}{۲T_{۰}} \\ A:&\ ۹=\frac{w(۱۰۰-x_B)^{۲}}{۲T_{۰}} \end{aligned}\right\}$$

$x_B^{۲}-۲۵۰x_B+۱۷۵۰۰=۰$

از حل معادله درجه دوم : $x_B=۲۹۰m$ (غیرقابل‌قبول) ، $۶۰/۴m$

از معادله ۵-۱۴ @ $B:۲۱=\frac{۲۵(۶۰/۴)^{۲}}{۲T_{۰}}$ ، $T_{۰}=۲۱۷۰N$

برای قسمت ۵۸ : $(mg)^{۲}=T_{۰}^{۲}+(wx_B)^{۲}$

$m^{۲}(۹/۸۱)^{۲}=۲۱۷۰^{۲}+(۲۵\cdot۶۰/۴)^{۲}$ ، $m=۲۷۰kg$

معادله سهمی $y=\frac{۲۵x^{۲}}{۲(۲۱۷۰)}=۰/۰۰۵۷۵x^{۲}$

$at\ C\ ,\ y_c=۹m$: $۹=۰/۰۰۵۷۵x_c^{۲}$ ، $x_c=۳۹/۶m$

$\overline{AC}=۲x_c=۷۹/۱m$

۵-۱۶۰. مسئله ۵-۱۵۹ را تکرار کنید، اما از تقریب کابل سهموی استفاده نکنید. جواب‌هایتان را با جواب‌های به دست آمده از مسئله ۵-۱۵۹ مقایسه کنید.

حل:
به دیاگرام مسئله ۵-۱۴۱ و معادله ۵-۱۹ مراجعه شود.

$$y=\frac{T_{۰}}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu x}{T_{۰}}-۱\right]$$

$$at\ B\ :\ ۲۱=\frac{T_{۰}}{۲۵}\left[\cosh\frac{۲۵x_B}{T_{۰}}-۱\right]$$

$$at\ A\ :\ ۹=\frac{T_{۰}}{۲۵}\left[\cosh\frac{۲۵}{T_{۰}}(۱۰۰-x_B)-۱\right]$$

دو معادله فوق با استفاده از حل می‌گردد.

$T_{۰}=۲۲۴۰N$ ، $x_B=۶۰/۲m$

مسئله ۵-۲۰ $s=\frac{T_{۰}}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_{۰}}$

$$at\ B\ :\ s_B=\frac{۲۲۴۰}{۲۵}\sinh\left(\frac{۲۵\cdot۶۰/۲}{۲۲۴۰}\right)=۶۴/۸m$$

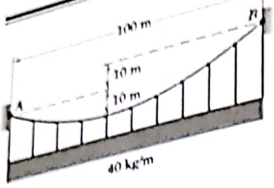
$(mg)^{۲}=T_{۰}^{۲}+(\mu s_B)^{۲}$: $m^{۲}(۹/۸۱)^{۲}=۲۲۴۰^{۲}+(۲۵\cdot۶۴/۸)^{۲}$ ، $m=۲۸۲kg$

مسئله ۵-۱۹ $@\ C\ :\ ۹=\frac{۲۲۴۰}{۲۵}\left[\cosh\frac{۲۵x_c}{۲۲۴۰}-۱\right]$

حل عددی با استفاده از : $x_c=۳۹/۸m$

$\overline{AC}=۲x_c=۷۹/۶m$

۱۶۱-۵. یک کابل، یک بار یکنواخت $۲۰kg/m$ که در امتداد افق توزیع شده است را حمایت می‌کند و از دو نقطه ثابت شده A و B آویخته شده است. تنش‌های کابل در نقاط A و B و حداقل تنش $T_۰$ را محاسبه کنید.



حل: از معادله ۱۴-۵ داریم:

$$y=\frac{wx^۲}{۲T_۰} \quad , \quad B:\ ۲۰=\frac{(۴۰)(۹/۸۱)x_۱^۲}{۲T_۰}$$

$$A:\ ۱۰=\frac{(۴۰)(۹/۸۱)(۱۰۰-x_۱)^۲}{۲T_۰}$$

$$if\ A=B \Rightarrow (۱۰۰-x_۱)^۲=x_۱^۲ \Rightarrow x_۱=۵۸/۶m$$ قابل قبول ، $۳۴۱m$ غیر قابل قبول

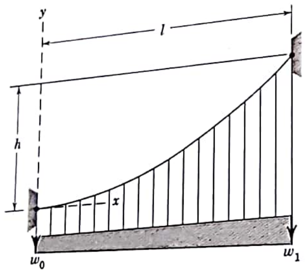
$$at\ B:\left\{T_۰=\frac{۴۰(۹/۸۱)x_۱^۲}{۲(۲۰)}\right. \xrightarrow{x=۵۸/۶} T_۰=۳۳۶۸۷/۱۴۷۶N\approx ۳۳/۷kN$$

$$T^۲=T_۰^۲=\omega^۲x^۲$$

$$T_B=\sqrt{(۳۳/۷)^۲+((۴۰)(۹/۸۱)(۱۰^{-۳}))^۲(۵۸/۶)^۲}=۴۰/۸kN$$

$$T_A=\sqrt{(۳۳/۷)^۲+((۴۰)(۹/۸۱)(۱۰^{-۳}))^۲(۱۰۰-۵۸/۶)^۲}=۳۷/۴kN$$

۱۶۲-۵. یک کابل سبک دارای شیب صفر در پایین‌ترین نقطه‌اش متصل است و بار واحدی که به طور خطی با x از $\omega_۰$ به $\omega_۱$ تغییر پیدا می‌کند در شکل نشان داده شده است. عبارتی را برای تنش $T_۰$ در کابل در مبدأ استخراج کنید.

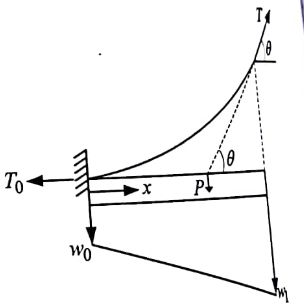


حل:

$$p=w_۰L+\frac{w_۱L}{۲}-\frac{w_۰L}{۲}$$

$$\overline{X}=\frac{(w_۰L)(\frac{L}{۲})-(\frac{w-w_۰}{۲})L(\frac{۲}{۳}L)}{p}=\frac{۱}{۳}\left(\frac{w_۰+۲w_۱}{w_۰+w_۱}\right)$$

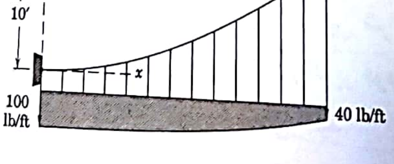
همچنین داریم:



$$\left.\begin{aligned}T\cos\theta&=T_۰\\ \tan\theta&=\frac{p}{T_۰}\\ T\sin\theta&=p\end{aligned}\right\}\Rightarrow T_۰=\frac{p}{\tan\theta}$$

$$T_۰=\frac{(L-(\frac{L}{۲})(\frac{w_۰+۲w_۱}{w_۰+w_۱}))(\frac{w_۱+w_۰}{۲})(L)}{h}=\frac{w_۰L^۲}{۲h}\left(۱+\frac{w_۱-w_۰}{۳w_۰}\right)$$

۱۶۳-۵. کابل قابل اغماض از جرم، از دو نقطه ثابت که در زیر نشان داده شده است، آویخته شده است و تنش در تکیه‌گاه پایین‌تر برای نگهداشتن شیب صفر کابل در آن نقطه مناسب است. کابل یک واحد بار ω را تحمل می‌کند که از $۱۰۰lb/ft$ در $x=۰$ تا $۴۰lb/ft$ در $x=۳۰ft$ به صورت نسبتی از $x^۲$ کاهش می‌یابد. معادله منحنی فرض شده به وسیله کابل را تعیین کنید.

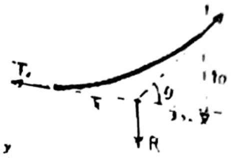


حل:

$$W=ax^2+b \Rightarrow \begin{cases} x=0 \ , \ W=100 \Rightarrow ax^2+b=100 \Rightarrow b=100 \\ x=20 \ , \ W=40 \Rightarrow 40=a20^2+100 \Rightarrow a=-\frac{1}{15} \Rightarrow W=100-\frac{1}{15}x^2 \end{cases}$$

$$R=\int_0^{20}\left(100-\frac{x^2}{15}\right)dx=100x-\frac{x^3}{45}\Big|_0^{20}=2200\,lb$$

$$\bar{x}=\frac{1}{R}\int_0^{20}\left(100x-\frac{x^3}{15}\right)dx=\frac{1}{R}\left(50x^2-\frac{x^4}{60}\right)_0^{20}=13/125$$

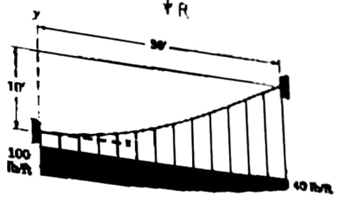


$$\begin{cases} T\cos\theta=T_0 \\ T\sin\theta=R \end{cases} \Rightarrow T_0=\frac{R}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow T_0=\frac{R(20-13/125)}{10}=4050\,lb$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{W}{T_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{T_0}\left(100x-\frac{x^3}{45}\right)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{T_0}\left(50x^2-\frac{x^4}{180}\right) \Rightarrow y=0/123x^2-0/00000137x^4 - ft$$



۵-۱۶۴. در سری توالی، معادله ۵-۱۹ را بسط داده و برحسب $\cosh(\mu x/T_0)$ بنویسید و نشان دهید که تنها با استفاده از دو جمله اول این سری معادله ۵-۱۴ برای سهمی به دست آورید. (برای بسط تابع هایپربولیک به بخش $C/8$ از پیوست C رجوع کنید.)

حل:

$$y=\frac{T_0}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu x}{T_0}-1\right]=\frac{T_0}{\mu}\left[1+\frac{(\frac{\mu x}{T_0})^2}{2!}+\frac{(\frac{\mu x}{T_0})^4}{4!}+\cdots-1\right]$$

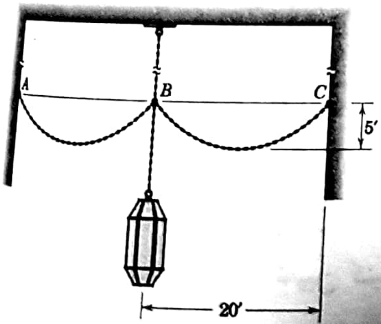
$$\Rightarrow y=\frac{T_0}{\mu}\left[\frac{(\frac{\mu x}{T_0})^2}{2!}+\frac{(\frac{\mu x}{T_0})^4}{4!}+\cdots\right]$$

اگر فقط دو جلمه اول از بسط توانی را اختیار کنیم معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$y=\frac{T_0}{\mu}\times\frac{(\frac{\mu x}{T_0})^2}{2!} \Rightarrow y=\frac{\mu x^2}{2T_0}$$

هرگاه T_0 خیلی بزرگ باشد تقریب بالا درست است و چون در این حالت طناب به صورت افقی قرار می‌گیرد وزن واحد طول طناب (μ) همان نیروی وارد بر طناب به ازای واحد طول افقی W می‌باشد که منجر به همان معادله ۵-۱۴ می‌شود:

$$y=\frac{\mu x^2}{2T_0}$$



۵-۱۶۵. یک نگهدارنده سبک از سقف یک ایوان بیرونی آویخته شده است. چهار زنجیر، که در تصویر دو تا نشان داده شده است، از حرکت بیش از حد نگهدارنده در بین شرایط طوفانی جلوگیری به عمل می‌آورد. اگر وزن زنجیرها ۱۵ پوند بر فوت طول باشد، تنش زنجیر در C و طول L زنجیر BC را تعیین کنید.

حل:

... (معادله ۵-۱۹) داریم:

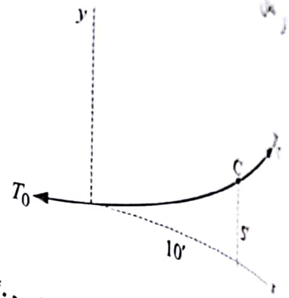
$$y = \frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_\circ} - ۱\right)$$

$$at\ C:\ ۵ = \frac{T_\circ}{\mu}\cosh\left(\frac{۱۰}{T_\circ/\mu} - ۱\right) \quad , \quad \mu = ۱۵\frac{lb}{ft}$$

... حل عددی معادله فوق داریم:

$$\frac{T_x}{\mu} = ۱۰/۷۲\ ft$$

$$at\ C:\ T_C = ۱۶۱/۱ + ۵(۱۵) = ۲۳۶\,lb$$

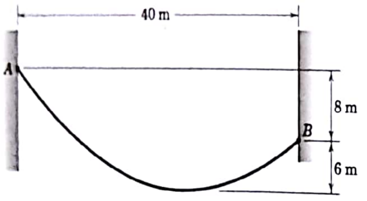


از معادله ۵-۲۰ داریم:

$$S = \frac{T_\circ}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_\circ}$$

$$S = ۱۰/۷۴\sinh\frac{۱۰}{۱۰/۷۴} = ۱۱/۱۵\ ft \Rightarrow L = ۲S = ۲۳\ ft$$

۵-۱۶۶. طول L کابل را پیدا کنید هنگامی که از دو نقطه A و B آویخته شده است.



حل:

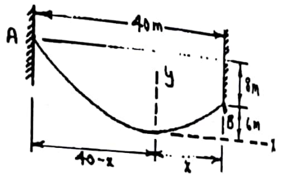
$$y = \frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_\circ} - ۱\right)$$

$$\text{در } B:\ ۶ = \frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{x}{T_\circ/\mu} - ۱\right) \quad (۱)$$

$$\text{در } A:\ ۱۴ = \frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{x - ۴۰}{T_\circ/\mu} - ۱\right) \quad (۲)$$

با حل عددی معادلات (۱) و (۲) این نتایج به دست می‌آید:

$$x = ۱۶/۰۷\,m \quad , \quad \frac{T_\circ}{\mu} = ۲۲/۵\,m$$



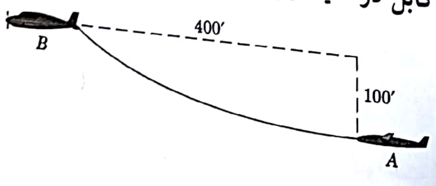
$$S = \frac{T_\circ}{\mu}\sinh\frac{x}{T_\circ/\mu}$$

$$\text{در } B:\ S_B = ۲۲/۵\sinh\frac{۱۶/۰۷}{۲۲/۵} = ۱۷/۴۸\,m$$

$$\text{در } A:\ S_A = ۲۲/۵\sinh\frac{۴۰ - ۱۶/۰۷}{۲۲/۵} = ۲۸/۷\,m$$

$$L = S_A + S_B = ۲۸/۷ + ۱۷/۴۸ = ۴۶/۲\,m$$

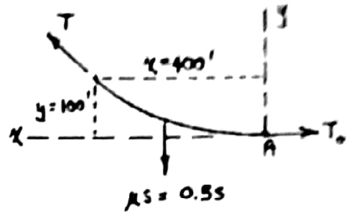
۵-۱۶۷. گلیدر (هواپیمای بدون موتور) A در سطح پرواز در حال کشیده شدن است و $۴۰۰\,ft$ عقب‌تر و $۱۰۰\,ft$ پایین‌تر از هواپیمای B کشیده می‌شود. نقطه تماس کابل در گلیدر به صورت افقی است. وزن کابل ۰/۵ پوند بر فوت طول است. تنش افقی $T_\circ$ در کابل متصل به گلیدر را محاسبه کنید. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و جوابتان را با تقریب کابل که به صورت سهموی در نظر گرفته شده است، مقایسه کنید.



حل:

معادله (۵-۱۹) برای کابل زنجیری:

$$y=\frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right)-1\right) \Rightarrow 100=\frac{T_\circ}{0/5}\left(\cosh\left(\frac{0/5(400)}{T_\circ}\right)-1\right)$$

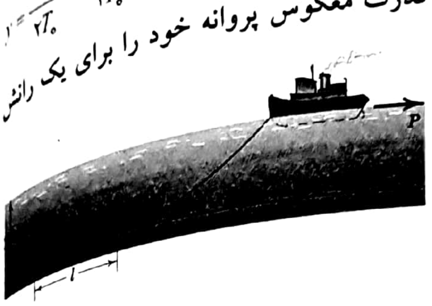


حل عددی : $T_\circ=208\,lb$

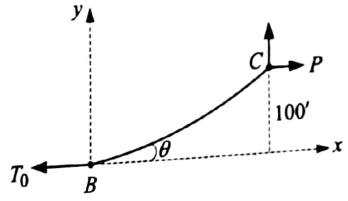
معادله (۵-۱۴) برای کابل سهموی:

$$y=\frac{wx^2}{2T_\circ}=\frac{\mu x^2}{2T_\circ} \Rightarrow T_\circ\cong\frac{\mu x^2}{2y}=\frac{0/5(400)^2}{2(100)}=400\,lb$$

۵-۱۶۸. در محیطی، لنگر کشتی در $100\,ft$ آب، کشتی کوچک قدرت معکوس پروانه خود را برای یک رانش معکوس به اندازه $P=800\,lb$ به وجود می‌آورد. در مجموع $400\,ft$ زنجیر لنگر، از لنگر تا قسمت جلوی کشتی می‌رسد. وزن زنجیر $1/63\,lb/ft$ است و نیروی بالارونده به خاطر شناوری آب $0/21\,lb/ft$ است. طول L زنجیر در تماس با کف دریا را محاسبه کنید.



حل:



$$\mu=1/63-0/21=1/42\frac{lb}{ft}$$

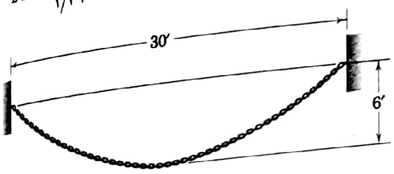
$$T_\circ=P \Rightarrow T_\circ=800\,lb$$

$$y=\frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_\circ}-1\right) \Rightarrow 100=\frac{800}{1/42}\left(\cosh\frac{\mu x}{800}-1\right)$$

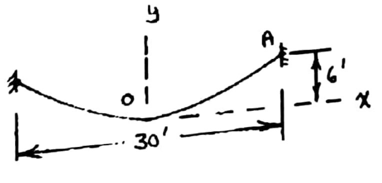
$$\Rightarrow x=330/90\,ft$$

$$L_{BC}=\frac{800}{1/42}\sinh\frac{(1/42)(330/9)}{800}=350/2\,ft \Rightarrow L+L_{BC}=400 \Rightarrow L=49/7\,ft$$

۵-۱۶۹. کل طول L زنجیری با یک شکم ۶ فوتی هنگامی که از دو نقطه روی خط افقی یکسان $30\,ft$ از یکدیگر فاصله دارند، را پیدا کنید.



حل:



$$6=\frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{\mu(15)}{T_\circ}\right)-1\right]$$

حل عددی : $\frac{T_\circ}{\mu}=19/68\,m$

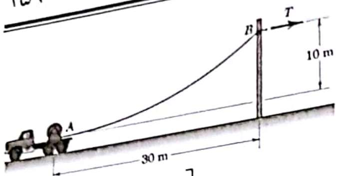
معادله (۵-۲۰) : $S=\frac{L}{2}=\frac{T_\circ}{\mu}\sinh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right)$

$$\Rightarrow L=2\left(\frac{T_\circ}{\mu}\right)\sinh\left(\frac{\mu(15)}{T_\circ}\right)=2(19/68)\sinh\left(\frac{15}{9/68}\right)=33/0\,ft$$

۵-۱۷۰. کشش T موردنیاز برای کشش یکنواخت کابل که دیرک را حمایت می‌کند، محاسبه کنید. از تأثیرات

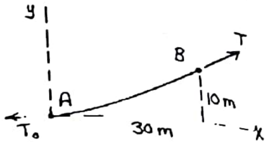
Scanned by CamScanner

اصطکاک در تکیه‌گاه صرف‌نظر کنید. کابل در نقطه A به صورت افقی است که دارای جرم $3\,kg/m$ است. همچنین طول کابـل را از نقطه A تا B پیدا کنید.



حل:

با استفاده از حل عددی



$$10 = \frac{T_0}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu 30}{T_0} - 1\right]$$

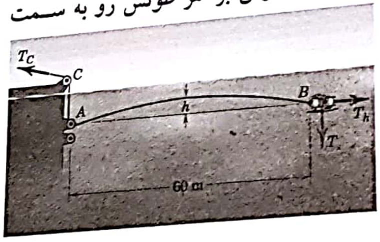
$$\frac{T_0}{\mu} = 46.6\,N$$

$$T_0 = 46.6(29.4) = 1371\,N$$

$$T = T_0 + \mu y = 1371 + 29.4(10) = 1665\,N$$

$$S = \frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_0} = 46.6\sinh\frac{30}{46.6} = 32.1\,m$$

۵-۱۷۱. یک وسیله رباتیک کوچک در زیر آب از راه دور کنترل می‌شود و وسعت قرارگیری آن در شکل زیر نشان داده شده است. وسیله شناور طبیعتاً وابسته به پرتابگر برای کنترل واقعی و عمودی می‌باشد. محـدوده آن برای یک شناور خیلی سبک طراحی شده است که یک نیروی خالص ۰٫۰۲۵ نیوتن بر متر طولش رو به سمت بالا عمل می‌کند. در آنجا ۶۰٫۵ متر کابل بین نقاط A و B وجود دارد. نیروهای افقی و عمودی که وسیله باید برروی کابل در B اعمال کند (که در شکل زیر نشان داده شـده اسـت) را تعیـین کنید. همچنین فاصله h را نیز پیدا کنید. فرض کنید که محدوده بین نقاط A و B کاملاً زیرآب است.



حل:

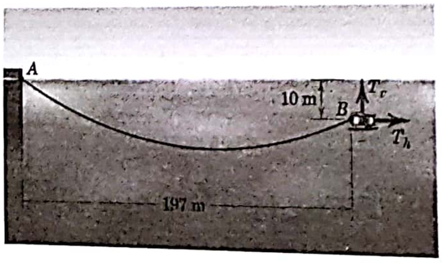
$$S = \frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_0}$$

$$\frac{60.5}{2} = \frac{T_0}{0.025}\sinh\left(\frac{(0.025)(30)}{T_0}\right) \xrightarrow{\text{با حل عددی}} T_0 = 3.36\,N = T_h$$

$$T_V = (60.5)(0.025) = 0.756\,N$$

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right) \Rightarrow h = \frac{3.36}{0.025}\left(\cosh\left(\frac{0.025\times 30}{T_0}\right) - 1\right) \Rightarrow h = 3.36\,m$$

۵-۱۷۲. وسیله رباتیک کنترل از راه دور مسئله ۵-۱۷۱ اکنـون در محدوده ۲۰۰ متـری متـصل شـده اسـت و یـک نیـروی شناوری منفی ناچیزی دارد کـه یـک نیـروی خـالص ۰٫۰۲۵ نیوتن بر متر طولش روی آن در جهت پایین عمـل مـی‌کنـد. مؤلفه محدود افقی و عمودی که باید وسیله در آن موقعیـت نشان داده شده نگه داشته شود را تعیین کنید.



حل:

Scanned by CamScanner

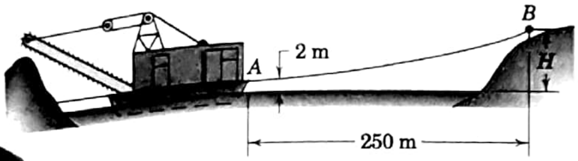
$$S=\frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_0}\ \Rightarrow\ ۲۰۰=\frac{T_0}{۰٫۰۲۵}\sinh\left(\frac{۰٫۰۲۵\times ۱۹۷}{T_0}\right)\xrightarrow{\text{حل عددی}} T_0=۸٫۵۲\,N=T_h \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{aligned} at\ \ A:\ h+۱۰&=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)-۱\right)\\ at\ \ B:\ h&=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu(۱۹۷-x)}{T_0}\right)-۱\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ x=۱۱۵٫۸\,m$$

مقادیر به دست آمده را در معادله (۱) جایگزین می‌کنیم و برای نقطه B داریم:

$$S=۸۲٫۴\ \Rightarrow\ T_V=(۸۲٫۴)(۰٫۰۲۵)=۲٫۰۶\,N$$

۵-۱۷۳. یک ماشین لایروبی شناور توسط یک کابل که به انتهای کشتی بسته شده است، لنگر انداخته است که یک جهت افقی در محل اتصال A دارد و ۲۵۰ متر از لنگرگاه به صورت افقی فاصله دارد. کشش $۳۰۰kN$ برای کابل در نقطه A موردنیاز است. اگر کابل دارای جرم ۲۲ کیلوگرم در هر متر طول باشد، ارتفاع H موردنیاز لنگرگاه تا سطح بالایی آب را محاسبه کنید و طول s کابل را بین نقاط A و B پیدا کنید.



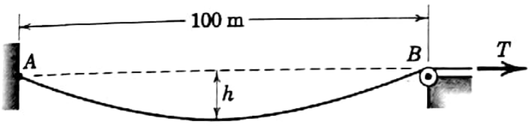
حل:

$$y=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)-۱\right)\ \Rightarrow\ H-۲=\left(\frac{۳۰۰(۱۰^۳)}{۲۲(۹٫۸۱)}\right)\cosh\left(\frac{۲۲(۹٫۸۱)(۲۵۰)}{۳۰۰(۱۰^۳)}-۱\right)$$

$$H=۲۴٫۵\,m$$

$$s=\frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_0}=\frac{۳۰۰(۱۰^۳)}{۲۲(۹٫۸۱)}\sinh\frac{۲۲(۹٫۸۱)۲۵۰}{(۳۰۰)۱۰^۳}=۲۵۱\,m$$

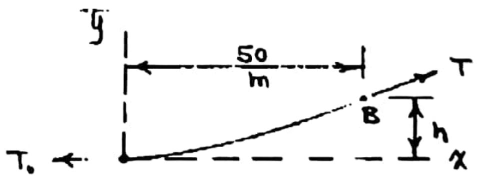
۵-۱۷۴. یک کابل که وزنی معادل ۵۰ نیوتن بر متر طول دارد در نقطه A بسته شده است و از روی پولی کوچک در نقطه B روی سطح یکسان تحت یک تنش T عبور می‌کند. حداقل مقدار T برای حفظ کابل و انحناء متناظر h را تعیین کنید.



حل:

$$\mu=۵۰\frac{N}{m}$$

با حذف T_0 از بین معادلات



$$T=(T-\mu y)\cosh\frac{\mu x}{T-\mu y}$$

$$at\ \ B:\ T=T-۵۰h)\cosh\frac{۵۰(۵۰)}{T-۵۰h}$$

$$or\ \ T=\beta\cosh\frac{۲۵۰۰}{\beta}\qquad(\beta=T-۵۰h)$$

برای حداقل T ، $\dfrac{dT}{d\beta}=\cosh\dfrac{۲۵۰۰}{\beta}-\dfrac{۱}{\beta}\sinh\dfrac{۲۵۰۰}{\beta}$

با حل عددی : $\beta=۲۰۸۴N$

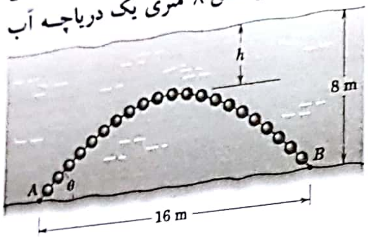
Scanned by CamScanner

$T = ۲۰۸۲ \cosh \frac{۲۵۰۰}{۲۰۸۲} = ۲۷۷۲\,N$ ، $h = ۲۲/۸\,m$

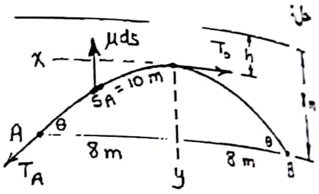
$\beta = T - ۵۰h \;:\; ۲۰۸۲ = ۲۷۷۲ - ۵۰h$

(نکته : $\beta = T_\circ\,!$)

۵-۱۷۵. یک سری شناورهای کروی به اندازه مساوی مطابق شکل قرار گرفته شده‌اند و به طور کاملاً ایمن به یک کابل انعطاف‌پذیر به طول ۲۰ متر بسته شده‌اند. انتهای A و B به فاصله ۱۶ متر از یکدیگر در عمق ۸ متری یک دریاچه آب شیرین بسته شده‌اند. شناورها و کابل در مجموع دارای وزن ۱۰۰ نیوتن بر متر طول کابل می‌باشد و شناور بودن در آب تولید یک نیروی رو به بالا ۵۶۰ نیوتن بر متر طول کابل می‌کند. عمق h زیر سطح تا بالای خط شناورها را محاسبه کنید. همچنین زاویه θ ساخته شده به وسیله خط شناورها با افق در نقطه A را پیدا کنید.



حل:



$\mu = ۵۶۰ - ۱۰۰ = ۴۶۰ \frac{N}{m}$

(۵-۲۰) معادله : $S = \frac{T_\circ}{\mu} \sinh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) \Rightarrow ۱۰ = \frac{T_\circ}{۴۶۰} \sinh\left(\frac{۴۶۰(۸)}{T_\circ}\right)$

حل عددی یا ترسیمی : $T_\circ = ۳۱۱۰\,N$

(۵-۲۱) معادله : $T = T_\circ \cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) \Rightarrow T_A = ۳۱۱۰ \cosh\left(\frac{۴۶۰(۸)}{۳۱۱۰}\right) = ۵۵۵۰\,N$

(۵-۲۲) معادله : $T = T_\circ + \mu y$

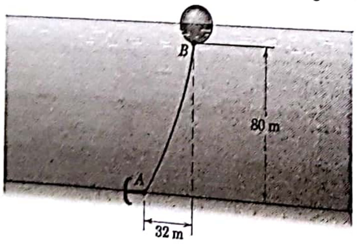
$@\,A : ۵۵۰۰ = ۳۱۱۰ + ۴۶۰y \Rightarrow y = ۵/۳۱\,m$

$h = ۸ - ۵/۳۱ = ۲/۶۹\,m$

(۵-۱۹) معادله : $\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \tan\theta = \sinh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) \Rightarrow \tan\theta = \sinh\left(\frac{۴۶۰(۸)}{۳۱۱۰}\right) = ۱/۴۸$

$\Rightarrow \theta = ۵۵/۹^\circ$

۵-۱۷۶. یک جسم شناور کروی برای نشان دادن مسیر حرکت مسابقات قایق‌های بادی استفاده می‌شود که در شکل زیر نشان داده شده است. یک جریان آب از چپ به راست وجود دارد که باعث دراگ افقی روی شناور می‌شود. تأثیر جریان روی کابل می‌تواند قابل اغماض باشد. طول کابل بین نقاط A و B، ۸۷ متر است و جرم مؤثر کابل $۲kg/m$ است هنگامی که شناور بودن کابل برای آن محاسبه شده است. نیروها را در نقاط A و B تعیین کنید.



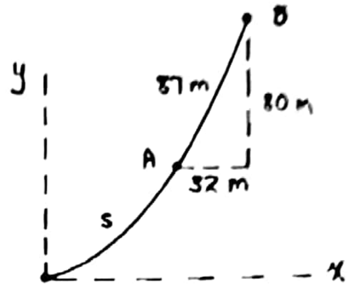
حل:

$\mu = ۲(۹/۸۱) = ۱۹/۶۲ \frac{N}{m}$

$y = \frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh \frac{\mu x}{T_\circ} - ۱\right)$

$$A:\ y_A=\frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x_A}{T_\circ}-۱\right)$$

$$B:\ y_A+۸۰=\frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu}{T_\circ}(x_A+۳۲)-۱\right)$$



$$S=\frac{T_\circ}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_\circ}$$

$$A:\ S=\frac{T_\circ}{\mu}\sinh\frac{\mu x_A}{T_\circ}$$

$$B:\ S+۸۷=\frac{T_\circ}{\mu}\sin\frac{\mu}{T_\circ}(x_A+۳۲)$$

با حل عددی : $x_A=۲۴/۰m$, $y_A=۱۲/۳۰m$

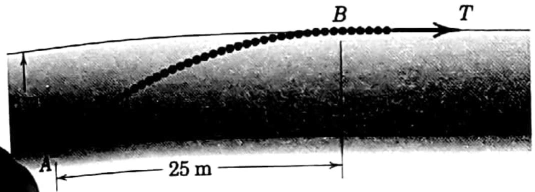
$\frac{T_\circ}{\mu}=۲۵/۲m$, $S=۲۷/۸m$

$T_\circ=۲۵/۲(۱۹/۶۲)=۴۹۵N$

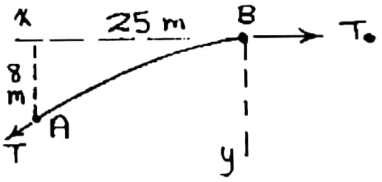
$T_A=T_\circ+\mu y_A=۴۹۵+۱۹/۶۲(۱۲/۳۰)=۷۳۶N$

$T_B=T_\circ+\mu y_B=۴۹۵+۱۹/۶۲(۹۲/۳)=۲۳۱۰N$

۵-۱۷۷. تعداد زیادی شناورساز کوچک به یک کابل متصل شده‌اند و اختلاف بین شناوری و وزن، یک نیروی رو به بالای خالص ۳۰ نیوتن در هر متر طول کابل است. نیروی T که باید برای کابل نشان داده شده در شکل به کار رود را تعیین کنید.



حل:



$\mu=۳۰\frac{N}{m}$

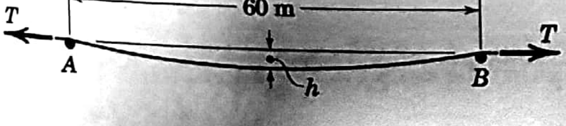
معادله (۵-۱۹) : $y=\frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right)-۱\right]$

$@A:\ ۸=\frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{۲۵\mu}{T_\circ}\right)-۱\right]$

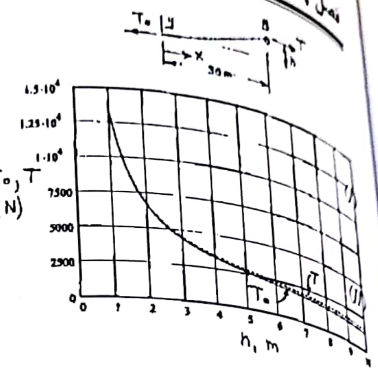
حل عددی : $\frac{T_\circ}{\mu}=۴۰/۳m$

$T_\circ=۴۰/۳(۳۰)=۱۲۱۰N$

۵-۱۷۸. یک کابل اتصال خدمه می‌خواهد وابستگی کشش T به میزان شکم کابل h را برقرار کند. هر دو کشش حداقل $T_\circ$ و کشش T در تکیه‌گاه A و B که تابعی از h ۱۰ ≥ h ≥ ۱ است را ترسیم کنید. جرم کابل بر واحد طول برابر $۳kg/m$ است. مقدارهای $T_\circ$ و T را برای $h=۲m$ تعیین کنید.



حل:



با استفاده از معادله (۵-۱۹) در نقطهٔ B داریم:

$$\mu = \rho g = ۳(۹/۸۱) = ۲۹/۴ \frac{N}{m}$$

$$h = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) - ۱\right]$$

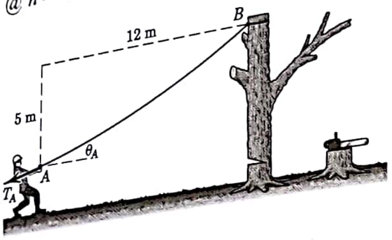
با استفاده از معادله (۵-۲۲) در نقطه B داریم:

$$T = T_\circ + \mu h$$

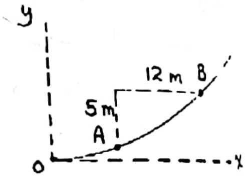
با حل عددی معادله (I) و سپس معادلهٔ (II) در محدوده $۱m \le h \le ۱۰m$ داریم:

$$@\, h = ۲m \;\Rightarrow\; T_\circ = ۶۶۳۰N \quad ; \quad T = ۶۶۹۰N$$

۵-۱۷۹. مسئول برش و قطع درختان پوسیده تلاش می‌کند تا تنه درخت اره شده را به پایین بکشد. او یک کشش $T_A = ۲۰۰N$ را در یک طناب ایجاد می‌کند که دارای جرم ۰/۶ کیلوگرم بر متر طولش می‌باشد. زاویه θ_A که او می‌کشد، طول L طناب بین نقاط A و B و کشش T_B در نقطه B را تعیین کنید.



حل:



$$\mu = ۰/۶(۹/۸۱) = ۵/۸۹ \frac{N}{m}$$

$$A:\; y_A = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu x_A}{T_\circ} - ۱\right]$$

$$B:\; y_A + ۵ = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu(x_A + ۱۲)}{T_\circ} - ۱\right]$$

$$۲۰۰ = T_\circ + \mu y_A$$

$$x_A = ۷/۳۷m \;,\; y_A = ۰/۸۲۳m \;,\; T_\circ = ۱۹۵/۲N$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{\mu x}{T_\circ}$$

$$\theta_A = \tan^{-1}\left[\sinh\frac{(۵/۸۹)(۷/۳۷)}{۱۹۵/۲}\right] = ۱۲/۶۴^\circ$$

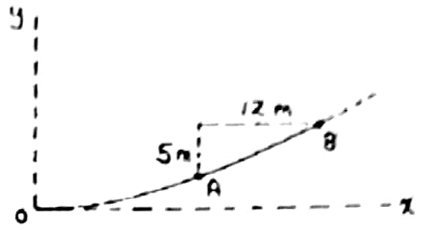
$$s_B - s_A = \frac{۱۹۵/۲}{۵/۸۹}\left[\sinh\frac{۵/۸۹(۷/۳۷ + ۱۲)}{۱۹۵/۲}\right] - \sinh\frac{۵/۸۹(۷/۳۷)}{۱۹۵/۲} = ۱۳/۰۶m = L$$

$$T_B = ۱۹۵/۲ + ۵/۸۹(۰/۸۲۳ + ۵) = ۲۲۹N$$

۵-۱۸۰. در مسئله ۵-۱۷۹ تجدیدنظر کنید، اگر طول طناب بین نقاط A و B، ۱۳/۰۲m باشد تعیین کنید کشش T_A که شخص مسئول باید در نقطه A اعمال کند، زاویه θ_A که او می‌کشد، کشش T_B در نقطه B و زاویه θ_B که طناب با افق در نقطه B می‌سازد. طناب دارای جرم ۰/۶ کیلوگرم بر متر طولش می‌باشد.

Scanned by CamScanner

حل:



$$\mu = ۰/۶(۹/۸۱) = ۵/۸۹\frac{N}{m}$$

$$A \ : \ y_A = \frac{T_۰}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu x_A}{T_۰} - ۱\right]$$

$$B \ : \ y_A + ۵ = \frac{T_۰}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu(x_A + ۱۲)}{T_۰} - ۱\right]$$

$$s_B - s_B = ۱۳/۰۲ = \frac{T_۰}{\mu}\left[\sinh\frac{\mu(x_A + ۱۲)}{T_۰} - \sinh\frac{\mu x_A}{T_۰}\right]$$

از حل عددی سه معادله فوق:

$$x_A = ۱۷/۳۷\,m \quad , \quad y_A = ۲/۶۳\,m \quad , \quad T_۰ = ۳۳۹\,N$$

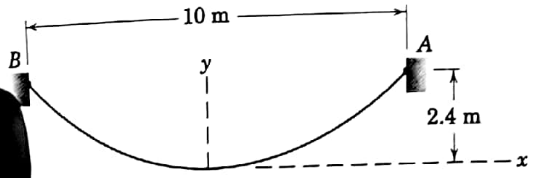
$$T_A = ۳۳۹ + ۵/۸۹(۲/۶۳) = ۳۵۵\,N$$

$$\theta_A = \tan^{-۱}\left[\sinh\frac{\mu x_A}{T_۰}\right] = \tan^{-۱}\left[\sinh\frac{۵/۸۹(۱۷/۳۴)}{۳۳۹}\right] = ۱۶/۹۸^\circ$$

به طور مشابه $T_B = ۳۳۹ + ۵/۸۹(۲/۶۳ + ۵) = ۳۸۴\,N$

$$\theta_B = \tan^{-۱}\left[\sinh\frac{۵/۸۹(۱۷/۳۴ + ۱۲)}{۳۳۹}\right] = ۲۸/۰^\circ$$

۵-۱۸۱. کابلی دارای جرم به اندازه $۱/۲kg/m$ و دارای شکمی به اندازه ۲/۴ متر است که از دو نقطه A و B روی خط افقی یکسان به فاصله $۱۰m$ از یکدیگر قرار دارند، آویخته شده است. به منظور مقایسه، طول L کابل موردنیاز را تعیین کنید و نمودارش را برای دو مورد (الف) فرض یک هندسه سهموی (ب) استفاده از مدل زنجیروار مناسب ترسیم کنید. برای اینکه بین دو مورد بیشتر تشخیص داده شود، اختلاف $(y_C - y_P)$ که تابعی از x است را ترسیم کنید که C و P به ترتیب به زنجیروار و سهموی برمی‌گردد. در صورت نیاز به تقریب از معادلات (۵-۱۶) و (۵-a۱۶) استفاده کنید.



حل:

$$w = \mu = ۱/۲(۹/۸۱) = ۱۱/۷۷\frac{N}{m}$$

$$y = \frac{wx^۲}{۲T_۰} \ @ \ A \ : \ ۲/۴ = \frac{۱۱/۷۷(۵)^۲}{۲T_۰}$$

$$T_۰ = ۶۱/۳\ N$$

همچنین $y_p = \frac{۱۱/۷۷\,x^۲}{۲(۶۱/۳)} = ۰/۰۹۶x^۲$

$$s_A = \ell_A\left[۱ + \frac{۲}{۳}\left(\frac{h_A}{\ell_A}\right)^۲ - \frac{۲}{۵}\left(\frac{h_A}{\ell_A}\right)^۴ + \dots\right] = ۵\left[۱ + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲/۴}{۵}\right)^۲ - \frac{۲}{۵}\left(\frac{۲/۴}{۵}\right)^۴ + \dots\right] = ۵/۶۶\,m$$

همچنین طول موردنیاز برابر است با:

$$L_p = ۲s_A = ۱۱/۳۲\,m$$

Scanned by CamScanner

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right)$$

$$A \;:\; 1.2 = \frac{T_0}{11.77}\left[\cosh\frac{11.77(5)}{T_0} - 1\right]$$

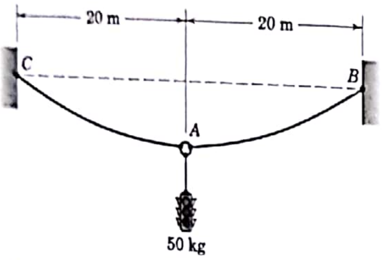
حل عددی : $T_0 = 65.5\,N$

همچنین $y_C = 5.57[\cosh(0.1796x) - 1]$

$$s_A = \frac{65.5}{11.77}\sinh\frac{11.77(5)}{65.6} = 5.70\,m$$

$$L_C = 2s_A = 11.40\,m$$

طول موردنیاز برابر است با:



۵-۱۸۲. یک چراغ راهنمایی به وزن $50kg$ به وسیله دو کابل ۲۱ متری آویزان شده است که دارای جرم ۱/۲ کیلوگرم بر متر طول است. انحنای عمودی δ حلقه اتصال A نسبت به موقعیتش قبل از اینکه چراغ راهنمایی اضافه شود را تعیین کنید.

$$\begin{cases}\mu = 1.2(9.81) = 11.77\,N/m \\ L = 21\,m\end{cases}$$

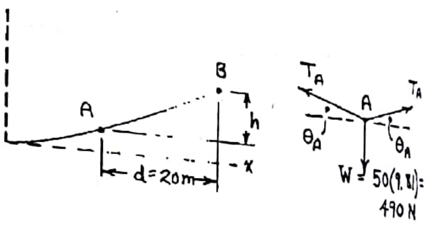
حل:

از نمودار آزاد حلقه اتصال A داریم:

$$+\uparrow \sum F = 0 \Rightarrow 2T_A \sin\theta_A - w = 0 \Rightarrow [T_0 + \mu y_A]\sin\left[\tan^{-1}\left(\sinh\left(\frac{\mu x_A}{T_0}\right)\right)\right] - \frac{w}{2} = 0 \qquad (I)$$

با استفاده از معادله (۵-۱۹) در نقطه A داریم:

$$y_A = \frac{T_0}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{\mu x_A}{T_0}\right) - 1\right] \qquad (II)$$



با استفاده از معادله (۵-۱۹) در نقطه B داریم:

$$y_A + h = \frac{T_0}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{\mu(x_A + d)}{T_0}\right) - 1\right] \qquad (III)$$

معادله (۵-۲۰) : $$S_B - S_A = \frac{T_0}{\mu}\left[\sinh\left(\frac{\mu(x_A + d)}{T_0}\right) - \sinh\left(\frac{\mu x_A}{T_0}\right)\right] = L \qquad (IV)$$

با حل معادلات (I) تا (IV) داریم:

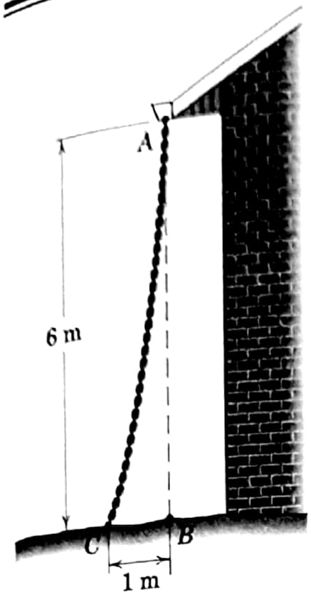
$$w = 0 \Rightarrow h = 5.57\,m$$

$$w \neq 0 \Rightarrow h = 6.30$$

$$\Rightarrow \delta = 6.30 - 5.57 = 0.73\,m$$

۵-۱۸۳. به خاطر دلایل زیبایی ساختمان از زنجیرها بعضی مواقع به جای آبرو ساختمان، استفاده می‌شود. معمار ساختمان یک زنجیر عمودی ۶ متری را از A تا B مشخص کرد، اما سازنده تصمیم گرفت از ۶/۱ متر زنجیر از نقطه A تا C (که در شکل نشان داده شده است) به خاطر اینکه آب در فاصله دورتر از ساختمان بریزد، استفاده کند. با این کار، سازنده چند درصد n بر مقدار نیروی وارد بر آبرو A نسبت به طرح معمار

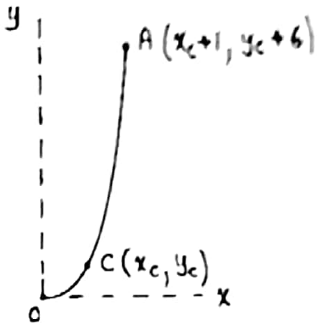
می‌افزاید. وزن واحد طول زنجیر $100\,N$ است.



حل:

طرح معمار : $(T_A)_{arch} = 6(100) = 600\,N$

طرح سازنده :



$$\text{(۱۹-۵) معادله} : \quad y = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) - 1\right]$$

$$@\ C : \quad y_C = \frac{T_\circ}{100}\left[\cosh\left(\frac{100 x_C}{T_\circ}\right) - 1\right]$$

$$@\ B : \quad y_C + 6 = \frac{T_\circ}{100}\left[\cosh\left(\frac{100 x_C}{T_\circ}\right) - 1\right]$$

$$\text{(۲۰-۵) معادله} : \quad S = \frac{T_\circ}{\mu}\sinh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_A - S_C = 6/1 = \frac{T_\circ}{100}\left[\sinh\left(\frac{100(x_C+1)}{T_\circ}\right) - \sinh\left(\frac{100 x_C}{T_\circ}\right)\right]$$

با حل عددی سه معادله داریم:

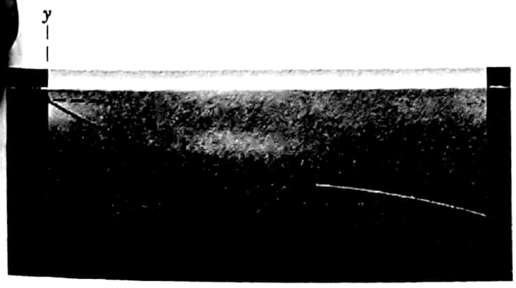
$$x_C = 1/071\,m \quad ; \quad y_C = 1/088\,m \quad ; \quad T_\circ = 65/5\,N$$

$$\text{(۲۲-۵) معادله} : \quad T = T_\circ + \mu y \quad \Rightarrow \quad T_A = 65/5 + 100(1/088 + 6) = 774\,N$$

$$\text{درصد افزایش} : \quad n = \frac{774 - 600}{600}(100) = 29/0\%$$ (!)

۱۸۴-۵. کابل زیرآبی از دو قسمت ساخته شده است. قسمت اول به طول ۱۳۰ متر که نیروی خالص ۰/۰۲۵ نیوتن بر متر طولش به سمت پایین برروی آن اعمال می‌شود. قسمت دوم به طول ۷۷ متر که نیروی خالص ۰/۰۲ نیوتن بر متر طولش به سمت بالا برروی آن اعمال می‌شود. شکل کلی کابل را رسم کنید. مختصات نقطه اتصال B چیست؟ (نکته: سطح سختی این مسئله متوسط رو به بالاست!)

حل:



$S_{AB} = 130\,m \quad , \quad x_C = 200\,m$

$\downarrow \omega_1 = 0/025\,N/m \quad , \quad y_C = -50\,m$

$S_{BC} = 77\,m \quad , \quad x_A = y_B = 0$

$\downarrow \omega_2 = 0/002\,N/m$

تعادل در راستای x

$$T\cos\theta = (T + dT)\cos(\theta + d\theta) = (T + dT)(\cos\theta - \sin\theta\, d\theta)$$

$$T\cos\theta = T\cos\theta - T\sin\theta\, d\theta + dT\cos\theta$$

$$d(T\cos\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = de = T_\circ$$

تعادل در راستای y

$$T\sin\theta + \omega dz = (T + dT)\sin(\theta + d\theta)$$

$$T\sin\theta + \omega dz = T\sin\theta + T\cos\theta\, d\theta + dT\sin\theta = d(T\sin\theta)$$

Scanned by CamScanner

$$d\left(\frac{T_0}{\cos\theta}\sin\theta\right)=\omega\,dx \Rightarrow d(T_0\tan\theta)=\omega\,dx$$

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\omega}{T_0}$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2} \Rightarrow s=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{\omega_1}{T_0}x+c_1 \Rightarrow y_1=\frac{\omega_1x^2}{2T_0}+c_1x+c_2$$

$$\frac{dy_2}{dx}=\frac{\omega_2}{T_0}x+c_3 \Rightarrow y_2=\frac{\omega_2x^2}{2T_0}+c_3x+c_4$$

$$S_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y_1'^2}\,dx=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1}{T_0}x+c_1\right)^2}\,dx$$

$$S_{BC}=\int_{x_B}^{x_C}\sqrt{1+y_1'^2}\,dx=\int_{x_B}^{x_C}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2}{T_0}x+c_3\right)^2}\,dx$$

مجهولات c_1 و c_2 و c_3 و c_4 و T_0 و x_B:

معلومات : $x_A=y_A=0$ ، 1) $y_1=\frac{\omega_1x_A^2}{2T_0}+c_1x_A+c_2=0 \Rightarrow c_2=0$

2) $y_2=\frac{\omega_2x_A^2}{2T_0}+c_3x_c+c_4=0 \Rightarrow -50=\frac{\omega_2(200)^2}{2T_0}+c_3(200)+c_4$

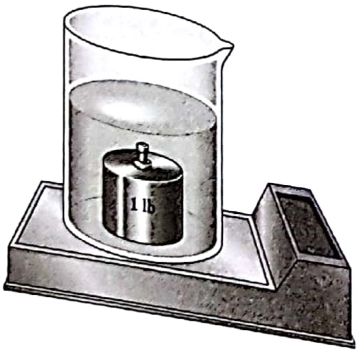
3) $120=\int_0^{x_B}\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega_1}{T_0}x+c_1\right)^2\right)}\,dx$

4) $77=\int_{x_B}^{200}\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega_2}{T_0}x+c_3\right)^2\right)}\,dx$

5) $\frac{\omega_1x_B^2}{2T_0}+c_1x_B=\frac{\omega_2x_B^2}{2T_0}+c_3x_B$

6) $\frac{\omega_1x_B}{T_0}+c_1=\frac{\omega_2x_B}{T_0}+c_3$

c_1 و c_3 و c_4 و T_0 از معادلات ۲ تا ۵ به دست می‌آید.



۱۸۵-۵. یک بشر آب شیرین در مکانی روی یک ترازو قرار دارد که ۱ پوند استوانه آهنی ضدزنگ به بشر اضافه می‌شود. نیروی عمودی که استوانه به کف بشر اعمال می‌کند چقدر است؟ با اضافه کردن وزنه، عددی که ترازو نشان می‌دهد، چقدر افزایش می‌یابد. پاسخ خود را توضیح دهید.

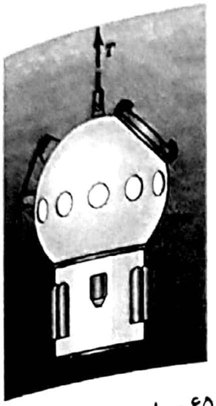
حل:

نیروی شناوری : $B=\mu_wV=\mu_w\frac{w}{\mu_{ss}}=\frac{62.4}{490}(1)=0.1273lb$

$$N + ۰/۱۲۷۳ - ۱ = ۰ \Rightarrow N = ۰/۸۷۳ lb$$
$$+\uparrow \sum F = ۰ \Rightarrow$$

بنابراین نیرویی که وزنه بر کف ظرف اعمال می‌کند برابر $۰/۸۷۳ lb$ (رو به پایین) است. با افزودن وزنه، عددی که ترازو نشان می‌دهد به اندازه $۱lb$ افزایش می‌یابد. این افزایش ناشی از افزایش فشار آب در کف ظرف در حین افزایش سطح آب است.

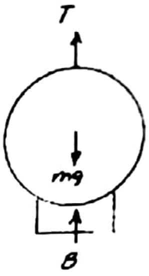
۵-۱۸۶. محفظه غواصی شناور دارای جرمی به اندازه $۶/۷ Mg$ است که شامل شخص، تجهیزات و کیسه شن می‌باشد. چه زمانی محفظه پایین‌تر از عمق ۱/۲ کیلومتری از سطح اقیانوس می‌رود؟ کشش کابل $۸kN$ است. حجم V کل جابه‌جا شده به وسیله محفظه را نیز محاسبه کنید.



حل:

$$T = ۸kN$$

$$mg = ۶/۷(۹/۸۱) = ۶۵/۷ kN$$



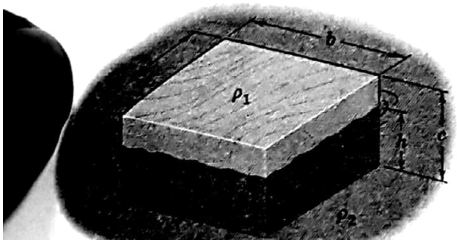
$$\sum F = ۰ \quad , \quad ۸ - ۶۵/۷ + B = ۰$$

$$B = ۵۷/۷ kN$$

$$B = \rho g V \quad , \quad V = \frac{۵۷/۷}{۱/۰۳(۹/۸۱)} = ۵/۷۱ m^۳$$

$$\rho_{salt\ water} = ۱/۰۳(۱۰^۳)\frac{kg}{m^۳}$$

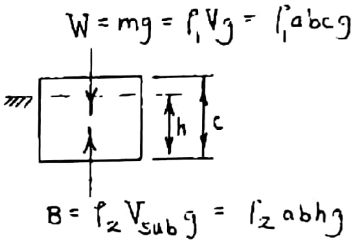
۵-۱۸۷. یک بلوک مستطیلی به چگالی $\rho_۱$ در یک مایعی به چگالی $\rho_۲$ شناور است. تعیین کنید نسبت $r = h/c$، h عمق غوطه‌وری بلوک می‌باشد. r را نیز برای یک بلوک چوب بلوط شناور در آب شیرین و برای فولاد شناور در جیوه ارزیابی کنید.



حل:

$$w = mg = \rho_۱ v g = \rho_۱ abcg$$

$$B = \rho_۲ v_{sub} g = \rho_۲ abhg$$

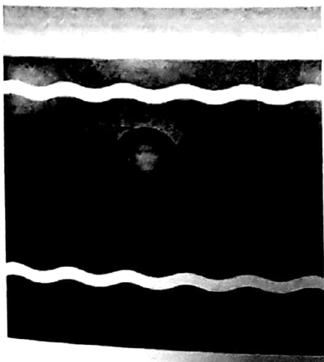


$$+\uparrow \sum F = ۰ \Rightarrow \rho_۲ abhg - \rho_۱ abcg \Rightarrow r = \frac{h}{c} = \frac{\rho_۱}{\rho_۲}$$

چوب بلوط در آب : $r = \frac{۸۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۸$

فولاد در جیوه : $r = \frac{۷۸۳۰}{۱۳۵۷۰} = ۰/۵۷۷$

۵-۱۸۸. یک کره شناور فلزی به وزن ۱۵۰ کیلوگرم و قطر $۹۰۰mm$ در آب شور مهار شده است که ۱۵ متر پایین سطح آب قرار دارد. جرم m بلوک آهنی بسته شده به شناور برای اینکه کشش در کابل لنگر که متصل به شناور است از $۱/۵kN$ تجاوز پیدا نکند را پیدا کنید. با صرف‌نظر کردن تغییرات در دانسیته آب، آیا نیروی شناوری وابسته به عمق شناوری است؟



حل:

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow B - W - T = ۰ \Rightarrow W = B - T$$

Scanned by CamScanner

$$B=\rho gV=(۱۰۲۹)(۹/۸۱)\left(\frac{۴}{۳}\pi\right)(۲۵۰)^{۳}\times ۱۰^{-۹}=۲۸۵۳/۱۰۲\,N \Rightarrow B\approx ۲/۸\,kN$$

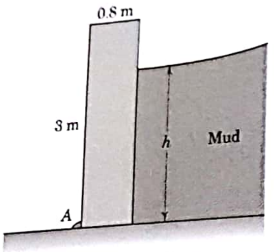
$$\Rightarrow W=۲/۸-۱/۵=۲/۲\,kN$$

$$\Rightarrow M=۲۲۹/۵۵$$

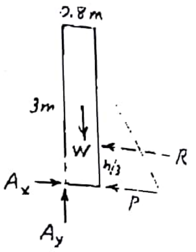
$$m=۲۲۹/۵۵-۱۵۰=۸۹/۵۵\,kg$$

خیر. با کم اثربخش بودن تغییرات چگالی آب نیرویی شناوری مستقل از ارتفاع بوده و ثابت می‌باشد.

۵-۱۸۹. عمق h گل را طوری محاسبه کنید تا دیوار حائل بتنی به ارتفاع $۳m$ در آستانه واژگونی حول لبه جلویی A باشد. چگالی گل $۱۷۶۰kg/m^{۳}$ و بتون $۲۴۰۰kg/m^{۳}$ درنظر گرفته شود.



حل:



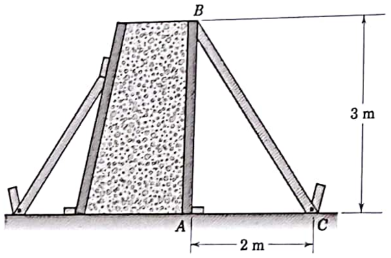
$$P=\rho gh=۱۷۶۰(۹/۸۱)h=۱۷۲۶۵/۶\,h$$

$$R=\frac{P}{۲}h(۱)=\frac{۱۷۲۶۵/۶}{۲}h^{۲}=۸۶۳۳h^{۲}\quad \text{(در هر متر عرض افقی)}$$

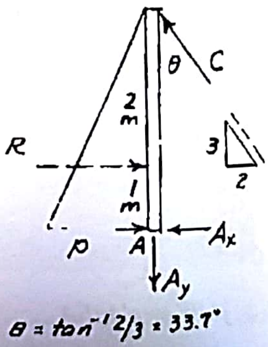
$$w=۲۴۰۰(۹/۸۱)(۳)(۰/۸)=۵۶/۵(۱۰^{۳})\,N$$

$$\sum M_A=۰ \Rightarrow R\left(\frac{h}{۳}\right)-۰/۴w=۰ \Rightarrow (۸۶۳۳h^{۲})\left(\frac{h}{۳}\right)=۰/۴(۵۶/۵)(۱۰^{۳}) \Rightarrow h=۱/۹۸۸\,m$$

۵-۱۹۰. اعضایی برای یک دیوار حائل بتونی کوچک در شکل زیر نشان داده شده است. در آنجا یک تیر تقویت عرضی BC برای هر $۱/۵m$ طول دیوار وجود دارد. فرض کنید که اتصالات در A، B و C به صورت اتصالات مفصلی عمل می‌کند، فشار را در هر تیر تقویت عرضی BC محاسبه کنید. بتون خیس می‌تواند با مایعی با چگالی $۲۴۰۰kg/m^{۳}$ معادل شود.



حل:



$$p=\rho gh=۲۴۰۰(۹/۸۱)(۳)=۷۰/۶\,kPa$$

$$R=\frac{۱}{۲}(۷۰/۶)(۱۰^{۳})(۳)(۱/۵)=۱۵۸/۹(۱۰^{۳})\,N$$

$$\sum M_{\circ}=۰ \quad , \quad (C\sin ۳۳/۷^{\circ})۳-۱۵۸/۹(۱۰^{۳})(۱)=۰$$

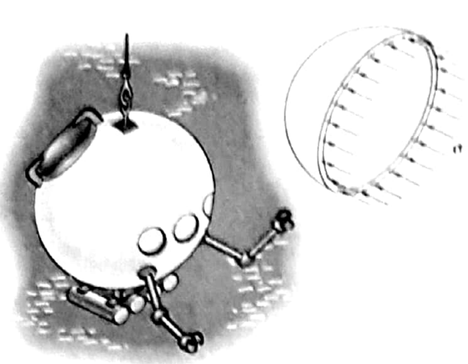
$$C=\frac{۱۵۸/۹(۱۰^{۳})}{۳\sin ۳۳/۷^{\circ}}=۹۵/۵(۱۰^{۳})\,N$$

$$C=۹۵/۵\,kN$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{۲}{۳}=۳۳/۲^{\circ}$$

۵-۱۹۱. یک محفظه غواصی شناور عمیق در شکل شامل یک پوسته کروی با قطر $۱۵۰۰mm$ که با سرب سنگین شده طوری طراحی شده است که وزن آن کمی از نیروی شناوری آن تجاوز کرده باشد. فشار اتمسفر

Scanned by CamScanner



در داخل کره تا عمق $2\,km$ در یک اقیانوس حفظ می‌شود. ضخامت پوسته $25\,mm$ است. برای این عمق تنش فشاری σ که روی قسمت وابسته به قطر پوسته عمل می‌کند (که در نمای سمت راست نشان داده شده است) را محاسبه کنید.

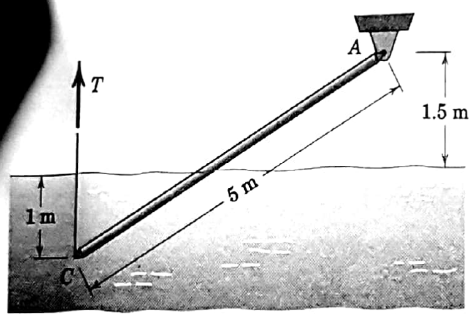
حل:

$$F = PA = \rho g A = \rho g\, h\pi r^{2}$$

$$\sum F = 0 \;\Rightarrow\; \rho g h \pi r^{2} - \sigma(\pi r^{2} - \pi[r-t]^{2}) = 0 \;\Rightarrow\; \sigma = \left(\frac{\rho g h r}{2t}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2r}}\right)$$

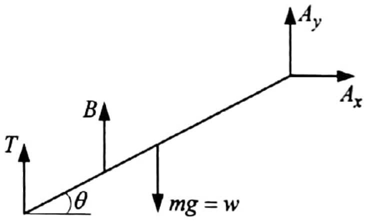
$$\Rightarrow\; \sigma = \left(\frac{1/03(10^{3})(9/81)(\frac{1/500}{2})(3)(10^{3})}{2(0/025)}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{25}{1500}}\right) \;\Rightarrow\; \sigma = 463\,Mpa$$

۵-۱۹۲. پایه $62\,kg$ یکنواخت به قطر $150\,mm$ در نقطه A لولا شده است و انتهای پایینش در آب شیرین مستغرق گردیده است. کشش T در کابل عمودی موردنیاز برای حفظ نقطه C در عمق ۱ متری را تعیین کنید.



حل:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2/5}{5}\right) = 30^{\circ}$$



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = 0 \;:\; mg(2/5)\cos\theta - (B)4\cos\theta - (T)5\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

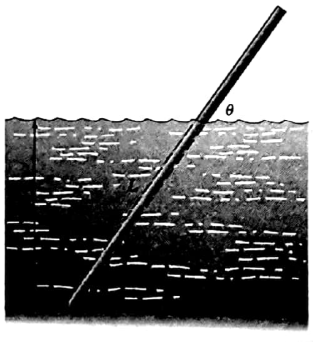
$$B = 2\pi\left(\frac{150}{2}\right)^{2}(1000)(9/81)(10^{-6}) = 346/714\,N$$

$$W = mg = (62)(9/81) = 608/22\,N$$

با جایگذاری معادلات فوق در رابطه (۱) داریم:

$$T = 26/7388\,N$$

۵-۱۹۳. انتهای تیر یکنواخت به طول L و چگالی ρ' در (C) کف یک تانکر با مایع به چگالی ρ و عمق h حفظ شده است. برای شرایط $\rho' < \rho$ و $h < L$، زاویه θ به وجود آمده به وسیله تیر را پیدا کنید.

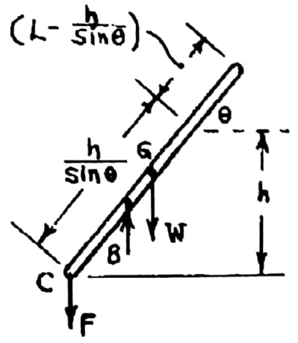


حل:

A = ناحیه برش عرضی میله

B نیروی بویانسی

$$B = \rho g V = \rho g \frac{hA}{\sin\theta}$$

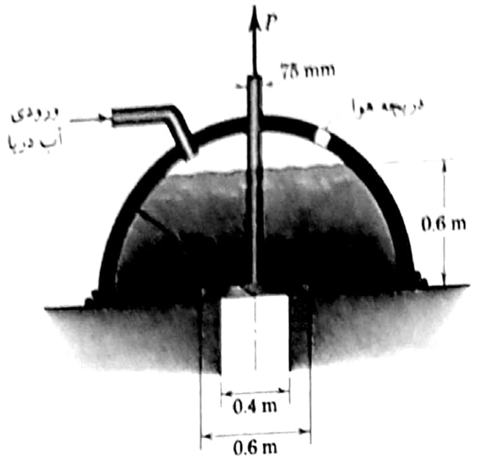


وزن $W = \rho' g L A$

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_c = 0 \;:\; \rho g \frac{hA}{\sin\theta}\left(\frac{1}{2}\frac{h}{\sin\theta}\cos\theta\right) - \rho' g L A\left(\frac{h}{2}\cos\theta\right) = 0$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{L}\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\right) \qquad \left(\frac{h^{2}\rho}{L^{2}\rho'} < 1\right)$$

Scanned by CamScanner



۱۹۴-۵. زمانی که سطح آب دریا درون محفظه نیم‌کروی به سطح ۰٫۶ متر می‌رسد، که در شکل نشان داده شده است، پیستون بلند می‌شود و اجازه می‌دهد که آب دریا وارد لوله عمودی شود. برای سطح سیال (الف) تعیین فشار متوسط σ نگهداشته شده به وسیله این سطح آب‌بندی شده شیر قبل از اینکه نیرو برای بلند کردن پیستون اعمال شود. (ب) نیروی P (به علاوه برای نیروهای موردنیاز برای حفظ وزن پیستون) برای بلند کردن پیستون تعیین گردد. فشار یک اتمسفر، در تمام لایه‌های هوا و در سطح آب‌بندی هنگامی که تماس تحت عمل P متوقف می‌شود، فرض گردد.

حل:

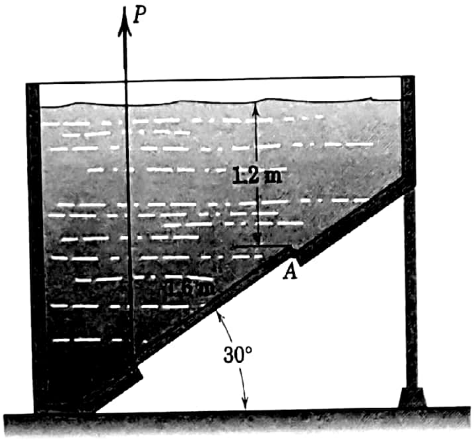
$$P = \rho g h = ۱۰۳۰(۹٫۸۱)(۰٫۶) = ۶۰۶۰ \ Pa$$

$$R = PA - ۶۰۶۰\pi\left(۰٫۳^۲ - \frac{۰٫۰۷۵^۲}{۴}\right) = ۱۶۸۷ \ N$$

نیروی تحمل شده توسط سطح آب‌بندی : $\sigma = \dfrac{R}{\pi(r_۲^۲ - r_۱^۲)} = \dfrac{۱۶۸۷}{\pi(۰٫۳^۲ - ۰٫۲^۲)} = ۱۰٫۷۴ \ kPa$

نیروی موردنیاز برای بالا بردن پیستون : $P = R = ۱۶۸۷ \ N$

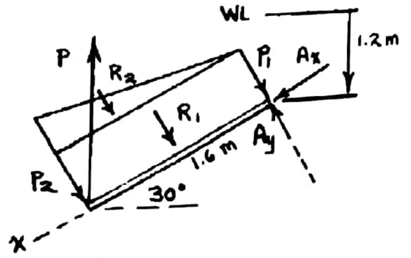
۱۹۵-۵. در شکل زیر برش عرضی یک تانکر آب شیرین با کف شیبدار نشان داده شده است. یک در مستطیلی شکل به ابعاد ۱٫۶×۰٫۸ متر (عمود بر صفحه شکل) در کف تانکر در نقطه A لولا شده است و درخلاف فشار آب به وسیله کابل تحت کشش P باز می‌شود. فشار P را محاسبه کنید.



حل:

$$p_۱ = \rho g h_۱ = ۱٫۰۰۰(۹٫۸۱)(۱٫۲) = ۱۱٫۷۷ \ kPa$$

$$p_۲ = \rho g h_۲ = ۱٫۰۰۰(۹٫۸۱)(۲) = ۱۹٫۶۲ \ kPa$$



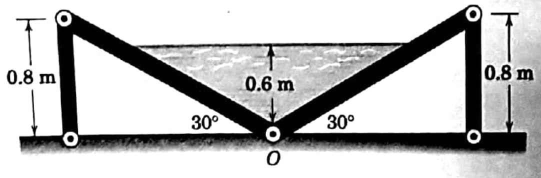
$$R_۱ = ۱۱٫۷۷(۱٫۶)(۰٫۸) = ۱۵٫۰۷ \ kN$$

$$R_۲ = (۱۹٫۶۲ - ۱۱٫۷۷)\frac{۱}{۲}(۱٫۶)(۰٫۸) = ۵٫۰۲ \ kN$$

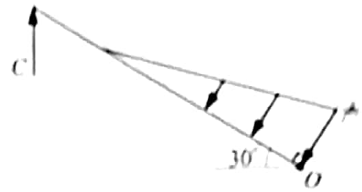
$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad P(۱٫۶\cos ۳۰°) - ۱۵٫۰۷(۰٫۸) - ۵٫۰۲\left(\frac{۲}{۳}۱٫۶\right) = ۰$$

$$P = ۱۲٫۵۷ \ kN$$

۱۹۶-۵. سطوح یک ظرف آب شیرین V شکل، که در شکل زیر نشان داده شده است، در میان فصل مشترکشان درنقطه O لولا شده‌اند و از هر طرف به وسیله پایه‌های عمودی در انتهایشان نگه داشته شده‌اند و طول ظرف $۲m$ می‌باشد. فشار C را در هر پایه حساب کنید. از وزن اعضا صرف‌نظر کنید.



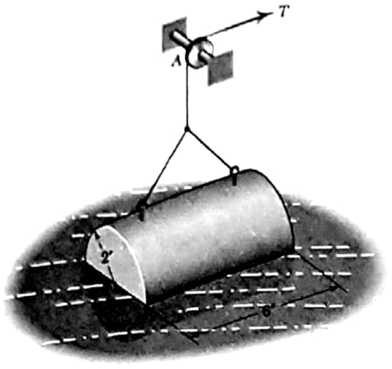
Scanned by CamScanner



حل:

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_o = 0 \quad : \quad ۰/۶ \times ۹۸۱۰ \times ۱/۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \frac{۱/۲}{۳} - C \times \frac{۰/۸}{\tan ۳۰} = ۰$$

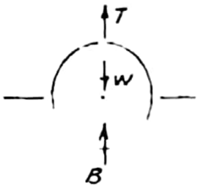
$C = ۲/۰۴\ kN$



۵-۱۹۷. یک سیلندر بتونی توپر به طول $۶\,ft$ و قطر $۴\,ft$ در یک موقعیت نیمه مستغرق در آب شیرین به وسیله یک کابلی که از روی یک قرقره ثابت در نقطه A عبور داده شده، نگه داشته شده است. کشش T در کابل را محاسبه کنید. سیلندر به وسیله پوشش پلاستیکی ضدآب می‌باشد. (از جدول D-۱ پیوست D در صورت نیاز استفاده کنید)

حل:

$\gamma_C =$ چگالی وزنی بتن $= ۱۵۰\ lb/ft^۳$

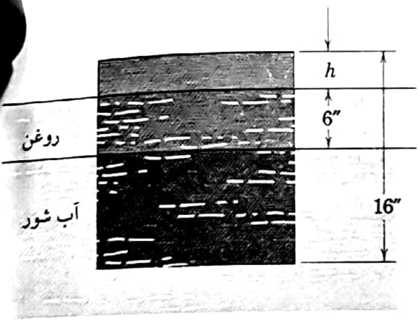


$\gamma_w =$ چگالی وزنی آب شیرین $= ۶۲/۴\ lb/ft^۳$

$L =$ طول استوانه $= ۶\ ft$

$r =$ شعاع استوانه $= ۲\ ft$

تعادل : $T = w - B = \gamma_C \pi r^۲ L - \gamma_w \frac{\pi r^۲}{۲} L = \pi r^۲ L\left(\gamma_C - \frac{۱}{۲}\gamma_w\right) = \pi(۲)^۲(۶)\left(۱۵۰ - \frac{۶۲/۴}{۲}\right) = ۸۹۶۰\,lb$

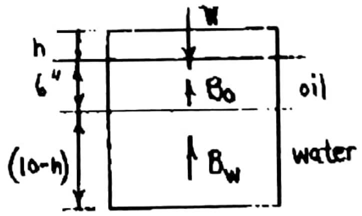


۵-۱۹۸. یک بلوک چوبی به صورت ضدآب به طول ۱۶ اینچ موجود است. مکعب در یک تانکر آب شور شناور است که یک لایه روغن به ضخامت $۶\,in$ روی آب وجود دارد. فرض کنید که مکعب در یک حالت شناور نشان داده شده است، ارتفاع h بلوک بالای روغن را محاسبه کنید. وزن ویژه روغن، آب شور، و چوب به ترتیب ۵۶، ۶۴، $۵۰\,lb/ft^۳$ می‌باشد.

حل:

A ناحیه یک قطعه بلوک افقی می‌باشد:

$a = \frac{۱۶^۲}{۱۴۴} ft^۲$



وزن بلوک $W = \frac{۱۶}{۱۲} A(۵۰) = ۶۶/۷A\ (lb)$

بویانسی روغن $B_o = \frac{۶}{۱۲} A(۵۶) = ۲۸A\ (lb)$

بویانسی آب $B_w = \frac{۱۰ - h}{۱۲} A(۶۴) = ۵/۳۳(۱۰ - h)\ A\ (in\,lb, h\,inches)$

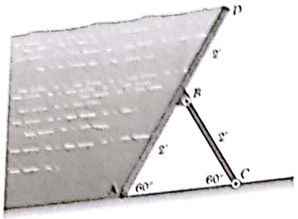
$\sum F = ۰ \quad : \quad W - B_o - B_w = ۰ \quad : \quad ۶۶/۷A - ۲۸A - ۵/۳۳(۱۰ - h)A = ۰$

$h = ۲/۷۵\,in$

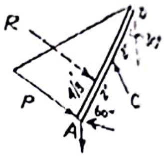
۵-۱۹۹. یک کانال آب شیرین به عرض $۱۰\,ft$ (عمود بر صفحه کاغذ)، در انتهای خود به وسیله سد (مانع) مستطیلی شکل مسدود شده است، که به صورت قسمت ABD نمایش داده شده است. پایه‌های نگهدارنده BC

Scanned by CamScanner

به فاصله $۲\,ft$ از یکدیگر در عرض $۱۰\,ft$ قرار دارند. فشار C در هر یک از پایه‌ها را تعیین کنید. از وزن اعضا صرف‌نظر کنید.



حل:



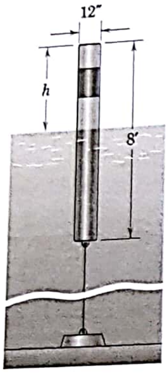
$p = \rho g h = ۶۲/۴\,(۴\cos ۳۰^\circ) = ۲۱۶\,lb/ft^۲$

$R = \frac{p}{۲} = \frac{۲۱۶}{۲}(۴)(۲) = ۸۶۵\,lb$ سطح بر پوند

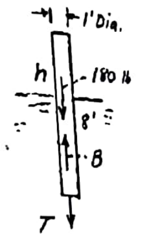
$\sum M_A = ۰ \quad , \quad ۲C\cos ۳۰^\circ - ۶۶۵\left(\frac{۴}{۳}\right) = ۰$

$C = \frac{۸۶۵(۲)}{۲\cos ۳۰^\circ} = ۶۶۶\,lb$

۲۰۰-۵. یک بویه نشانگر کانال شامل $۸\,ft$ استوانه فولادی توخالی به قطر $۱۲\,in$ و وزن $۱۸۰\,lb$ وجود دارد که در پایین به وسیله یک کابل که نشان داده شده است لنگر انداخته است. اگر $h = ۲\,ft$ در حداکثر جذر و مد دریا باشد، کشش T در کابل را محاسبه کنید. همچنین مقدار h را هنگامی که کابل بر اثر کاهش جذر و مد شل می‌شود تعیین کنید. وزن مخصوص آب دریا $۶۴\,lb/ft^۳$ است. وزن بویه طوری است که مرکز جرم آن پایین باشد تا پایداری آن تضمین شود.



حل:



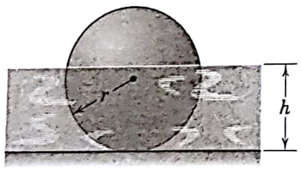
$B = \rho g V = ۶۴\left(\frac{\pi \times ۱^۲}{۴}[۸-h]\right) = ۵۰/۲۷\,(۸-h)$

$\sum F = ۰ \quad , \quad T + ۱۸۰ - ۵۰/۲۷\,(۸-h) = ۰$

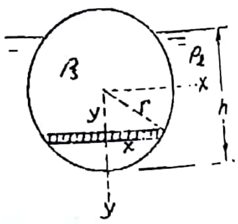
$h = ۲\,ft \quad , \quad T = -۱۸۰ + ۵۰/۲۷\,(۸-۲) = ۱۲۱/۶\,lb$

$T = ۰ \quad , \quad ۸ - h = \frac{۱۸۰}{۵۰/۲۷} \quad , \quad h = ۴/۴۲\,ft$

۲۰۱-۵. یک کره توپر همگن به شعاع r در انتهای یک تانکر که شامل یک مایع به چگالی ρ_ℓ که بزرگتر از چگالی کره ρ_s است، قرار دارد. به محض اینکه تانکر پُر شود، عمق h به جایی می‌رسد که کره شروع به شناوری می‌کند. عباراتی را برای ρ_s کره تعیین کنید.



حل:



نیروی شناوری : $B = \rho_\ell g v$

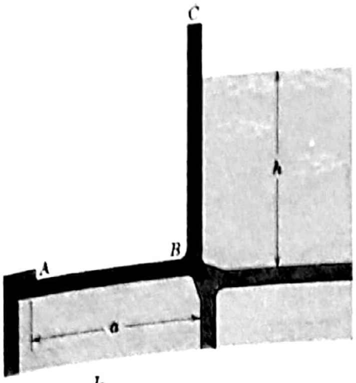
حجم غوطه‌وری $= v$

$w = mg = \rho_s\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right)g$

$dv = \pi x^۲\,dy = \pi(r^۲ - y^۲)\,dy$

$B = \rho_\ell g \pi \int_{-(h-r)}^{r} (r^۲ - y^۲)\,dy = \frac{۱}{۳}\rho_\ell g \pi h^۲(۳r - h)$

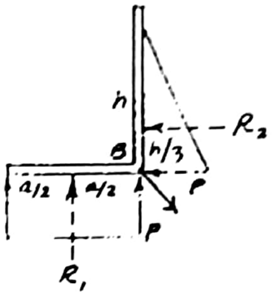
$B = w \Rightarrow \rho_s g\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right) = \frac{۱}{۳}\rho_\ell g \pi h^۲(۳r-h) \Rightarrow \rho_s = \rho_\ell\left(\frac{h}{۲r}\right)^۲\left(۳ - \frac{h}{r}\right)$



۵-۲۰۲. دریچه لولاشده ABC با یک دهانه به عرض b (عمود بر کاغذ) کانال آب را می‌بندد. آب به طرف سمت راست و قسمت زیرین دسترسی آزاد دارد. وقتی که سطح آب به بالای مقدار معین h رسید، دریچه دوباره باز خواهد شد، مقدار بحرانی h را تعیین کنید. از جرم دریچه صرف‌نظر کنید.

حل:

$R_۱ = \rho g h ab$

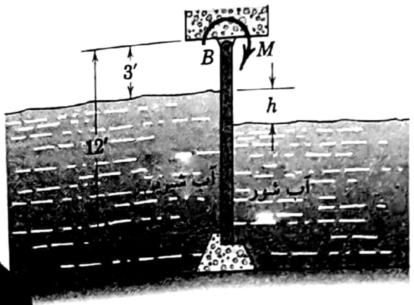


$R_۲ = \frac{\rho g h}{۲} hb$

$\sum M_B = ۰ \quad , \quad R_۱ \frac{a}{۲} = R_۲ \frac{h}{۳}$

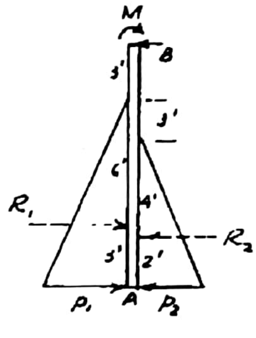
$\rho g h a b \frac{a}{۲} = \rho \frac{gh}{۲} hb \frac{h}{۳}$

$h^۲ = ۳a^۲ \quad , \quad h = a\sqrt{۳}$



۵-۲۰۳. دریچه مستطیلی شکل نشان داده شده دارای $۱۰ ft$ طول است (عمود بر صفحه) و بالای لبه B لولا شده است. دریچه، دریاچه را به دو قسمت آب شیرین در سمت چپ و حوزه جذر و مدی آب شور در سمت راست تقسیم می‌کند. تعیین کنید گشتاور M روی شفت دریچه در B برای جلوگیری از باز شدن دریچه در هنگامی که عمق سطح آب شور $h = ۳ ft$ شود.

حل:

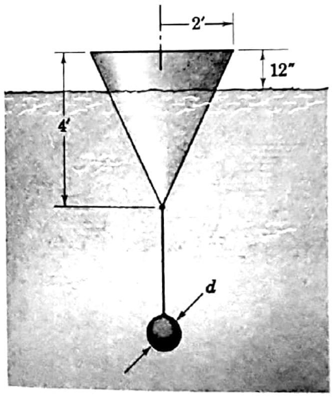


$R_۱ = \frac{P_۱ A_۱}{۲} = \frac{۶۲٫۴(۹)}{۲}(۹)(۱۰) = ۲۵٫۲۷۰ lb$

$R_۲ = \frac{P_۲ A_۲}{۲} = \frac{۶۴(۶)}{۲}(۹)(۱۰) = ۱۱٫۵۲۰ lb$

$\sum M_B = ۰ \quad , \quad M + ۱۱٫۵۲۰(۱۰) - ۲۵٫۲۷۰(۹) = ۰$

$M = ۱۱٫۲۲(۱۰^۴)\ lb - ft$



۵-۲۰۴. سطح گوه‌ای شکل و تکیه‌گاه دایروی بویه آب شور از صفحه فلزی نازک که وزن ۱۰٫۲ پوند بر فوت مربع دارد، ساخته شده است. قطر d توپ سربی کروی آویخته شده از نوک بویه را چنانچه تکیه‌گاه ۱۲ اینچ بالای سطح آب قرار گیرد تعیین کنید.

حل:

مخروط : $A_{con} = \pi r L + \pi r^۲ = ۴۰٫۶۶ ft^۲$

$w_{con} = \rho_{con} A_{con} g = (۱۰٫۲)(۴۰٫۶۶)(۳۲٫۱۸) = ۱۳۳۴۶٫۰۷۵ lb$

$V_{con} = \frac{۱}{۳}\pi(۱٫۵)^۲(۳) = ۷٫۰۶۸ ft^۳$

$B_{con} = \rho_w V_{con} g = (۶۴٫۲۳)(۷٫۰۶۸)(۳۲٫۱۸) = ۱۴۶۱۰٫۲۰۶$

گوی سربی : $w_s = \rho_s V_s g = (۷۰۷٫۹۳)(V_s)(۳۲٫۱۸) = ۲۲۷۸۱٫۱۸۷۴ V_s$

Scanned by CamScanner

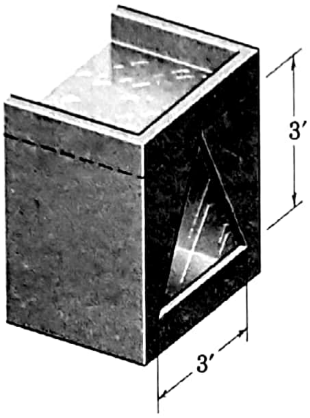
$$B_s = \rho_s V_s g = (۶۴/۲۲)(V_s)(۳۲/۱۸) = ۲۰۶۶/۹۲۱۲\, V_s$$

$$w_{cons} + w_s = B_s + V_{con} \Rightarrow ۱۲۲۴۶/۰۷۵ + ۲۲۷۸۱/۱۸۷۴ V_s = ۲۰۶۶/۹۲۱ V_s + ۱۴۶۱۰/۲۶۰$$

$$\Rightarrow V_s = ۰/۰۶۱\, ft^۳$$

$$V_s = \frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{d}{۲}\right)^۳ \Rightarrow d = ۰/۴۸۵\, ft = ۵/۸۲\, in$$

۵-۲۰۵. نیروی کل R روی پنجره مثلثی شکل که به وسیله آب شیرین در تانکر اعمال می‌شود را تعیین کنید. سطح آب مساوی با بالای پنجره است. همچنین H فاصله از R تا سطح آب را تعیین کنید.



حل:

$C_۱ =$ مرکز سطح مثلثی

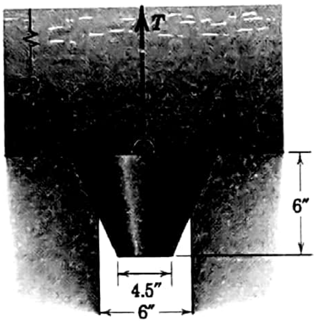
$$\bar{y} = \frac{۲}{۳}(۳) = ۲\, ft$$

$C_۲ =$ مرکز چهار وجهی

$$H = \bar{y} = \frac{۳}{۴}(۳) = ۲/۲۵\, ft$$

$$R = \rho g \bar{y} A = (۶۲/۴)(۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)(۳)(۳) = ۵۶۲\, lb$$

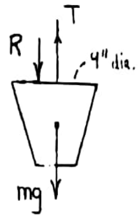
۵-۲۰۶. درپوش چدنی، آبگذر یک تانکر آب شیرین را که تا عمق $۲۰\, ft$ پر شده است می‌بندد. کشش موردنیاز T برای برداشتن درپوش از سوراخ مخروطی شده‌اش را تعیین کنید. فشار اتمسفر در آبگذر موجود است و ناحیه آب‌بندی به عنوان درپوش است که حذف شده است. از سایش (اصطکاک) مکانیکی بین درپوش و سطح نگه‌دارنده‌اش صرف‌نظر کنید.



حل:

$$P = \rho g h = ۶۲/۴(۲۰) = ۱۲۴۸\frac{lb}{ft^۲}$$

$$R = PA = ۱۲۴۸\left[\pi\left(\frac{۴/۵}{۱۲}\right)^۲\right] = ۵۵۱\, lb$$



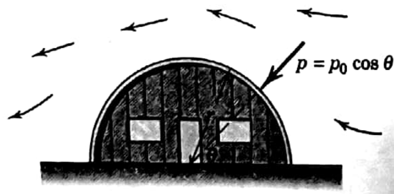
$$mg = \rho v g = \rho g\left[\frac{۷\pi r^۲ h}{۲۴}\right] = ۴۵۰\left[\frac{۷\pi(\frac{۴/۵}{۱۲})^۲(\frac{۱۲}{۱۲})}{۲۴}\right] = ۵۸/۰\, lb$$

(از مسئله ۵-۲۵)

$$+\uparrow \sum F = ۰ \Rightarrow T - ۵۵۰ - ۵۸/۰ = ۰ \Rightarrow T = ۶۰۹\, lb$$

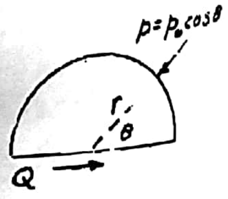
۵-۲۰۷. آسایشگاه سربازان در معرض باد افقی قرار می‌گیرد و فشار P در مقابل سقف دایروی به صورت $p_۰ \cos\theta$ تقریب زده شده است. فشار در جهت باد مثبت است و پشت به باد منفی است. نیروی برشی کل افقی Q را روی فونداسیون بر واحد طول سقف اندازه‌گیری شده (عمود بر کاغذ) تعیین کنید.

حل:

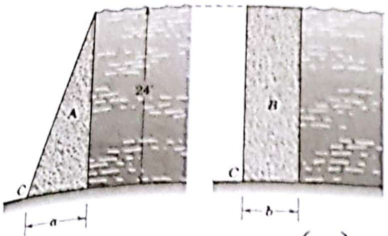


$$Q = \int_۰^{\pi}(p_۰\cos\theta)(\cos\theta)\, r\, d\theta$$

$$= p_۰ r\int_۰^{\pi}\cos^۲\theta\, d\theta = \frac{۱}{۲}\pi r p_۰$$



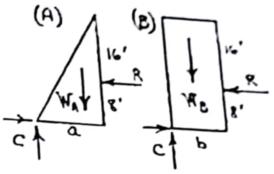
Scanned by CamScanner



۵-۲۰۸. مقاطع مثلثی و مستطیلی یک سد بتنی آب شیرین کوچک شروع به طراحی شده است. از دیدگاه مقاومت در مقابل واژگونی حول C، در کدام مقطع بتن کمتری موردنیاز خواهد بود و چه مقدار کمتر در هر فوت از طول سد خواهد بود؟ وزن بتن $150\,lb/ft^3$.

حل:

طول بر حسب فوت است:



$$W_A=\frac{1}{2}(24a)(150)=1800a\left(\frac{lb}{ft}\right)$$

$$W_B=\frac{1}{2}(24b)(150)=3600a\left(\frac{lb}{ft}\right)$$

$$R=\frac{24}{2}(62.4)(24)=17.970\frac{lb}{ft}$$

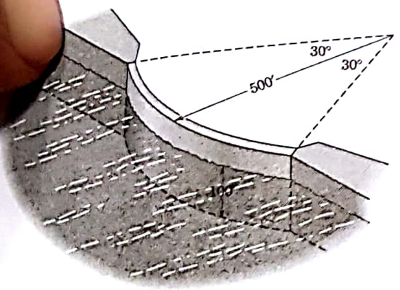
$$(A)\ \ \Sigma M_c=0\quad:\quad 17.970(8)-\frac{2}{3}a(1800a)=0$$

$$a=10.95\,ft\quad,\quad W_A=1800(10.95)=19700\frac{lb}{ft}$$

$$(B)\ \ \Sigma M_c=0\quad:\quad 17.970(8)-\frac{b}{2}(3600b)=0$$

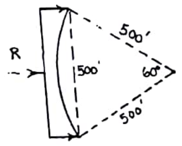
$$b=8.94\,ft\quad,\quad W_B=3600(8.94)=32200\frac{lb}{ft}$$

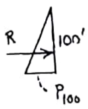
A کمتر از B همچنین موردنیاز $32200-19700=12470\dfrac{lb}{ft}$



۵-۲۰۹. طرف بالادست یک سد منحنی شکل دارای یک سطح استوانه‌ای عمودی به شعاع $500\,ft$ و تحت زاویه $60°$ می‌باشد. اگر آب شیرین $100\,ft$ عمق داشته باشد، کل نیروی R اعمال شده به وسیله آب به سطح سد را تعیین کنید.

حل:

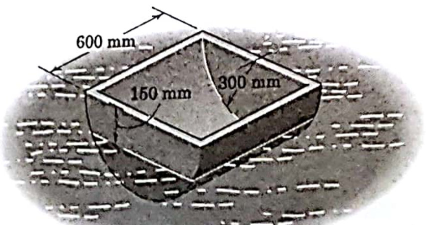




$$P_{100}=\mu h=62.4(100)=6240\frac{lb}{ft^2}$$

$$R=P_{av}(A)=\left(\frac{6240}{2}\right)(500)(100)=156.0(10^6)\,lb$$

۵-۲۱۰. پوسته نیمه استوانه‌ای با انتهای بسته دارای جرم $26.6\,kg$ می‌باشد. جرم m شن پرشده‌ای که باید در پوسته قرار گیرد چنانچه نصف شعاع به عمق $150\,mm$ در آب شیرین شناور گردد را تعیین کنید.

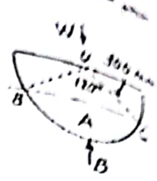


حل:

ناحیه مستغرق A = ناحیه قطاع $120°$ منهای ناحیه مثلث OBC

$$A=\frac{120}{360}\pi(0.3)^2-(0.150)(0.3\cos 30°)=0.05528\,m^2$$

حجم مستغرق برابر است با:



$V=۰/۰۵۵۲۸(۰/۴۰۰)=۲۲/۱۷(۱۰^{-۳})\,m^{۳}$

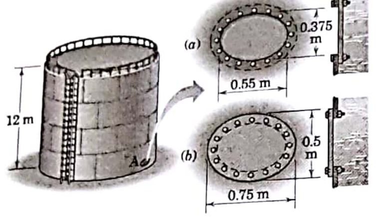
$B=\rho g V=۱۰۰۰(۹/۸۱)(۲۲/۱۷)(۱۰^{-۳})=۲۲۵/۲\,N$

$W=(۲۶/۶+m)۹/۸۱\,N$

برای تعادل $B=W$ ، $(۲۶/۶+m)۹/۸۱=۲۲۵/۴$

$m=۶/۵۷\,kg$

۵-۲۱۱. در دسترس بودن دریچه کوچک A اجازه می‌دهد کارگران تأسیسات و پشتیبانی در زمانی که تانکر خالی است وارد آن شوند. دو طراحی (a) و (b) برای پوشانیدن سوراخ نشان داده شده است. اگر تانکر پر از آب شیرین باشد، فشار توسط σ در ناحیه درپوش طرح (a) و متوسط افزایش ΔT در کشش اولیه در هر ۱۶ پیچ طراحی (b) را تعیین کنید. شما می‌توانید فشار را روی ناحیه دریچه ثابت درنظر بگیرید و فشار در ناحیه درپوش طرح (b) یک اتمسفر فرض شود.



حل:

فشار دریچه $۱۲m$ پایین‌تر از سطح آب برابر است با:

$$P=\rho g h=۱۰۰۰(۹/۸۱)(۱۲)=۱۱۷۷۰۰\frac{N}{m^{۲}}$$

الف) سطح درپوش

$$A_{\text{cov}}=\pi\left(\frac{۰/۷۵}{۲}\right)\left(\frac{۰/۵}{۲}\right)=۰/۲۹۵\,m^{۲}$$

$$\text{نیروی بر درپوش}=PA_{\text{cov}}=۳۴۷۰۰\,N$$

سطح آب‌بندی : $A_s=A_{\text{cov}}-\pi\left(\frac{۰/۵۵}{۲}\right)\left(\frac{۰/۳۷۵}{۲}\right)=۰/۱۳۲۵\,m^{۲}$

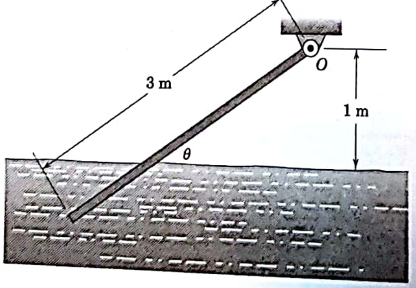
$$\sigma A_s=PA_{\text{cov}}\quad\Rightarrow\quad \sigma=\frac{۳۴۷۰۰}{۰/۱۳۲۵}=۲۶۲۰۰۰\frac{N}{m^{۲}}$$

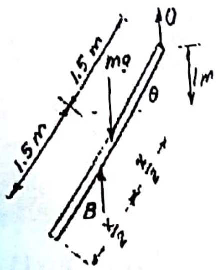
ب)

$$۱۶\Delta T=PA_{hoLe}=۱۱۷۷۰۰\left[\pi\left(\frac{۰/۵۵}{۲}\right)\left(\frac{۰/۳۷۵}{۲}\right)\right]\quad\Rightarrow\quad \Delta T=۱۱۹۲\,N$$

۵-۲۱۲. یک تخته ۳ متری نشان داده شده در این قسمت دارای چگالی $۸۰۰kg/m^{۳}$ می‌باشد و حول محور افقی در لبه بالاتر O لولا شده است. زاویه θ فرض شده تخته با سطح افق آب شیرین نشان داده شده را تعیین کنید.

حل:





سطح مقطع عرضی تخته $=A$

$$mg=۸۰۰(۳)A(۹/۸۱)=۲۳/۵۴(۱۰^{۳})A\ \ N$$

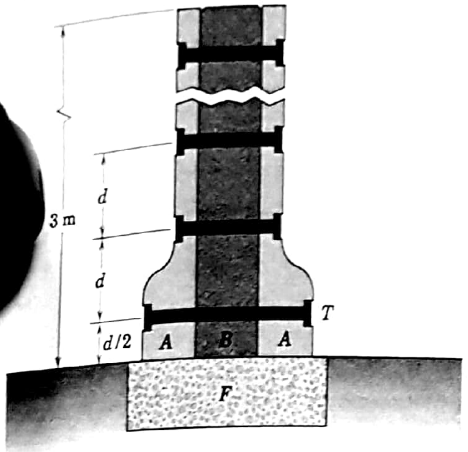
$$B=\rho_w gAx=۱۰۰۰(۹/۸۱)A\left(۳-\frac{۱}{\sin\theta}\right)$$

$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; ۲۳٫۵۴(۱۰^۳)A(۱٫۵\cos\theta)$$

$$-۹٫۸۱(۱۰^۳)A\left(۳-\frac{۱}{\sin\theta}\right)\times\left[\frac{۱}{۲}\left(۳-\frac{۱}{\sin\theta}\right)-\frac{۱}{\sin\theta}\right]\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; \sin^۲\theta = ۰٫۵۵۵۶ \;\Rightarrow\; \theta = ۴۸٫۲^\circ$$

۵-۲۱۳. المان‌های یک روش جدید برای ساختن دیوارهای فونداسیون بتنی برای خانه‌های جدید در شکل زیر نمایش داده شده است. در همین لحظه اگر شالوده F در مکان خودش باشد، قالب پلی‌استرن A ساخته می‌شود و مخلوط بتنی B با دقت بین قالب‌ها ریخته می‌شود. اتصالات T شکل قالب‌ها را از جدا شدن جلوگیری می‌کند. بعد از سفت شدن بتن، قالب‌ها برای عایق کاری در جای خود می‌مانند. برای تمرین طراحی، یک تخمین محافظه‌کارانه‌ای برای فاصله یکنواخت d بین بستن‌ها ایجاد کنید تا کشش در هر بست از $۶٫۵kN$ تجاوز نکند. فاصله‌بندی افقی بست‌ها برابر فاصله‌بندی عمودی بست‌ها است. به طوری که چگالی بتن مرطوب برابر $۲۴۰۰kg/m^۳$ است.



حل:

$P=\gamma h=۲۴۰۰\times۹٫۸۱\times۳=$ فشار در پایین دیوار ۳ متری

$P=۷۰۶۰۰\;N/m^۲$

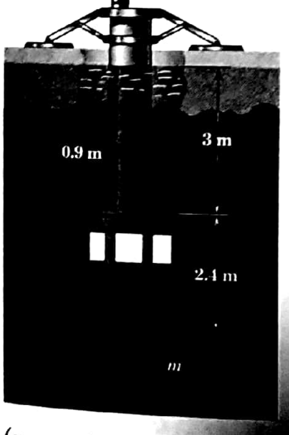
$QA=T \quad , \quad A=\frac{T}{Q}=\frac{۶۵۰۰}{۷۰۶۰۰}=۰٫۰۹۲m^۲$

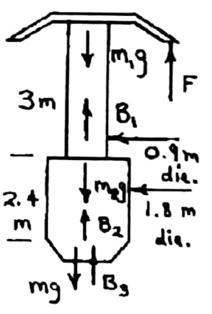
با درنظر گرفتن ناحیه‌ی مربعیٰ به ضلع d برای هر بست $\rightarrow\; d^۲=A \;\Rightarrow\; d=۰٫۳۰۳$

با درنظر گرفتن ضریب اطمینان $\Rightarrow\; d=۰٫۳۰۰m$

۵-۲۱۴. یک سازه برای مشاهده طول عمر دریا در زیر یخ آب‌های قطب طراحی شده است که شامل محفظه بازدید استوانه‌ای متصل به سطح می‌باشد که به وسیله یک شفت استوانه‌ای در بالا برای ورود و خروج باز می‌شود. وزنه‌های تعادل به قفسه پایین محفظه انتقال داده شده است. به منظور تضمین یک شرایط پایدار برای سازه، لازم است که پایه‌های سازه روی یخ با نیرویی حداقل ۱۵% کل نیروی شناوری معادل باشند. اگر وزنه‌های تعادل سازه کمتر از $۵٫۷Mg$ جرم داشته باشد، جرم m موردنیاز وزنه تعادل سربی را تعیین کنید. دانسیته سرب $۱۱٫۳۷Mg/cm^۳$ است.

حل:





$$B_۱=\rho_w g V_۱=۱٫۰۳(۹٫۸۱)\frac{\pi(۰٫۹)^۲}{۴}(۳)=۱۹٫۲۸kN$$

$$B_۲=\rho_w g V_۲=۱٫۰۳(۹٫۸۱)\frac{\pi(۱٫۸)^۲}{۴}۲٫۴=۶۱٫۷kN$$

$V_۲=$ حجم ماسه

$$B_۳=\rho_w g V_۳=\rho_w g\frac{m}{\rho_L}=۱٫۰۳(۹٫۸۱)\frac{m}{۱۱٫۳۷}=۰٫۸۸۹\;m$$

$$F=۰٫۱۵(B_۱+B_۲+B_۳)=۰٫۱۵(۱۹٫۲۸+۶۱٫۷+۰٫۸۸۹m)=۱۲٫۱۵+۰٫۱۳۳۳m$$

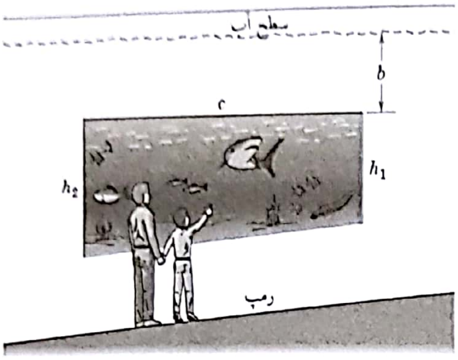
$(m_۱+m_۲)g=۵٫۷(۹٫۸۱)=۵۵٫۹kN$

Scanned by CamScanner

$$\sum F = 0 \quad : \quad F + B_1 + B_2 + B_3 - (m_1 + m_2)g - mg = 0$$

$$12/15 + 0/1333m + 19/28 + 41/7 + 0/889m - 55/9 - 9/81m = 0$$

$$m = 4/23 \; Mg$$



۵-۲۱۵. پنجره بازدید ذوزنقه‌ای در یک آکواریوم موجودات زنده دریایی دارای ابعاد نشان داده شده هستند. با کمک نمودارها و مختصات، دو روش برای تعیین نیروی فشار آب روی پنجره و همچنین موقعیت عمودی این نیرو شرح دهید که این مقادیر با جایگزینی مقدارهای عددی یافته می‌شود.

حل:

روش I: انتگرال‌گیری مستقیم:

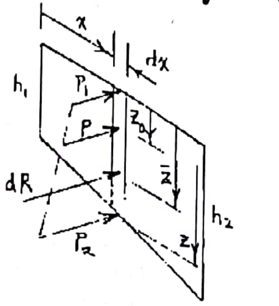
$\rho =$ چگالی آب $\quad ; \quad P = \rho g(b + z_0)$

$Z = h_1 + kx = f(x)$

(۱) مقدار dR را برای سطح المانی $z\,dx$ محاسبه کرده و $\bar{z}$ را بیابید.

(۲) با انتگرال‌گیری مقدار $R = \int dR$ را بیابید.

(۳) $R\bar{z} = \int \bar{z}\,dR$



روش II: استفاده از هندسه حجم‌های فشار سطح:

$A_a = 1-2-3-4 \quad ; \quad A_b = 3-4-5$

$R_1 = P_1 A_a \quad ; \quad \bar{Z}_1 = \dfrac{h_1}{2}$

$R_2 = \dfrac{1}{2}(P_2 - P_1)A_a \quad ; \quad \bar{Z}_2 = \dfrac{2h_1}{3}$

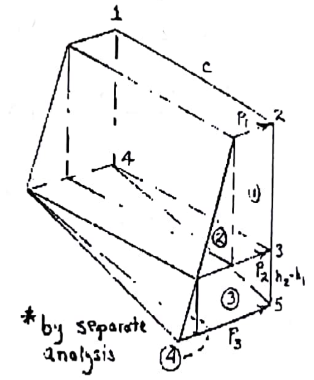
$R_3 = P_2 A_b \quad ; \quad \bar{Z}_3 = h_1 + \dfrac{2}{3}(h_2 - h_1)$

$R_4 = \dfrac{1}{2}(P_3 - P_2)(h_2 - h_1)\left(\dfrac{C}{3}\right)$

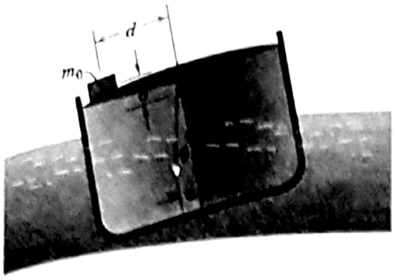
$\bar{Z}_4 = \dfrac{1}{2}(h_2 - h_1)$

$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

$\bar{z} = \dfrac{(R_1\bar{z}_1 + R_2\bar{z}_2 + R_3\bar{z}_3 + R_4\bar{z}_4)}{4}$

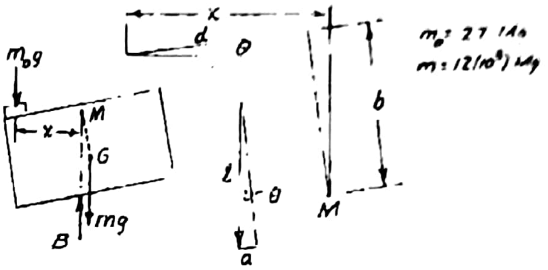


۵-۲۱۶. تعیین درست و دقیق موقعیت عمودی مرکز جرم G یک کشتی از طریق محاسبات مشکل است. روش ساده‌تر این است که آزمایش انحراف ساده‌ای روی کشتی حامل بار انجام شود. با مراجعه به شکل، یک جرم خارجی شناخته شده m_0 در فاصله d از مرکز خط قرار گرفته است و زاویه کج‌شدگی θ توسط شاقول یک وزنه سربی اندازه‌گیری می‌شود. جابه‌جایی کشتی و موقعیت مرکز تعادل جرم M مشخص شده‌اند. بیشترین ارتفاع متاسنتر $\overline{GM}$ برای کشتی ۱۲۰۰۰ تنی که به علت وجود جرم ۲۷ تنی جرم در فاصله‌ی ۷/۸



متری از خط مرکز منحرف شده است را تعیین کنید. خط عمودی به طول $6m$ به اندازه $a = ۰/۲m$ منحرف می‌شود. جرم $m_۰$ در فاصله $b = ۱/۸m$ بالای M قرار دارد. [نکته: در سیستم متریک یک تن (t) برابر $۱۰۰۰kg$ و برابر یک مگاگرم (Mg) است.]

حل:



$$m_۰ = ۲۷\ Mg$$

$$m = ۱۲(۱۰^۳)\ Mg$$

$$\theta = \sin^{-۱}\left(\frac{a}{\ell}\right) = \sin^{-۱}\left(\frac{۰/۲}{۶}\right) = ۱/۹۱^\circ$$

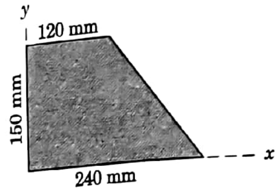
$$\sin\theta = ۰/۰۳۳۳ \quad ; \quad \cos\theta = ۰/۹۹۹۴$$

$$x = d\cos\theta + b\sin\theta = ۷/۸(۰/۹۹۹۴) + ۱/۸(۰/۰۳۳۳) = ۷/۸۶\ m$$

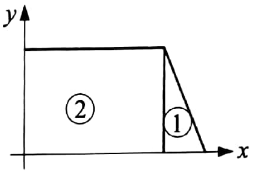
$$\sum M_M = ۰ \quad \Rightarrow \quad mg\,\overline{GM}\sin\theta - m_۰ g x = ۰$$

$$\Rightarrow \quad \overline{GM} = \frac{m_۰ x}{m\sin\theta} = \frac{۲۷(۷/۸۶)}{۱۲(۱۰^۳)(۰/۰۳۳۳)} = ۰/۵۳۰m$$

۵-۲۱۷. مختصات مرکز سطح ذوزنقه نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:



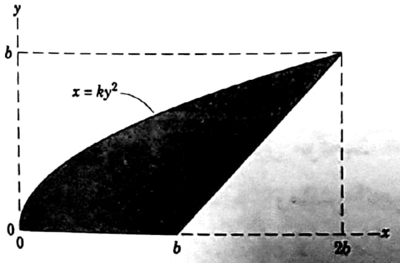
عضو	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$
(۱)	۹۰۰۰	۱۶۰	۵۰	۱۴۴۰۰۰۰	۴۵۰۰۰۰
(۲)	۱۸۰۰۰	۶۰	۷۵	۱۶۸۰۰۰۰	۱۳۵۰۰۰۰
$\sum$	۲۷۰۰۰	—	—	۲۵۲۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰۰

$$\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{۲۵۲۰۰۰۰}{۲۷۰۰۰} = ۹۳/۳۳\ mm$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{۱۸۰۰۰۰۰}{۲۷۰۰۰} = ۶۶/۶۶\ mm$$

۵-۲۱۸. موقعیت مرکز ناحیه سایه‌زده شده را تعیین کنید.

حل:



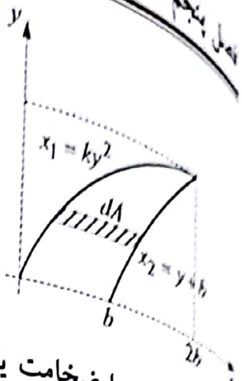
$$x = ۲b\ ,\ \ y = b \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۲}{b}$$

$$dA = (x_۲ - x_۱)\,dy \quad \Rightarrow \quad A = \int_۰^b \left(-\frac{۲}{b}y^۲ + y + b\right)dy = \frac{۵b^۲}{۶}$$

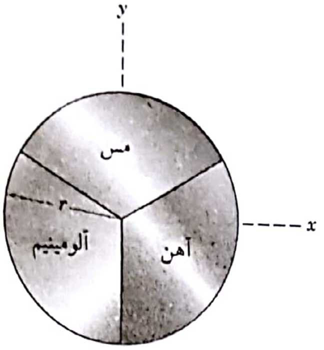
$$\int \bar{x}\,dA = \int \left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}\right)(x_۲ - x_۱)\,dy = \int_۰^b \frac{۱}{۲}\left(y^۲ + b^۲ + ۲by - \frac{۴}{b^۲}y^۴\right)dy = \frac{۲۳}{۳۰}b^۳$$

Scanned by CamScanner

$$\int y\,dA=\int_{\circ}^{b}\left(-\frac{۲}{b}y^{۳}+y^{۲}+by\right)dy=\frac{b^{۳}}{۳}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\overline{X}=\dfrac{\int x\,dA}{\int dA}=\dfrac{۲۳b}{۲۵}\\[2ex]\overline{Y}=\dfrac{\int y\,dA}{\int dA}=\dfrac{۲b}{۵}\end{cases}$$



۵-۲۱۹. دیسکی با ضخامت یکنواخت از قطعات مواد یکسان نشان داده شده تشکیل شده است. موقعیت مرکز جرم دیسک را تعیین کنید.



حل:

$\begin{cases}\rho_{Al}=۲۶۰۰\dfrac{kg}{m^{۳}}\\ \rho_{Al}=\rho\end{cases}$ چگالی آلومینیوم ، $\begin{cases}\rho_{cu}=۳/۴۳\,\rho_{Al}\\ \rho_{cu}=۸۹۳۰\dfrac{kg}{m^{۳}}\end{cases}$ چگالی بس

$\begin{cases}\rho_{st}=۳\,\rho_{Al}\\ \rho_{st}=۷۸۰۰\dfrac{kg}{m^{۳}}\end{cases}$ چگالی فولاد

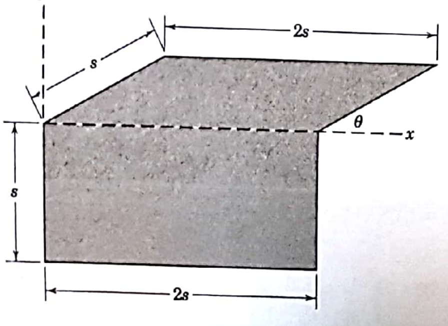
با توجه به یکسان بودن قطاع‌ها به جای V، مساحت (A) جایگزین می‌گردد.

عضو	A	ρA	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\rho A\bar{x}$	$\rho A\bar{y}$
cu	$\frac{\pi r^{۲}}{۳}$	$\frac{\pi r^{۲}}{۳}(۳/۴۳\rho)$	$\circ$	$\frac{\sqrt{۳}r}{\pi}$	$\circ$	$۱/۹۸۰۳\,\rho r^{۳}$
Al	$\frac{\pi r^{۲}}{۳}$	$\frac{\pi r^{۲}}{۳}\rho$	$\frac{-۳r}{۲\pi}$	$\frac{-\sqrt{۳}r}{۲\pi}$	$-\frac{۱}{۲}\rho r^{۳}$	$-۰/۲۸۸\,\rho r^{۳}$
st	$\frac{\pi r^{۲}}{۳}$	$\pi r^{۲}\rho$	$\frac{۳r}{۲\pi}$	$\frac{-\sqrt{۳}r}{۲\pi}$	$۱/۵\,\rho r^{۳}$	$-۰/۸۶۶\,\rho r^{۳}$
Σ	$\pi r^{۲}$	$۷/۷۸\,\rho r^{۲}$	—	—	$\rho r^{۳}$	$۰/۸۲۶۳\,\rho r^{۳}$

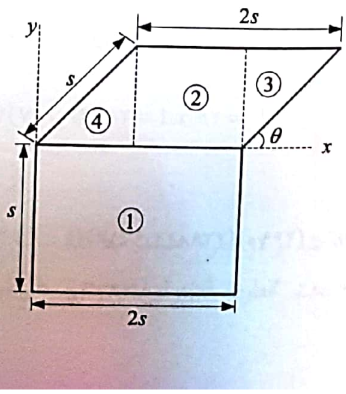
$$\overline{X}=\frac{\Sigma\rho A\bar{x}}{\Sigma\rho A}=\frac{\rho r^{۳}}{۷/۷۸\,p r^{۲}}=۰/۱۲۸۵r$$

$$\overline{Y}=\frac{\Sigma\rho A\bar{y}}{\Sigma\rho A}=\frac{۰/۸۲۶۳\,\rho r^{۳}}{۷/۷۸\,\rho r^{۲}}=۰/۱۰۶۲r$$

۵-۲۲۰. مختصات x و y مرکز ناحیه سایه‌خورده را تعیین کنید. نتایجتان را برای $\theta=۰$ و $\theta=۹۰^{\circ}$ ارزیابی کنید.



حل:



Scanned by CamScanner

عضو	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$
(۱)	$۲s^۲$	s	$-\frac{s}{۴}$
(۲)	$(s)(\sin\theta)(۲s-s\cos\theta)$	$s\cos\theta+\frac{۲s-s\cos\theta}{۲}$	$(s)(\frac{\sin\theta}{۲})$
(۳)	$s^۲\frac{\cos\theta\sin\theta}{۲}$	$۲s+\frac{۱}{۳}s\cos\theta$	$\frac{۲}{۳}s(\sin\theta)$
(۴)	$s^۲\frac{\cos\theta\sin\theta}{۲}$	$\frac{۲}{۳}s\cos\theta$	$\frac{s}{۳}\sin\theta$

عضو	$A\bar{x}$	$A\bar{y}$
(۱)	$۲s^۳$	$-s^۳$
(۲)	$\frac{s^۳}{۲}(\sin\theta(۴-\cos^۲\theta))$	$(\frac{s^۳}{۲})(\sin^۲\theta)(۲-\cos\theta)$
(۳)	$\frac{s^۳}{۴}[\sin۲\theta(۲+\frac{۱}{۳}\cos\theta)]$	$\frac{s^۳}{۶}\sin۲\theta\sin\theta$
(۴)	$\frac{s^۳}{۴}[\sin۲\theta(۲+\frac{۱}{۳}\cos\theta)]$	$\frac{s^۳}{۶}\sin^۲\theta\sin\theta$

$$\sum A=۲s^۲(۱+\sin\theta)$$

$$\bar{X}=\frac{\sum A\bar{x}}{\sum A}=\frac{s^۳(۲+۲\sin\theta+\frac{۱}{۲}\sin۲\theta)}{۲s^۲(۱+\sin\theta)}$$

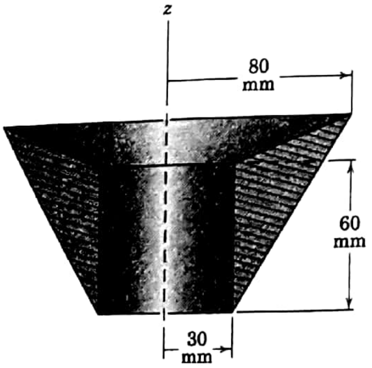
$$\bar{Y}=\frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}=\frac{s^۳(\sin^۲\theta-۱)}{۲s^۲(۱+\sin\theta)}$$

$$at\ \theta=۰\ \begin{cases}\bar{X}=s\\ \bar{Y}=\frac{-۱}{۴s}\end{cases}$$

$$at\ \theta=۹۰\ \begin{cases}\bar{X}=۲s\\ \bar{Y}=۰\end{cases}$$

۵-۲۲۱. قسمت برش خورده یک ریخته‌گری آلومینیومی در شکل یک حجم حول محور z نشان داده شده است. جرم m ریخته‌گری را محاسبه کنید.

حل:



برای سطح هاشورخورده $\leftarrow$ $\bar{X}=۳۰+\frac{۵۰}{۳}=۴۶/۶۶۷\,mm$

فرض می‌کنیم ارتفاع قسمت ذوزنقه‌ای شکل h باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$A=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۵۰)(۵۰+d)-\left(\frac{۱}{۲}\right)(۵۰)(d)=۱۵۰۰\,mm^۲$$ هاشورخورده

$$\rho_{Al}=۲۶۹۰\frac{kg}{m^۳}\quad,\quad V=۲\pi\bar{x}A=۲\pi(۴۶/۶۶۷)(۱۵۰۰)\ \Rightarrow\ V=۴۳۹۸۲۲/۹۷۱۵\,mm^۳$$

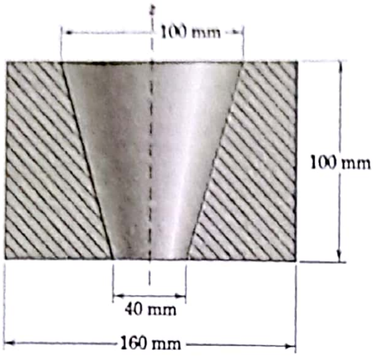
چگالی آلیاژ آلومینیومی برابر است با $\rho_{Al}=۲۶۹۰\,kg/m^۳$

$$m=\rho V\ \Rightarrow\ m=(۲۶۹۰)(۴۳۹۸۲۲/۹۷۱۶)(۱۰^{-۹})$$

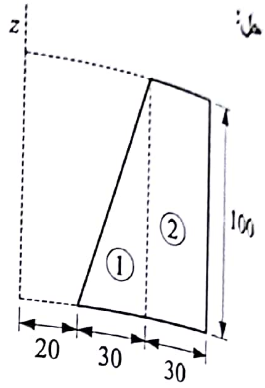
$$m=۱۱۸۳۱۲۳۷۹۳\times۱۰^{-۹}\ \Rightarrow\ m=۱/۱۸۳\,kg$$

Scanned by CamScanner

۵-۲۲۲. برش عرضی نشان داده شده یک جسم چدنی کامل حول محور z می‌باشد. جرم این قطعه را محاسبه کنید.



حل:



$$V_1 = 2\pi r_1 A_1 = 2\pi(40)\frac{30\times100}{2} = 0/377\times10^6\ (mm)^3$$

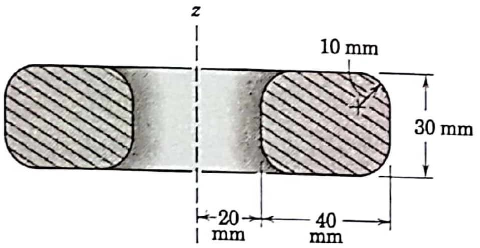
$$V_2 = 2\pi r_2 A_2 = 2\pi(65)(30)(100) = 1/225\times10^6\ mm^3$$

$$V_T = V_1 + V_2 = 1/602\times10^6\ mm^3$$

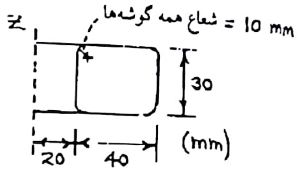
چگالی چدن بر طبق جداول برابر است با: $\rho_{\text{چدن}} = 7210\,kg/m^3$

$$m = \rho V \quad\Rightarrow\quad m = (7210)(1/602\times10^6\times10^{-9}) = 11/55\,kg$$

۵-۲۲۳. حجم V و مساحت کل سطح A حلقه کاملی که برش خورده آن نشان داده شده است را تعیین کنید. همه چهار گوشه قسمت برش‌خورده دارای شعاع $10mm$ هستند.



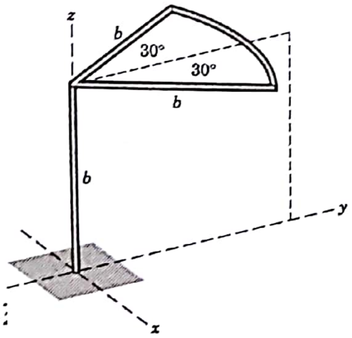
حل:



$$V = 2\pi\bar{r}A = 2\pi\left(20+\frac{40}{20}\right)[40(30) - 4(10^2) + \pi(10^2)] = 280000mm^3$$

$$A = 2\pi\bar{r}L = 2\pi\left(20+\frac{40}{20}\right)[2(20) + 2(10) + 2\pi 10] = 30900mm^2$$

۵-۲۲۴. مجموعه زیر شامل چهار میله بریده شده از ماده اولیه مصرفی یکسان می‌باشند. اعضای منحنی شده یک کمان دایروی به شعاع b ساخته‌اند. مختصات y و z مرکز جرم مونتاژ را تعیین کنید.



حل:

$$\bar{y} = \frac{b\sin 30^\circ}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3b}{\pi}$$

(مسئله نمونه ۵-۱ را ببینید)

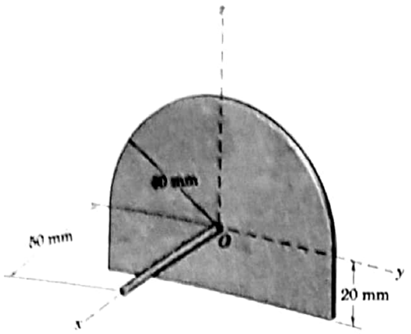
$$\bar{Y} = \frac{\sum\bar{y}L}{\sum L} = \frac{b(0) + 2b(\frac{b}{2}\cos30^\circ) + \frac{\pi}{3}b(\frac{3b}{\pi})}{b + 2b + \frac{\pi}{3}b} = 0/461b$$

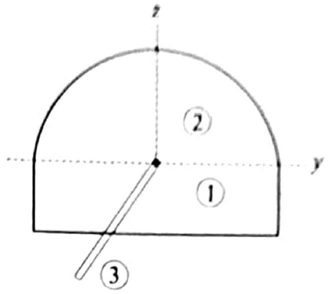
$$\bar{Z} = \frac{\sum\bar{z}L}{\sum L} = \frac{b(\frac{b}{2}) + 2b(b) + \frac{\pi}{3}b(b)}{b + 2b + \frac{\pi}{3}b} = 0/876b$$

۵-۲۲۵. مختصات مرکز جرم جسم ساخته شده از صفحه استیل و یک میله استیل را تعیین کنید. ضخامت صفحه $2mm$ است. قطر میله برابر $4mm$ و طولش برابر $50mm$ است. رأس O در وسط ضخامت صفحه است و

میله به سطح صفحه جوش داده شده است. مرکز جرم جسم چیست؟

حل:





عضو	m	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$m\bar{x}$	$m\bar{z}$
(۱)	۰/۰۲۴۹۶	۰	−۱۰	۰	−۰/۲۴۹۶
(۲)	۰/۰۳۹	۰	۱۶/۹۷	۰	۰/۶۶
(۳)	۰/۰۰۴۹	۲۵	۰	۰/۱۲۲۵	۰
Σ	۰/۰۶۸۹	—	—	۰/۱۲۲۵	۰/۴۱۰۴

$$\rho_{st} = ۷۸۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

$\bar{Y} = ۰ \Rightarrow$ به دلیل تقارن

$$۲۰\times ۸۰\times ۲\times ۱۰^{-۹}\times ۷۸۰۰ = ۰/۰۲۴۹۶ = m_۱ = \rho V_۱\ kg$$

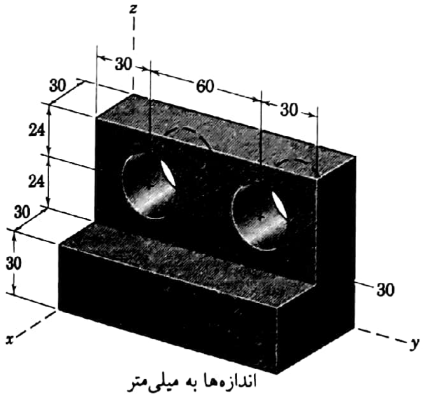
$$m_۲ = \rho V_۲ = \frac{\pi r_t^۲}{۲}\times\rho = \frac{\pi\times ۴۰^۲\times ۲\times ۷۸۰۰\times ۱۰^{-۹}}{۲} = ۰/۰۳۹\,kg$$

$$m_۳ = \rho V_۳ = ۷۸۰۰\times\pi(۲)^۲\times ۵۰\times ۱۰^{-۹} = ۰/۰۰۴۹\,kg$$

$$X = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = ۱/۷۷۸\,mm$$

$$Z = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} = ۵/۹۵۶\,mm$$

۵-۲۲۶. جرم و موقعیت مرکز جسم پوشش آلومینیومی را تعیین کنید.



اندازه‌ها به میلی‌متر

حل:

چگالی آلومینیوم = $۲۷۰۰ kg/m^۳$، جرم هر قطعه را می‌توان مانند مسئله قبل جداگانه محاسبه کرد.

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = \frac{۲۲/۷۸۳}{۰/۹۳۵۷} = ۲۴/۳۴۸\,mm$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} = \frac{۵۶/۱۴}{۰/۹۳۵۷} = ۵۹/۹۹۷\,mm$$

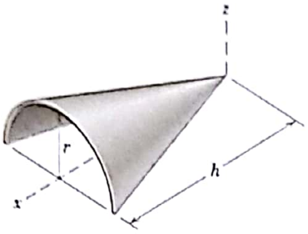
$$\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} = \frac{۲۷/۷۸۳}{۰/۹۳۵۷} = ۲۹/۶۹۲\,mm$$

عضو	$m(kg)$	$\bar{x}(mm)$	$\bar{y}(mm)$	$\bar{z}(mm)$	$m\bar{x}$	$m\bar{y}$	$m\bar{z}$
مکعب مستطیل بالایی	۰/۴۶۶۵	۱۵	۶۰	۵۴	۶/۹۹۷	۲۷/۹۹	۲۵/۱۹۱
مکعب مستطیل پایینی	۰/۵۸۳۲	۳۰	۶۰	۱۵	۱۷/۴۹۶	۳۴/۹۹	۸/۷۴۸
استوانه توخالی سمت راست	−۰/۰۵۷	۱۵	۹۰	۵۴	−۰/۸۵۵	−۵/۱۳	−۳/۰۷۸

Scanned by CamScanner

عضو	$m(kg)$	$\bar{x}(mm)$	$\bar{y}(mm)$	$\bar{z}(mm)$	$m\bar{x}$	$m\bar{y}$	$m\bar{z}$
استوانه توخالی سمت چپ	۰/۰۵۷−	۱۵	۳۰	۵۲	۰/۸۵۵−	۱/۷۱−	۲/۹۶۴−
Σ	۰/۹۲۵۷	—	—	—	۲۲/۷۸۳	۵۶/۱۴	۲۷/۱۱۲

۵-۲۲۷. موقعیت مرکز جرم پوسته مخروطی شکل نازک همگن نشان داده شده را بیابید.

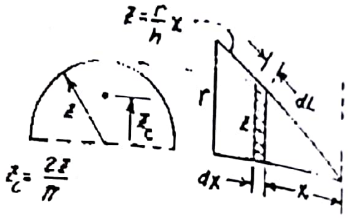


حل:
توزیع شعاعی برای مساحت نیم‌دایره به وسیله $\bar{z}=\frac{4r}{3\pi}$ یا به وسیل انتگرال

$$dA=\pi\, zdL=\pi\frac{r}{h}\times\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h}dx$$

$$\int z_c dA=\int\frac{2z}{\pi}dA=\int_0^h\frac{2r}{h^3}\sqrt{r^2+h^2}\,x^2\,dx=\frac{2}{3}r^2\sqrt{r^2+h^2}$$

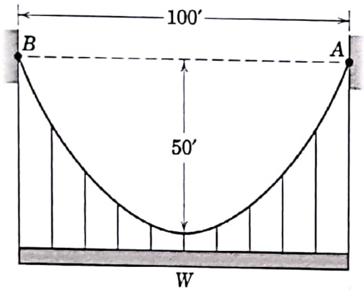
$$A=\int dA=\frac{1}{2}\pi r\sqrt{r^2+h^2}\quad,\quad \bar{z}=\int z_c\frac{dA}{A}=\frac{4r}{3\pi}$$



$$\int x\,dA=\int_0^h\frac{\pi r\sqrt{r^2+h^2}}{h^2}x^2dx=\frac{\pi r\sqrt{r^2+h^2}}{3}h_1$$

$$\bar{x}=\int x\frac{dA}{A}=\frac{2}{3}h$$

همچنین این نتایج می‌تواند به وسیله المان مثلثی که هر کدام دارای مختصات x مرکز ثقل $2b/3$ است تشکیل شود.



۵-۲۲۸. یک کابل از نقاط A و B روی خط افقی یکسان آویخته شده است و کل بار W که به طور یکنواخت در امتداد افق توزیع یافته را تحمل می‌کند. طول S کابل را تعیین کنید. (یادآوری می‌شود که همگرایی سری معادلات ۵-۱۶a موردنیاز است که نسبت میزان شکم به دهانه کمتر از $\frac{1}{4}$ می‌باشد.)

حل:

$$S=2\int_0^{\frac{L}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$S=2\int_0^{\frac{L}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\,dx=2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{T_0}{w}\left[\frac{wx}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\right]+\ln\left(\frac{wx}{T_0}+\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{L}{2}}$$

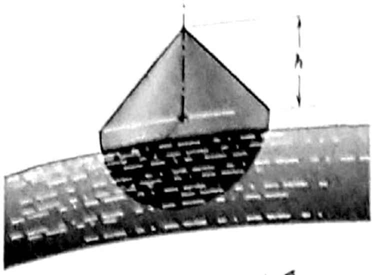
$$=\frac{L}{2}\sqrt{1+\left(\frac{wL}{2T_0}\right)^2}+\frac{T_0}{w}\ln\left(\frac{wL}{2T_0}+\sqrt{1+\left(\frac{wL}{2T_0}\right)^2}\right)$$

حال مقادیر معلوم را جایگزین می‌کنیم در نتیجه:

$$S=111/8(in)+36/1=147/9(ft)$$

۵-۲۲۹. یک شی شناور توپر از یک نیمکره و یک مخروط به شعاع برابر r از مواد همگن یکنواخت ساخته

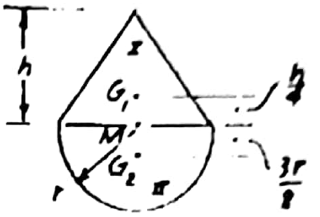
Scanned by CamScanner



شده است. اگر شی به مرکز نیمکره بالای سطح آب شناور باشد، حداکثر ارتفاع h که مخروط می‌تواند داشته باشد قبل از اینکه شی در موقعیت قائم مشاهده شده شناور بودن خود را از دست بدهد را پیدا کنید.

حل:

M = متاسنتر، همچنین مرکز جرم تشکیل شده نمی‌تواند بالای M در زمان تعادل باشد.



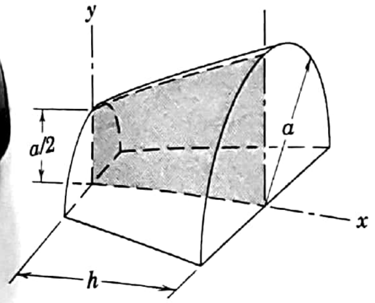
$\rho =$ چگالی ، $V =$ حجم

$$\rho V_I \frac{h}{۴} = \rho V_{II} \frac{۳r}{۸}$$

$$\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \frac{h}{۴} = \frac{۲}{۳}\pi r^۳ \frac{۳r}{۸}$$

$$h^۲ = ۳r^۲ \quad , \quad h = r\sqrt{۳}$$

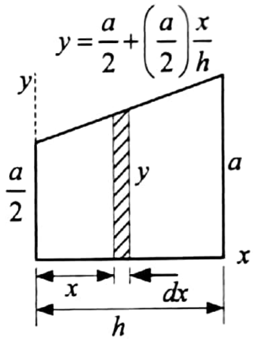
۵-۲۳۰. مختصات y مرکز حجم به دست آمده از دوران ناحیه سایه خورده حول محور x ها به اندازه ۱۸۰ درجه را تعیین کنید.



حل:

$$dV = \frac{۱}{۲}\pi y^۲ dx = \frac{\pi a^۲}{۸}\left(۱+\frac{x}{h}\right)^۲ dx$$

$$V = \frac{\pi a^۲}{۸}\int_۰^h \left(۱+\frac{x}{h}\right)^۲ dx = \frac{۷\pi}{۲۴} a^۲ h$$

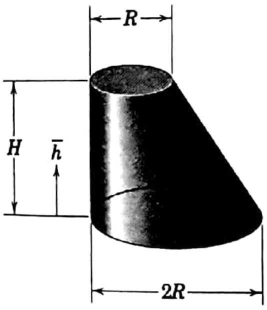


$$\int y\,dV = \int_۰^h \frac{۴}{۳\pi}\frac{a}{۲}\left(۱+\frac{x}{h}\right)\frac{\pi a^۲}{۸}\left(۱+\frac{x}{h}\right)^۲ dx = \frac{۵a^۳ h}{۱۶}$$

$$V = \frac{\int y\,dV}{\bar{y}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{۵a^۳ h}{۱۶}}{\frac{۷\pi a^۲ h}{۲۴}}$$

$$\bar{y} = \frac{۵a^۳ h}{۱۶}\frac{۲۴^۳}{۷\pi a^۲ h} = \frac{۱۵a}{۱۴\pi}$$

۵-۲۳۱. جسم مخروطی شکل دارای برش عرضی افقی که یک دایره است می‌باشد. ارتفاع $\bar{h}$ مرکز جرم جسم از بالای کف جسم همگن را تعیین کنید.



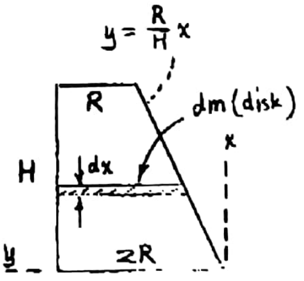
حل:

(جرم واحد جسم= ρ)

$$dm = \rho dV = \rho\pi\left(\frac{۲R-y}{۲}\right)^۲ dx = \frac{\rho\pi}{۴}(۴R^۲ - ۴Ry + y^۲)dx$$

$$= \frac{\rho\pi}{۴}\left[۴R^۲ - ۴R\left(\frac{R}{H}x\right) + \left(\frac{R}{H}x\right)^۲\right]dx$$

$$= \frac{\pi\rho R^۲}{۴}\left[۴ - \frac{۴x}{H} + \frac{x^۲}{H^۲}\right]dx$$

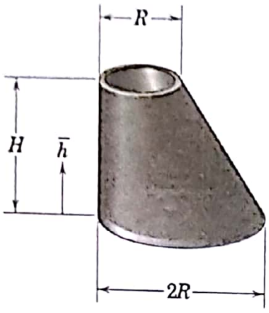


$$m = \int dm = \int_۰^H \frac{\pi\rho R^۲}{۴}\left[۴ - \frac{۴x}{H} + \frac{x^۲}{H^۲}\right]dx = \frac{۷}{۱۲}\pi\rho R^۲ H$$

Scanned by CamScanner

$$\int x_C dm=\int_{\circ}^{H}\frac{\pi\rho R^{۲}}{۲}\left[۲x-\frac{۲x^{۲}}{H}+\frac{x^{۳}}{H^{۲}}\right]dx=\frac{۱۱}{۲۸}\pi\rho R^{۲}H^{۲}$$

$$\overline{X}=\frac{\int x_C dm}{\int dm}=\frac{\frac{۱۱}{۲۸}\pi\rho R^{۲}H^{۲}}{\frac{۷}{۱۲}\pi\rho R^{۲}H}=\frac{۱۱}{۲۸}H=\overline{h}$$



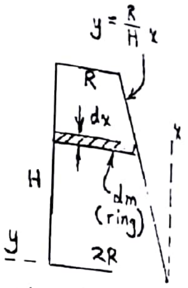
۵-۲۳۲. در شکل زیر مشابه مسئله ۵-۲۳۱ آمده است تنها با این تفاوت که جسم یک پوسته نازک بالا و پایین باز است. ارتفاع $\overline{h}$ مرکز جرم جسم کف جسم همگن را تعیین کنید و نتایجتان را جواب‌های مسئله ۵-۲۳۱ مقایسه کنید.

حل:

(جرم واحد جسم $=\rho$)

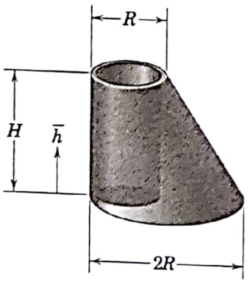
$$dm=\rho dA=\rho\left[\left(\frac{۲R-y}{۲}\right)(۲\pi k)\right]=\rho\pi\left[۲R-\frac{R}{H}x\right]k\,dx=\pi\rho R\left[۲-\frac{x}{H}\right]k\,dx$$

$$m=\int dm=\int_{\circ}^{H}\pi\rho R\left[۲-\frac{x}{H}\right]k\,dx=\frac{۳}{۲}k\pi\rho RH^{۲}$$



$$\overline{X}=\frac{\int x_C dm}{\int dm}=\frac{\frac{۲}{۳}k\pi\rho RH^{۲}}{\frac{۳}{۲}k\pi\rho RH}=\frac{۴}{۹}H=\overline{h}$$

(k پارامتری است که تغییرات ارتفاع سطح مایع مربوط به المان دیفرانسیلی حلقه را حول محیط جسم بیان می‌کند. و برای تمام المان‌ها یکسان است)).



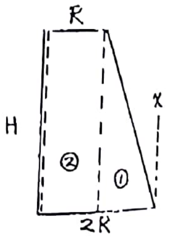
۵-۲۳۳. جسم همگن نشان داده شده در ابتدا به وسیله جسم توپر مسئله ۵-۲۳۱ ساخته شده است، سپس یک حجم استوانه‌ای به قطر کمتر از R مطابق شکل از جسم برداشته می‌شود. ارتفاع $\overline{h}$ مرکز جرم از بالای کف جسم را تعیین کنید.

حل:

۱: جسم توپر (مسئله ۵-۲۱۱)
۲: سوراخ استوانه‌ای

(به حل مسئله «۵-۲۱۱» رجوع کنید.)

جسم	m	$\bar{x}$	$m\bar{x}$
۱	$\frac{۷}{۱۲}\pi\rho R^{۲}H$	$\frac{۱۱}{۲۸}H$	$\frac{۷۷}{۳۳۶}\pi\rho R^{۲}H^{۲}$
۲	$-\pi\rho\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}H$	$\frac{H}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}\pi\rho R^{۲}H^{۲}$
	$\Sigma m=\frac{۱}{۳}\pi\rho R^{۲}H$		$\Sigma m\bar{x}=\frac{۳۵}{۳۳۶}\pi\rho R^{۲}H^{۲}$

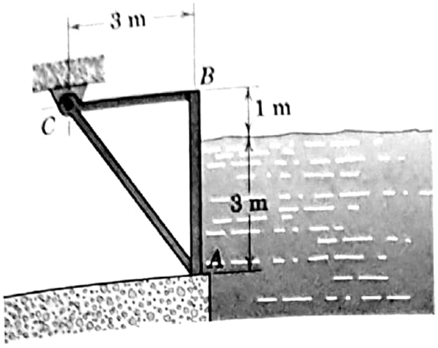


$$\overline{X}=\frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m}=\frac{\frac{۳۵}{۳۳۶}\pi\rho R^{۲}H^{۲}}{\frac{۱}{۳}\pi\rho R^{۲}H}=\frac{۵}{۱۶}H=\overline{h}$$

Scanned by CamScanner

۵-۲۳۴. شکل نشان داده شده برش عرضی یک دریچه مستطیلی شکل به ارتفاع $۲m$ و طول $۶m$ (عمود بر کاغذ) می‌باشد که مانع یک کانال آب شیرین می‌شود. دریچه دارای جرم به اندازه $۸/۵ Mg$ است و حول محور افقی سراسری C لولا شده است. نیروی عمودی P اعمال شده به فونداسیون لبه پایین A دریچه را حساب کنید. از جرم فریم که به دریچه متصل شده است صرف‌نظر شود.

حل:



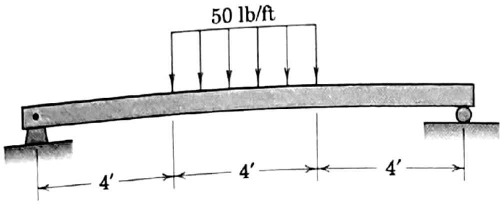
$$\text{فشار} = \frac{۱}{۲}\rho g h = \frac{۱}{۲}۱/۰(۹/۸۱)۳ = ۱۴/۷۲\, kN/m^۲$$

$$R = pA = ۱۴/۷۲(۳)(۶) = ۲۶۴/۹\, kN$$

$$W = ۸/۵(۹/۸۱) = ۸۳/۴\, kN$$

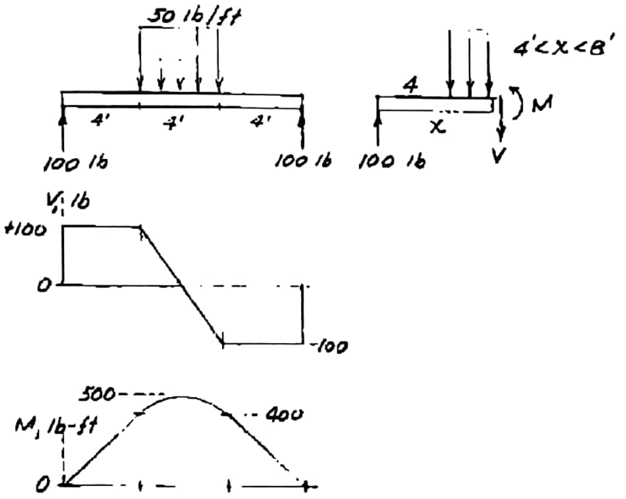
$$\sum M_c = ۰ \quad ; \quad ۲۶۴/۹(۳) + ۸۳/۴(۳) - p(۳) = ۰$$

$$p = ۳۴۸\, kN$$



۵-۲۳۵. دیاگرام‌های گشتاور و برش تیر را رسم کنید که بار یکنواخت ۵۰ پوند بر فوت طول تیر روی نیمه وسطی تیر توزیع شده است را تحمل می‌کند. همچنین حداکثر گشتاور خمشی و موقعیت آن را تعیین کنید.

حل:

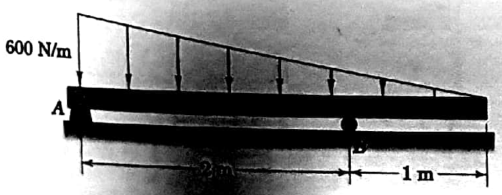


$$\begin{cases} \curvearrowleft + \sum M_A = ۰ \;\Rightarrow\; B_y(۱۲) - (۵۰)(۴)(۶) = ۰ \;\Rightarrow\; B_y = ۱۰۰ lb \\ + \uparrow \sum F = ۰ \;\Rightarrow\; ۱۰۰ + A_y - ۵۰(۴) = ۰ \;\Rightarrow\; A_y = ۱۰۰ lb \end{cases}$$

در محدوده $۴' < x < ۸'$ داریم:

$$\begin{cases} \sum F = ۰ \;\Rightarrow\; V + ۵۰(x-۴) - ۱۰۰ = ۰ \;\Rightarrow\; V = ۵۰(۶-x) \\ \sum M_V = ۰ \;\Rightarrow\; M + ۵۰\left(\frac{(x-۴)^۲}{۲}\right) - ۱۰۰x = ۰ \;\Rightarrow\; M = ۲۵(-x^۲ + ۱۲x - ۱۶) \end{cases}$$

$$\frac{dM}{dx} = ۰ \;\Rightarrow\; M_{max} = ۵۰۰ lb-ft \;@\; x = ۶\, ft$$



۵-۲۳۶. حداکثر گشتاور خمشی M_{max} برای تیر بارگذاری شده را تعیین کنید و فاصله x از انتهای راست A در جایی که M_{max} موجود است را بیابید.

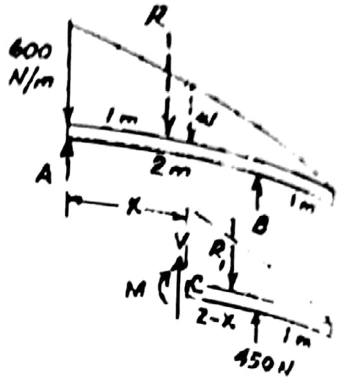
حل:

Scanned by CamScanner

$$R=\frac{600}{2}(3)=900\,N$$

$$\sum M_A=0\quad,\quad 900(1)-2B=0\quad,\quad B=450\,N$$

$$\sum F=0\quad,\quad 900-450-A=0\quad,\quad A=450\,N$$



$$R_1=\frac{\omega}{2}(2-x+1)=\frac{3-x}{2}\omega$$

که $\omega=\dfrac{3-x}{3}600\,N/m$

$$R_1=100(3-x)^2\,N$$

$$\sum M_C=0\quad,\quad 450(2-x)=100(3-x)^2\frac{3-x}{3}+M$$

$$M=450(2-x)-\frac{100}{3}(3-x)^3\quad,\quad 0\le x\le 2m$$

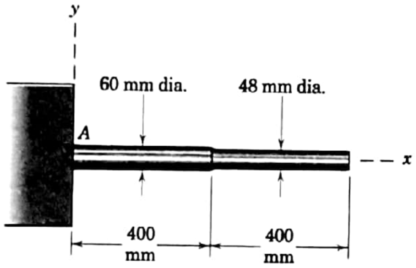
برای حداکثر یا حداقل

$$\frac{dM}{dx}=-450+100(3-x)^2=0$$

$$3-x=\pm\sqrt{4.5}\quad,\quad x=3(1\pm 1/\sqrt{2})=0.879m\quad,\quad 5.12m$$

$$M_{\max}=450(2-0.879)-\frac{100}{3}(3-0.879)^3=186.4\,N\cdot m$$

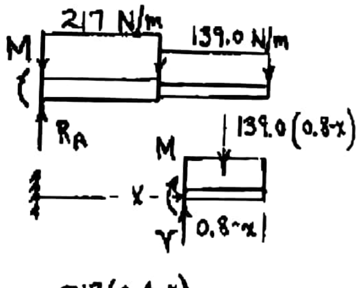
۵-۲۳۷. شفت فولادی افقی با دو قطر به یک بلوک ثابت در A جوش زده شده است. دیاگرام‌های نیروی برشی و لنگر خمشی در شفت به خاطر وزنش را رسم کنید. مقادیر نیروی برشی و گشتاور خمشی در نقطه برخورد دو شفت را تعیین کنید.



حل:

$$P_{steel}g=7830(9.81)=76.8(10^3)\,N/m^3$$

$$W=weight/meter=\frac{\pi d^2}{4}(1)(76.8)10^3=60.3d^2(10^3)\frac{N}{m}$$

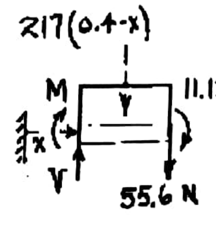


$$\left.\begin{array}{ll}For\ d=60(10^{-3})m\ , & W=217\,N/m\\ For\ d=48(10^{-3})m\ , & W=139.0\,N/m\end{array}\right\}(d\ in\ meters)$$

$$0.4<x<0.8m$$

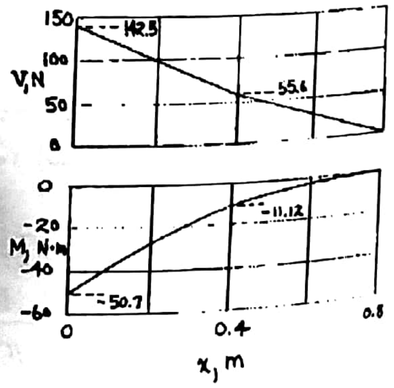
$$\sum F=0\ :\quad V=139.0(0.8-x)$$

$$\sum M=0\ :\quad M+139.0(0.8-x)\frac{0.8-x}{2}=0$$



$$M=-69.5x^2+111.2x-44.5$$

$$At\ x=0.4m\quad,\quad\begin{cases}M=-11.12N.m\\ V=55.6N\end{cases}$$



$$0<x<0.4m$$

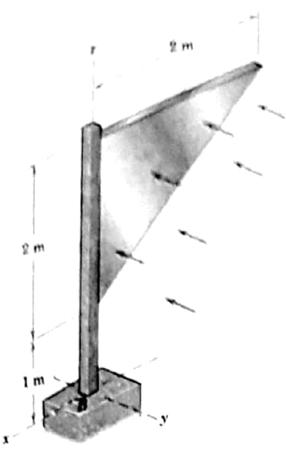
$$\sum M=0\ :\quad M+11.12+55.6(0.4-x)+217\frac{(0.4-x)^2}{2}=0$$

$$M=-108.6x^2+142.5x-50.7$$

$$At\ x=0\ ,\quad\begin{cases}M=-50.7N.m\\ V=142.5N\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۵-۲۳۸. تابلوی مثلثی شکل به میله جاسازی شده در پایه بتونی در نقطه B متصل شده است. نیروی برشی V، گشتاور خمشی M و گشتاور پیچشی T در میله در نقطه B در میان طوفان درجایی که سرعت عمودی باد به $۱۰۰km/h$ می‌رسد را محاسبه کنید. فشار هوا (که فشار ایستایی می‌نامند) در مقابل صفحه عمودی منطبق بر این سرعت برابر $۱/۴ kPa$ می‌باشد.

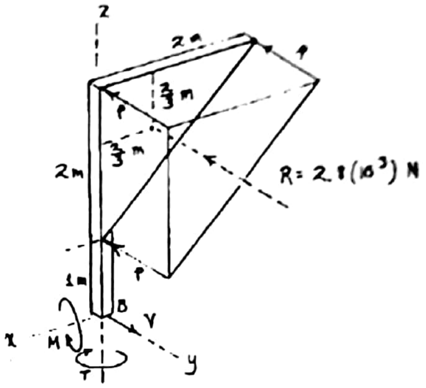


حل:

نیروی حاصل برروی علامت برابر است با

$$R = pA = ۱/۴(۱۰)^۳ \frac{۱}{۲}(۲)(۲) = ۲۸۰۰ N$$

و از مرکز منشور منطقه فشار عبور می‌کند.

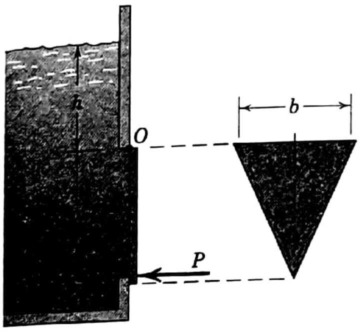


$$\begin{cases} V = ۲/۸ kN \\ M = ۲/۸\left(۳ - \frac{۲}{۳}\right) = ۶/۵۳ kN \cdot m \\ T = ۲/۸\left(\frac{۲}{۳}\right) = ۱/۸۶۷ kN \cdot m \end{cases}$$

، توسط بازبینی

۵-۲۳۹. یک صفحه فلزی، یک دریچه مثلثی در دیوار عمودی یک تانکر مایع به چگالی ρ را آب‌بندی کرده است. صفحه حول لبه بالایی O مثلث لولا شده است. نیروی P موردنیاز برای نگه داشتن دریچه در وضعیت بسته شده در مقابل فشار مایع را تعیین کنید.

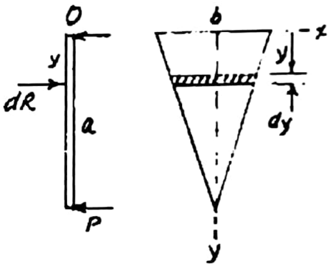
حل:



$$dA = ۲ \times dy = \frac{b}{a}(a-y)dy \quad , \quad p = \rho g(h+y)$$

$$dR = \rho g(h+y)\frac{b}{a}(a-y)dy$$

$$\sum M_o = ۰ \quad ; \quad Pa - \int y\, dR = ۰$$

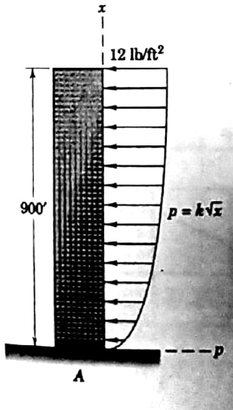


$$Pa = \rho g \frac{b}{a}\int_۰^a y(h+y)(a-y)\,dy$$

$$Pa = \rho g \frac{b}{a}\frac{a^۳}{۶}\left(h + \frac{a}{۲}\right)$$

$$p = \frac{\rho g a b}{۶}\left(h + \frac{a}{۲}\right)$$

۵-۲۴۰. یک بخش از مطالعه طراحی اولیه، تأثیرات باد روی یک ساختمان $۹۰۰ft$ را تحقیق می‌کنند. برای توزیع سهموی فشار باد نشان داده شده در شکل، عکس‌العمل‌های گشتاور و نیرو در پایه A یک ساختمان که به علت نیروی باد ایجاد می‌شود را محاسبه کنید. بعد دیگر ساختمان ساختمان (عمود بر کاغذ) $۲۰۰ft$ است.



حل:

$$p = k\sqrt{x} : ۱۲ = k\sqrt{۹۰۰}$$

$$k = ۰/۴ \frac{lb}{ft^{۵/۲}} \quad , \quad p = ۰/۴\sqrt{x}$$

Scanned by CamScanner

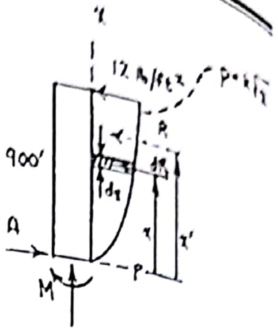
$$dR = ۲۰۰\,p\,dx = ۲۰۰(۰/۴\sqrt{x}) = ۸۰\sqrt{x}\,dx$$

$$R = \int dR = \int_{۰}^{۹۰۰'} ۸۰\sqrt{x}\,dx = ۸۰\frac{۲}{۳}x^{۳/۲}\Big|_{۰}^{۹۰۰'} = ۱/۴۴۰(۱۰^{۶})\,lb$$

$$\int x\,dR = \int_{۰}^{۹۰۰} ۸۰x^{۳/۲}\,dx = ۸۰\frac{۲}{۵}x^{۵/۲}\Big|_{۰}^{۹۰۰'} = ۷/۷۸(۱۰^{۸})\,lb-ft$$

$$A = ۱/۴۴۰(۱۰^{۶})\,lb$$

$$M = ۷/۷۸(۱۰^{۸})\,lb-ft$$



۵-۲۴۱. ساختمان بلند عنوان شده در مسئله ۵-۲۴۰ شبیه یک تیر قائم یکنواخت است. گشتاور خمشی و نیروی برشی در ساختمان که تابعی از ارتفاع x از سطح زمین است را ترسیم و تعیین کنید. نتایجتان را برای $x = ۴۵۰$ فوت مجدداً ارزیابی نمایید.

حل:

$$p = ۰/۴\sqrt{x}\,(lb/ft^{۲})$$

$$dR = ۸۰\sqrt{x'}\,dx'$$

$$\xrightarrow{+}\sum F = ۰ \;:\; V - \int_{x}^{۹۰۰'} ۸۰\sqrt{x'}\,dx' = ۰$$

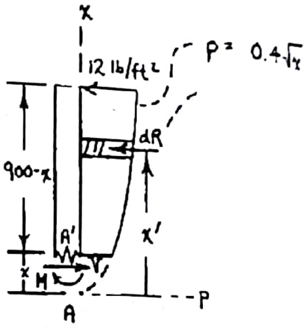
$$V = ۸۰\frac{۲}{۳}x'^{۳/۲}\Big|_{x}^{۹۰۰} = ۱/۴۴۰(۱۰^{۶}) - \frac{۱۶۰}{۳}x^{۳/۲}\,(lb)$$

$$V|_{x=۴۵۰'} = ۰/۹۳۱(۱۰^{۶})\,lb$$

$$\sum M_{A'} = ۰ \;:\; M - \int_{x}^{۹۰۰} ۸۰\sqrt{x'}\,(x'-x)\,dx' = ۰$$

$$M = ۸۰\left\{\frac{۲}{۵}x'^{۵/۲} - x\frac{۲}{۳}x'^{۳/۲}\right\}\Big|_{x}^{۹۰۰} = ۷/۷۸(۱۰^{۲}) - ۱/۴۴۰(۱۰^{۶})x + \frac{۶۴}{۳}x^{۵/۲}$$

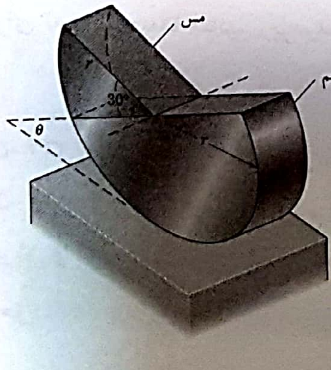
$$M|_{x=۴۵۰'} = ۲/۲۱(۱۰^{۸})\,lb-ft$$



مسائل کامپیوتری

۵-۲۴۲. قطاع استوانه‌ای $۳۰°$ از مس ساخته شده است و به یک نیم‌استوانه‌ای ساخته شده از آلومینیوم متصل شده است که در زیر نشان داده شده است. زاویه θ برای وضعیت تعادلی استوانه ساکن روی یک سطح افقی را تعیین کنید.

حل:

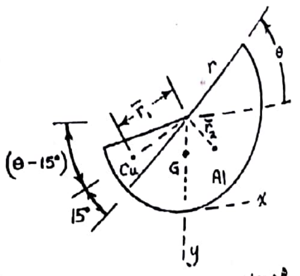


$$\bar{r}_{۱} = \frac{۲}{۳}r\frac{\sin ۱۵°}{\frac{۱۵\pi}{۱۸۰}} = \frac{۸r}{\pi}\sin ۱۵°$$

$$\bar{r}_{۲} = \frac{۴r}{۳\pi}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} = ۰ \quad \text{برای تعادل}$$

$$m_{cu}|\bar{x}_{۱}| = m_{A}|\bar{x}_{۲}|$$



همچنین

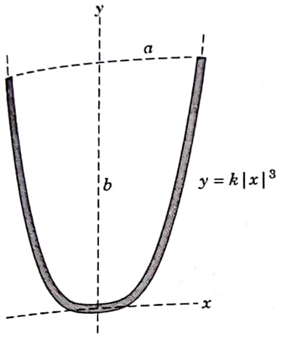
$$\left(\frac{۳۰}{۳۶۰}\pi r^۲ W\rho_{cu}\right)\left(\frac{۸r}{\pi}\sin ۱۵^\circ\right)\cos(\theta-۱۵^\circ)=\left(\frac{\pi r^۲}{۲}W\rho_{Al}\right)\frac{۴r}{۳\pi}\sin\theta$$

برای کاهش $\frac{\rho_{cu}}{\rho_{Al}}\sin ۱۵^\circ\cos(\theta-۱۵^\circ)=\sin\theta$

با $\rho_{cu}=۸۹۱۰ kg/m^۳$ ، $\rho_{Al}=۲۶۹۰ kg/m^۳$

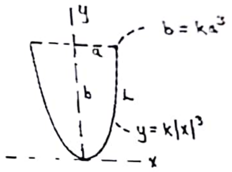
با حل عددی $\theta=۴۶/۸^\circ$

۵-۲۴۳. عبارت انتگرالی برای مختصات y مرکز ثقل یک میله خم شده باریک یکنواخت که در شکل زیر نشان داده شده را بسازید. سپس برای مقادیر $a=۲$ و $b=۸$ به طور عددی عبارت انتگرال خود را ارزیابی کنید.



حل:

$b=ka^۳$ ، $k=\frac{b}{a^۳}$



$$y=\frac{b}{a^۳}x^۳$$

$$\frac{dy}{dx}=۳\frac{b}{a^۳}x^۲$$

$$\bar{x}=۰$$

$$L=\int dL=\int\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\,dx=\int_۰^۹\sqrt{۱+۹\frac{b^۲}{a^۶}x^۴}$$

$$\int y\,dL=\int_۰^a\frac{b}{a^۳}x^۳\sqrt{۱+۹\frac{b^۲}{a^۶}x^۴}\,dx=\frac{b}{a^۳}\int_۰^a x^۳\sqrt{۱+۹\frac{b^۲}{a^۶}x^۴}\,dx$$

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dL}{\int dL}=\frac{\frac{b}{a^۳}\int_۰^a x^۳\sqrt{۱+۹\frac{b^۲}{a^۶}x^۴}\,dx}{\int_۰^a\sqrt{۱+۹\frac{b^۲}{a^۶}x^۴}\,dx}$$

برای مقادیر ارائه شده

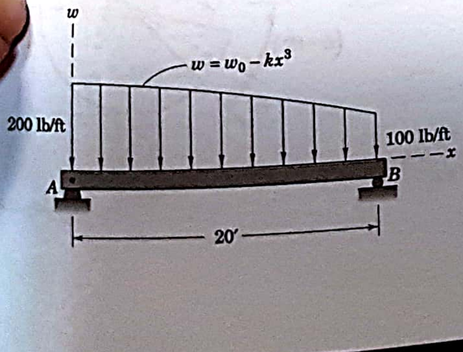
$$k=\frac{b}{a^۳}=\frac{۸}{۲^۳}=۱\quad,\quad y=x^۳$$

$$\bar{y}=\frac{\int_۰^a x^۳\sqrt{۱+۹x^۴}\,dx}{\int_۰^a\sqrt{۱+۹x^۴}\,dx}=\frac{N}{D}$$

با استفاده از حل عددی اشکالی از قبیل مستطیل، ذوزنقه تقریب‌زده می‌شوند و یا با استفاده از تکنیک سیمپسون برای تعیین ناحیه‌ها مقادیر زیر پیدا می‌شوند.

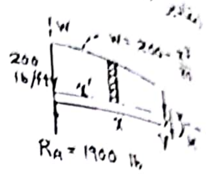
$N=۳۲/۳$ ، $D=۸/۶۳$ ، $\bar{y}=\frac{N}{D}=۳/۷۴$

۵-۲۴۴. دیاگرام‌های گشتاور و برش برای تیر بارگذاری شده مسئله ۵-۱۲۰ را دوباره در اینجا رسم کنید. مقادیر ماکزیمم گشتاور و برش و موقعیتشان روی تیر را تعیین کنید.



حل:

(مقادیر W و R_A از مسئله «۵-۱۱۳» به دست می‌آیند).



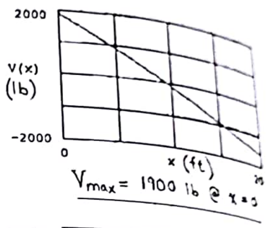
$$+\uparrow \sum F = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۹۰۰ - V - \int_۰^x \left(۲۰۰ - \frac{x'^۲}{۸۰} \right) dx'$$

$$\Rightarrow \quad V = ۱۹۰۰ - ۲۰۰x + \frac{x^۳}{۲۴۰} (lb)$$

$$\curvearrowleft + \sum M = ۰ \quad \Rightarrow \quad M + \int_۰^x \left(۲۰۰ - \frac{x'^۲}{۸۰} \right)(x - x')\, dx' - ۱۹۰۰x = ۰$$

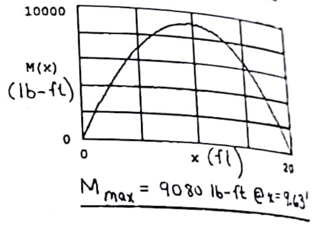
$$\Rightarrow \quad M = ۱۹۰۰x - ۱۰۰x^۲ + \frac{x^۴}{۹۶۰} (lb - ft)$$

نمودار $V(x)$ برحسب x:



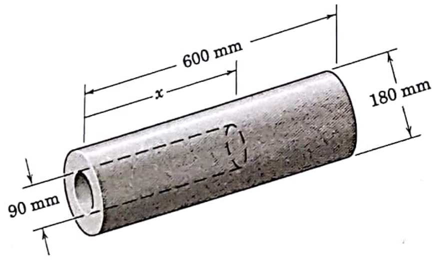
$$V_{\max} = ۱۹۰۰ lb @ x = ۰$$

نمودار $M(x)$ برحسب x:

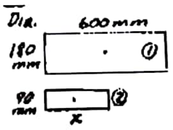


$$M_{\max} = ۹۰۸۰ lb - ft @ x = ۹/۶۳'$$

۵-۲۴۵. یک شارژر همگن سوخت جامد برای یک راکت در این هندسه به شکل استوانه دایروی با سوراخ هم‌مرکز به عمق x موجود است. برای ابعاد نشان داده شده، $\overline{X}$ را، (مختصات x مرکز جرم سوخت) که تابعی از عمق x سوراخ از $x = ۰$ تا $x = ۶۰۰mm$ است را رسم کنید. مقادیر ماکزیمم $\overline{X}$ را تعیین کنید و نشان دهید که برابر با مقادیر منطبق شده بر x است.



حل:



$$V_۱ = \frac{\pi(۱۸۰)^۲}{۴} ۶۰۰ = ۱۵۲۶۸(۱۰^۳) mm^۳$$

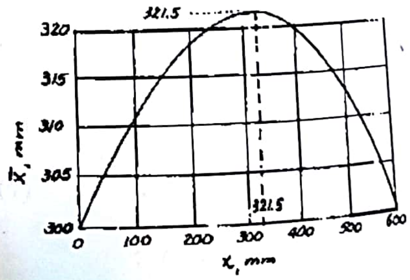
$$\bar{x}_۱ = ۳۰۰ mm$$

$$V_۲ = -\frac{\pi(۹۰)^۲}{۴} x = -۶/۳۶۲(۱۰^۳)x \quad , \quad \bar{x}_۲ = -\frac{x}{۲}$$

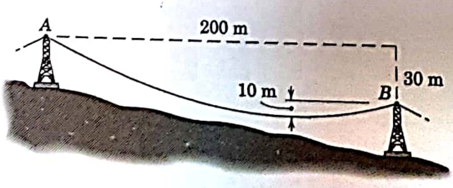
$$\overline{X} = \frac{\sum V\bar{x}}{\sum V} = \frac{۱۵۲۶۸(۳۰۰)۱۰^۳ - ۳/۱۸۱(۱۰^۳)x^۲}{۱۵۲۶۸(۱۰^۳) - ۶/۳۶۲(۱۰^۳)x} = \frac{۴۵۸۰(۱۰^۳) - ۳/۱۸۱x^۲}{۱۵۲۶۸ - ۶/۳۶۲x}$$

$$\overline{X}_{\max} = ۳۲۲ mm$$

$$x = ۳۲۲ mm$$

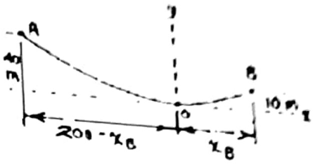


۵-۲۴۶. یک کابل برق بلند از دو برج آویخته شده است. کابل دارای جرم $۲۰ kg/m$ است. اگر حداکثر کشش کابل مجاز برابر $۷۵ kN$ باشد، جرم ρ یخ بر متری که می‌تواند روی کابل باشد بدون این که کشش کابل از حداکثر کشش مجاز تجاوز کند را



تعیین کنید. اگر کشش اضافی در کابل قابل صرف‌نظر کردن باشد، آیا اضافه کردن یخ شکل کابل را تغییر می‌دهد؟

حل:



$$\mu_{cable} = ۲۰(۹/۸۱) = ۱۹۶/۲\, N/m$$

$$Eg\,۵/۱۹ \;:\; y = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{x}{T_\circ/\mu} - ۱\right]$$

$$At\ B \;:\; ۱۰ = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{x_B}{T_\circ/\mu} - ۱\right]$$

$$At\ A \;:\; ۴۰ = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{۲۰۰ - x_B}{T_\circ/\mu} - ۱\right]$$

به طور همزمان با حل عددی : $\begin{cases} x_B = ۶۷/۱m \\ T_\circ/\mu = ۲۲۷m \end{cases}$

$$T_A = T_\circ + \mu y_A \;:\; ۷۵۰۰۰ = ۲۲۷\mu + \mu(۴۰)$$

$$\mu = ۲۸۱\, N/m$$

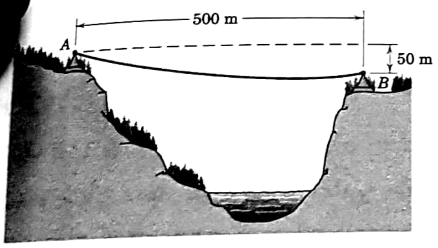
$$\mu = \mu_{cable} + \mu_{ice} \;:\; ۲۸۱ = ۱۹۶/۲ + \mu_{ice}$$

$$\mu_{ice} = ۸۴/۷\, N/m$$

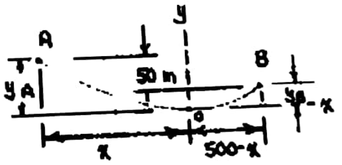
$$\rho = \frac{\mu}{g} = \frac{۸۴/۷}{۹/۸۱} = ۸/۶۳\, kg/m$$

شکل وابسته به μ نیست.

۵-۲۴۷. گام اولیه در ساختن یک ترامواى عبور از تنگه رودخانه زیبا، کابلی به اندازه $۵۰۵m$ به جرم $۱۲kg/m$ است که باید بین دو نقطه A و B کشیده شود. فاصله افقی x سمت راست نقطه A تا پایین‌ترین نقطه در کابل را تعیین کنید و کشش‌ها را در نقاط A و B محاسبه کنید.



حل:



$$\mu = ۱۲(۹/۸۱) = ۱۱۷/۷\, N/m$$

از $s = \frac{T_\circ}{\mu}\sinh\frac{\mu}{T_\circ}x$:

$$s_{OA} = \frac{T_\circ}{\mu}\sinh\frac{\mu}{T_\circ}x \qquad (۱)$$

$$s_{OB} = \frac{T_\circ}{\mu}\sinh\left[\frac{\mu}{T_\circ}(۵۰۰ - x)\right] \qquad (۲)$$

همچنین $s_{OA} + s_{OB} = ۵۰۵$ $\qquad (۳)$

از $y = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu}{T_\circ}x - ۱\right]$:

$$y_A = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu}{T_\circ}x - ۱\right] \qquad (۴)$$

$$y_B = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu}{T_\circ}(۵۰۰ - x) - ۱\right] \qquad (۵)$$

همچنین $y_A - y_B = ۵۰$ $\qquad (۶)$

حل عددی $of\,(۱) - (۶)$:

$$\frac{T_\circ}{\mu} = ۱۴۳۹m$$

$$s_A = ۳۹۸m$$

$$s_B = ۱۰۷/۱m$$

$$x = ۳۹۳m$$

$$y_A = ۵۴/۰m$$

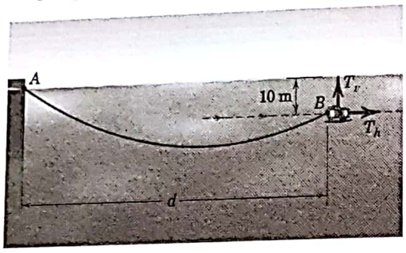
$$y_B = ۳/۹۸m$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{T_\circ}{\mu} = \frac{T_\circ}{۱۱۷/۷} = ۱۴۳۹ \quad \Rightarrow \quad T_\circ = ۱۶۹۴۰۰\,N$$

$$T = T_\circ + \mu y: \begin{cases} T_A = T_\circ + ۱۱۷/۷(۵۴) = ۱۷۵۸۰۰\,N \\ T_B = T_\circ + ۱۱۷/۷(۳/۹۸) = ۱۶۹۹۰۰\,N \end{cases}$$

۵-۲۴۰. وسیله رباتیک کوچک کنترل از راه دور مسئله ۵-۱۷۱ و ۵-۱۷۲ دوباره نشان داده شده است. وسیله دارای وسمت $۲۰۰m$ یک نیروی شناور کم معکوس دارد که نیروی خالص ۰/۰۲۵ نیوتن بر متر از طولش روی آن به سمت پایین عمل می‌کند. از متغیرهای پیشرانه افقی و عمودی وسیله خودش را تا عمق ثابت $۱۰m$ حفظ می‌کند و به آرامی به سمت راست حرکت می‌کند. اگر حداکثر نیروی پیشرانه افقی $۱۰N$ و حداکثر نیروی پیشرانه عمودی $۷N$ باشد، حداکثر مقدار مجاز فاصله d را تعیین کنید و این که مقدار متناظر نیروهای پیشرانه به چه چیزی محدود می‌شود؟



حل:

$$y_A = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu}{T_\circ}(d - x_B) - ۱\right] \qquad (۱)$$

$$y_B = y_A - ۱۰ = \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu}{T_\circ}x_B - ۱\right] \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{T_\circ}{\mu}\left[\cosh\frac{\mu}{T_\circ}(d - x_B) - \cosh\frac{\mu}{T_\circ}x_B\right] = ۱۰ \qquad (۳)$$

$$T_\circ y_A = \int_\circ^{x_A} x\,\mu\,ds = \mu\int_\circ^{x_A} x\sinh\frac{\mu}{T_\circ}x\,dx$$

با حل معادله فوق انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$y_A = (d - x_B)\sinh\frac{\mu}{T}(d - x_B) \qquad (۴)$$

$$y_B = (d - x_B)\sinh\frac{\mu}{T_\circ}(d - x_B) + ۱۰ \qquad (۵)$$

$$S = \frac{\mu}{T_\circ}\left[\sinh\frac{\mu}{T_\circ}x_B + \sinh\frac{\mu}{T}(s - x_B)\right] = ۲۰۰ \qquad (۶)$$

با حل عددی معادلات فوق داریم: $d = ۱۹۷/۷\,m$

Scanned by CamScanner